OBTENCIÓN DE UN MODELO ELÁSTICO PARA VIGAS ALABEADAS DÉBILMENTE CURVADAS POR UN MÉTODO ASINTÓTICO

J. A. Álvarez-Dios y J. M. Viaño
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Santiago de Compostel
15706 Santiago de Compostela

Abstract.- In this work we obtain a new model for elastic weakly curved rods subjected to an arbitrary loading. The model includes bending, stretching and torsion effects and it is obtained as asymptotic limit from three-dimens ional linearized elasticity. A mathematical justification of the model is given by a result of convergence when area of cross-section tends to zero.

En este trabajo se obtiene mediante un método asintótico un modelo de comportamiento elástico para una viga alabeada débilmente curvada sometida a un sistema de cargas arbitrario.

Las dificultades derivadas de la forma geométrica (los centros de masa de las secciones transversales se sitúan sobre una curva alabeada del espacio) hace que este tipo de vigas sea abordado muy superficialmente en los textos clásicos de ingeniería y de elasticidad. En efecto, los ejemplos en este sentido suelen referirse a casos tan particulares como un arco de circunferencia cargado transversalmente por una fuerza uniformemente repartida. A este respecto merecen citarse Oden-Ripperger[2] y We mpner[5].

El método asintótico que presentamos en el trabajo se basa en una generalización de la idea ya utilizada para el mismo fin en el caso de vigas rectas (Bermúdez-Viaño[1], Trabucho-Viaño[3],[4]). Consiste esencialmente en lo siguiente:

i) Se considera el modelo tridimensional de elasticidad linealizada sobre la viga alabeada $\hat{\Omega}^\varepsilon$ con sección transversal $\omega^\varepsilon = \varepsilon\omega$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ de área ε^2 q ue se supone muy pequeña frente a su longitud (esta es la característica esencial de los sólidos tipo "viga"). Los centros de masa de las secciones transversales describen una curva alabeada C^ε definida en la forma siguiente:

$$C^\varepsilon = \{\theta^\varepsilon(x_3) = (\theta_1^\varepsilon(x_3), \theta_2^\varepsilon(x_3), x_3) : x_3 \in [0, L]\}$$

ii) Mediante un cambio de variable y un reescalamiento en las incógnitas (desplazamientos y tensiones) se transforma el problema en otro equivalente planteado sobre la viga recta de referencia $\Omega = \omega \times (0, L)$.

iii) Se estudia el comportamiento asintótico de este problema cuando ε tiende a cero, identificando el problema límite y estableciendo un resultado de convergencia.

La última etapa ha sido concluida solamente para el caso de vigas débilmente curvadas, es decir, suponiendo que la curva C^ε verifica:

$$\theta_\alpha^\varepsilon(x_3) = \varepsilon\theta_\alpha(x_3), \quad (\alpha = 1, 2)$$

donde las funciones θ_α son independientes de ε. De esta forma se obtiene un modelo límite de primer orden que incluye los efectos más importantes (flexión, extensión y torsión) para cargas cualesquiera. El resultado de convergencia demostrado dota al modelo obtenido de una justificación matemática rigurosa (en general, los modelos más conocidos son obtenidos partiendo de hipótesis *a priori* que ahora resultan justificadas por el análisis asintótico).

El caso de vigas con curvatura arbitraria está siendo estudiado con la misma metodología pero los resultados son más difíciles de establecer debido a la generalidad de la geometría del sólido.

Agradecimiento.- Este trabajo forma parte del Proyecto *"Shells: Mathematical Modeling and Analysis, Scientific Computing"* del Programa de Capital Humano y Movilidad de la Comisión de las Comunidades Europeas (Contrato nú m. ERBCHRXCT940536).

Referencias

[1] Bermúdez, A. y Viaño, J. M. 'Une justification des équations de la thermoélasticité des poutres a section variable par des méthodes asymptotiques', *R.A.I.R.O., Analyse Numérique* **18**, 347–376 (1984).

[2] Oden, J. T. y Ripperger, E. A. *Mechanics of Elastic Structures.* McGraw-Hill, Nueva York (1981).

[3] Trabucho, L. y Viaño, J. M. 'Existence and characterization of higher order terms in an asymptotic expansion method for linearized elastic beams', *J. Asymptotic Analysis* **2**, 223–255 (1989).

[4] Trabucho, L. y Viaño, J. M. *Mathematical modelling of Rods.* En *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. IV, North Holland, Ciarlet, P. G. - Lions, J. L. editores (aceptado para publicación).

[5] Wempner, G. *Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies.* Sijthoff and Noordhoff, Alphen an den Rijn (1981).