Despliegues de Singularidades y Atractores Extraños

J.A.Rodríguez
Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo
c/ Calvo Sotelo, s/n. 33007 Oviedo, España.

Abstract

Se esboza la prueba de la persistencia de cualquier número de atractores extraños y de la coexistencia de una infinidad de ellos, en un escenario tan simple como los campos tridimensionales. Puesto que éste y otros fenómenos caóticos están asociados a la configuración de Sil'nikov, se expone brevemente la prueba de que esta configuración está presente en cualquier despliegue genérico de una singularidad nilpotente de codimensión cuatro y se plantea la cuestión para codimensión inferior. Una rápida introducción de la Teoría de la Bifurcación trata de explicar el interés que tiene determinar para cada dinámica complicada la singularidad o singularidades de menor codimensión desde las que se pueda desplegar.

1 Introducción

Cuando se postula un modelo matemático para describir los fenómenos de evolución la abstracción que resulta es el bien conocido concepto de sistema dinámico (o semisistema dinámico, si el proceso no es reversible). Por lo tanto, todas las dinámicas que se observan en el Universo tendrían que manifestarse también en el mundo de los sistemas dinámicos. De ahí la importancia de estudiar familias de sistemas cuyas dinámicas simulen los extraños comportamientos que tienen muchos fenómenos reales.

El primero en alertar sobre la existencia de comportamientos dinámicos de extraordinaria complejidad fue H. Poincaré, al observar cómo los puntos homoclínicos (intersección de las variedades invariantes de un punto fijo hiperbólico) destruían algunos de sus argumentos sobre la estabilidad del sistema solar. Sin embargo, fue necesario casi un siglo para reunir los conocimientos matemáticos mínimos y los planteamientos necesarios para elaborar una teoría (la Teoría de la Bifurcación) que sirva de paradigma para la comprensión de las transiciones que enriquecen la jerarquía dinámica del Universo (las tan mencionadas transiciones al caos, por ejemplo).

El contexto en el que se plantea la Teoría de la Bifurcación es el que se requiere para realizar cualquier observación: Un espacio inicial X (en este caso un conjunto de sistemas dinámicos con una topología τ) y una relación de equivalencia $\sim$ (habitualmente la equivalencia topológica). Los puntos de X se identifican mediante $\sim$ para dar lugar a los objetos (las clases de equivalencia topológica). Los objetos (dinámicas) observables son aquellos que tienen interior no vacío. Un elemento (sistema dinámico) se dice estructuralmente estable si pertenece al interior de su clase de equivalencia. Representemos por Σ al conjunto de los elementos estables. Al complementario $X \setminus \Sigma$ se le denomina conjunto de bifurcación.

A partir de este planteamiento elemental surgen ya de forma natural algunas cuestiones de gran interés:

1) Caracterizar el conjunto estable Σ, es decir, el conjunto de sistemas para los que las propiedades dinámicas consideradas (aquellas invariantes por $\sim$) no se alteran bajo pequeñas perturbaciones.

2) Estudiar si Σ es denso en X; lo que equivale a que todo sistema se pueda aproximar por otro con dinámica estable. La densidad de Σ se puede sustituir, para un enfoque probabilístico, por medida total o, al menos, medida positiva.

3) Encontrar la disposición relativa en Σ de las distintas clases de equivalencia e investigar la naturaleza de las diferentes dinámicas que contiene el conjunto de bifurcación. Por supuesto, este objetivo determinaría todas las transiciones que pueden ocurrir desde cada una de las diferentes dinámicas.

Cuando X es el conjunto de todos los campos de clase $k \geq 1$ definidos sobre una variedad bidimensional, compacta, orientada y suficientemente regular, dotado de la C^r-topología, M. Peixoto [18] caracterizó el conjunto Σ de los campos estructuralmente estables y probó que es denso en X. Sin embargo esta densidad no se tiene en dimensión superior. Véase el memorable trabajo de R. Mañé [13] para una caracterización de los difeomorfismos C^1-estables definidos sobre una variedad de dimensión arbitraria. Para un seguimiento histórico más exhaustivo del tratamiento de las dos primeras cuestiones se pueden ver [16] y [17].

El resto de esta exposición se desarrollará en el contexto de la tercera cuestión. Puesto que $n = 3$ es la menor dimensión para la que falla la densidad de los campos estructuralmente estables y para la que pueden aparecer dinámicas interesantes, tomaremos como escenario el espacio X de los campos suficientemente regulares definidos sobre un compacto de $\mathbb{R}^3$ con la correspondiente C^k-topología. En este espacio de dimensión infinita la estructura del conjunto de bifurcación puede ser extraordinariamente complicada. Para obtener información sobre este conjunto se definen secciones de X de dimensión finita. (Ejemplos de estas secciones son las familias k-paramétricas de campos de vectores que con frecuencia aparecen en las aplicaciones). Así, si una clase de equivalencia contenida en el conjunto de bifurcación es localmente una variedad de codimensión uno, se habla de una bifurcación de codimensión uno y se detecta en cualquier familia uniparamétrica $x_\mu \in X$ transversal a la variedad. Además, puesto que la condición de transversalidad es abierta en el espacio de las familias x_μ de clase $k \geq 1$, la bifurcación persiste para pequeñas C^1-perturbaciones de x_μ. Se dice que esta familia es un despliegue de la bifurcación y, puesto que la transversalidad es una propiedad genérica, se habla de un despliegue genérico.

Con frecuencia el conjunto de bifurcación define localmente una estratificación. Dentro de una variedad $G_1 \subset X$ de codimensión uno existe una variedad G_2 de codimensión dos que contiene una clase de equivalencia diferente y así sucesivamente. Tomemos por ejemplo $x_0 \in G_k \subset G_{k-1} \subset ..... \subset G_1$. Para cada $i = 2, 3, .., k$, los elementos de $G_{i-1} \setminus G_i$ representan bifurcaciones de codimensión $i - 1$ y x_0 es como mínimo una bifurcación de codimensión k. Si tomamos una sección transversal a G_k pasando por x_0, este despliegue k-paramétrico intersecará a cada una de las variedades de la estratificación, definiendo en el espacio de parámetros $\mathbb{R}^k$ un conjunto que se denomina diagrama de bifurcación. Cuando un despliegue de este tipo describe completamente la estructura del conjunto de bifurcación en un entorno de x_0, es decir, despliega todas las bifurcaciones que existen en dicho entorno, se dice que es un despliegue versal. Desde luego, encontrar para cada elemento del conjunto de bifurcación un despliegue versal, que aporte un elocuente diagrama de bifurcaciones, es una forma satisfactoria de resolver la tercera de las cuestiones propuestas anteriormente. Veremos a continuación las dificultades que esto plantea.

La equivalencia topológica que hemos considerado a lo largo de toda la exposición significa que dos campos son equivalentes si los respectivos diagramas de fase son homeomorfos (sin conservación de la parametrización, pero sí del sentido de recorrido). De acuerdo con el teorema de rectificación del flujo (flow-box), la restricción de dos campos equidimensionales a entornos suficientemente pequeños de sendos puntos regulares son homeomorfos. Por consiguiente, la diferencia topológica entre dos campos se debe a sus respectivos diagramas de fases en las proximades de sus singularidades (puntos de equilibrio) o a la configuración topológica global de otros conjuntos invariantes, la cual tambien se ha de conservar mediante el homeomorfismo que define la equivalencia. De hecho veremos que ambas posibilidades están relacionadas y de ahí que comencemos estudiando las bifurcaciones cerca de las singularidades.

Por una singularidad se suele entender tanto un punto crítico de un campo como el campo en sí mismo. Puesto que, en principio, sólo estamos interesados en los cambios dinámicos que ocurren al perturbar el campo en un entorno arbitrariamente pequeño del punto crítico (bifurcaciones locales), es suficiente pensar en gérmenes de singularidades. Ahora bien, de acuerdo con el teorema de Hartman, si el 1-jet del germen tiene todos sus autovalores con parte real distinta de cero (singularidad hiperbólica), entonces el campo es estructuralmente estable en un entorno de la singularidad. Por consiguiente, las bifurcaciones locales tendrán lugar sólo en las singularidades que no son hiperbólicas.

La falta de hiperbolicidad de una singularidad se expresa en función de los coeficientes de la diferencial del campo (1-jet). Según las condiciones que se les impongan a estos coeficientes con el fin de anular la parte real de alguno de los autovalores, se obtendrán distintas singularidades. Por otra parte, la falta de hiperbolicidad permite que los términos de los k-jets de orden superior puedan intervenir en la dinámica local de la singularidad y, por consiguiente, puedan ser significativas nuevas condiciones sobre los coeficientes de los sucesivos k-jets. Estas condiciones se expresan mediante igualdades o desigualdades algebraicas que se definen después de reducir el k-jet a su forma normal, e introducen una estratificación $G^n \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset$ ....sobre el conjunto G^n de los gérmenes de campos de vectores en $\mathbb{R}^3$

[22]. Cada B_i se define mediante i igualdades y este número es la codimensión de $B_{i.}$ Así B_1 es el subconjunto de G^n cuyos elementos tienen parte lineal con un autovalor sobre el eje imaginario. B_2, B_3, ... se definen aumentando el número de estos autovalores o anulando algunos coeficientes de términos de orden superior en la forma normal.

Para cualquier dimensión n del espacio de fase todas las singularidades de $B_1 \setminus B_2$ son estructuralmente estables en B_1, es decir, la singularidad es topológicamente equivalente a cualquier perturbación suficientemente pequeña que pertenezca a $B_1 \setminus B_2$. J. Sotomayor [21] estudió estas bifurcaciones de codimensión uno. Una de ellas es la renombrada bifurcación de Hopf que genera una órbita periódica (configuración global) naciendo del punto de equilibrio.

Para $n = 2$, R. Bogdanov [2] y F. Takens [23] estudiaron las singularidades de codimensión dos (es decir, aquellas en $B_2 \setminus B_3$) con parte lineal

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y demostraron que todas eran topológicamente equivalentes. Se habla entonces de la singularidad nilpotente de codimensión dos. Bogdanov probó además que todos los 2-despliegues de esta singularidad son, salvo inversión del tiempo, topológicamente equivalentes; lo que significa la existencia de despliegues versales. La principal dificultad para la prueba de esta versalidad es la unicidad del ciclo límite que nace para valores de los parámetros sobre una curva de bifurcación de Hopf. Este ciclo límite colisiona con un punto silla para generar un lazo homoclínico. (Otra configuración global que se origina por bifurcación en cualquier entorno de la singularidad nilpotente de codimension dos). Para el estudio de otras singularidades en el plano, ver por ejemplo [6].

Si la prueba de la versalidad en el caso de la singularidad de Bogdanov-Takens se complica a causa de la unicidad del ciclo límite, en el caso de singularidades en dimensión $n \geq 3$ la situación es incomparablemente más complicada. En el plano las posibles configuraciones de los ω-límites son las dadas por el teorema de Poincaré-Bendixon. En dimensión superior la situación es bien diferente; pensemos, por ejemplo, en la posible existencia de atractores extraños.

Por un atractor se entiende un compacto invariante Λ que posee una órbita densa y cuyo recinto de atracción (conjunto de puntos cuyo ω-límite esta en Λ) tiene interior no vacio. Se dice que un atractor es extraño si contiene una órbita densa con algun exponente de Liapunov positivo (alta sensibilidad respecto a las condiciones iniciales).

La existencia y persistencia (ahora en términios de probabilidad) de atractores extraños es un fenómeno clave para explicar la complicada dinámica asintótica que presentan frecuentemente los sistemas disipativos e introducir así la noción de caos mayoritariamente aceptada. Si tal persistencia se alcanza, resultará fácil detectar numéricamente atractores supuestamente extraños (citemos los atractores de Lorenz [12], Hénon [8], etc). Sin embargo, probar matemáticamente que tales atractores son en efecto extraños (aún más, persistentes) es un problema de gran dificultad. El primer resultado en esta dirección se debe a M. Benedicks y L. Carleson, quienes probaron analíticamente, en un memorable y complejo trabajo [1], que la familia de Hénon $H_{a,b}(x,y) = (1 - ax^2 + y, bx)$ tenía atractores extraños para b suficientemente pequeño y para valores de a próximos a 2 y pertenecientes a un conjunto de medida de Lebesgue positiva. Posteriormente, L. Mora y M. Viana [14] probaron, tal y como había conjeturado J. Palis, que genéricamente cualquier familia uniparamétrica de difeomorfismos sobre una superficie que despliegue una tangencia homoclínica tiene un atractor (ó un repulsor) extraño para valores del parámetro en un conjunto de medida de Lebesgue positiva. (Sobre la abundancia de estas tangencias homoclínicas en función de las dimensiones de Haussdorf de los conjuntos hiperbólicos, recordemos la conferencia de J.C. Yoccoz en este Congreso). Así, cien años mas tarde, los puntos homoclínicos introducidos por Poincaré quedaron rigurosamente vinculados a la presencia de atractores extraños (al caos) y las bifurcaciones homoclínicas (creación y destrucción de puntos homoclínicos) se convierten en el umbral de nuevos fenómenos dinámicos: coexistencia de infinitos atractores periódicos, persistencia de atractores extraños tipo Hénon, etc.

La existencia de infinitos atractores periódicos en un entorno de un punto homoclínico fue probada por S. Newhouse [15] para un conjunto residual de difeomorfismos definidos sobre una variedad bidimensional, contradiciendo así una conjetura de R. Thom, según la cual un difeomorfismo ó un flujo tendría genéricamente un número finito de atractores. En esta comunicación se presenta un nuevo fenómeno no hiperbólico, probado recientemente por A. Pumariño [19]: La coexistencia de infinitos atractores extraños y la persistencia de cualquier cantidad finita, de acuerdo con el siguiente resultado.

Teorema A. *En el conjunto de los campos de vectores tridimensionales que tienen una órbita homoclínica de un punto fijo con autovalores $\lambda > 0$ y $-\lambda \pm i\omega$ tales que $|\lambda/\omega| < 0.3319$, existe una familia uniparamétrica X_a de campos regulares a trozos tales que para todo entorno V de la órbita homoclínica, para cada $k \in \mathbb{N}$ y para todo valor del parámetro a en un conjunto con medida de Lebesgue positiva dependiendo de k, coexisten al menos k atractores extraños contenidos en V. Además, para algún valor del parámetro a existen simultáneamente en V infinitos atractores extraños.*

Los atractores extraños del teorema anterior son generados por una órbita homoclínica de tipo foco-silla justo en el caso resonante, en el que la dinámica cerca de la órbita homoclínica no había sido estudiada. En el caso general (cuando los autovalores del foco-silla son $\lambda > 0$ y $-\rho \pm i\omega$ con $\lambda \neq \rho$), si $\lambda < \rho$ entonces el $\omega-$límite en un entorno suficientemente pequeño de la órbita homoclínica es la propia órbita homoclínica y al destruir ésta aparece a lo sumo un atractor periódico. Si $\lambda > \rho$ entonces existen asociadas al flujo en un entorno de la órbita homoclínica una infinidad de herraduras de Smale acopladas (sub-shift de infinitos símbolos). Ver [24] y el trabajo pionero de L.P. Sil'nikov [20] La destrucción de la órbita homoclínica (bifurcación de Sil'nikov) implica la destrucción de infinitas herraduras y consecuentemente, infinitas bifurcaciones homoclínicas, que pueden generar los atractores extraños de tipo Hénon probados en [14]. Toda esta complejidad (infinitas bifurcaciones, atractores extraños, etc) , de producirse, será un obstáculo para probar la versalidad de un despliegue. Por consiguiente, volviendo a nuestra propuesta inicial de tomar las singularidades como punto de partida para investigar la estructura del conjunto de bifurcación, es natural preguntarse cuál es la singularidad de menor codimensión desde la que se bifurca una órbita homoclínica de tipo foco-silla con la condición abierta $\lambda > \rho$ (incluso $\lambda = \rho$) La cuestión se plantea igualmente para cualquier otra configuración global que despliegue situaciones tan complicadas como la bifurcación de Sil'nikov (configuraciones tipo Lorenz, por ejemplo).

Consideremos, entonces, las singularidades de $\mathbb{R}^3$ con pequeña codimensión que no se reducen mediante el teorema de la variedad central a singularidades en dimensión inferior:

La singularidad de codimensión dos con parte lineal

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

fue estudiada por J. Guckenheimer [7] y P. Holmes [9]. Ambos explicaron como la bifurcación de Sil'nikov podía ocurrir en algunos de sus despliegues, pero posteriormente H. Broer y G. Vegter [4] demostraron que este fenómeno se destruía mediante una perturbación "flat". Por lo tanto,a la hora de buscar singularidades desde las que desplegar genéricamente la configuración de Sil'nikov, recurriremos a las singularidades de codimensión tres con parte lineal

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El 2-jet de estas singularidades dado en forma normal se puede escribir de la forma $y\dfrac{\partial}{\partial x} + z\dfrac{\partial}{\partial y} + (ax^2 + bxy + cxz + dy^2)\dfrac{\partial}{\partial z}$. F. Dumortier y S Ibáñez [5] (veáse tambien [10]) probaron que todas estas singularidades con $a \neq 0$ tienen el mismo tipo topológico, de ahí que nos refiramos a la singularidad nilpotente de codimensión tres. En estos trabajos también se clasifican, en cinco tipos topológicos diferentes, todas las singularidades de codimensión cuatro que resultan de tomar $a = 0$ y para las cuales el 3-jet dado en forma normal,

$$y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (a_{1,2}xy + a_{1,3}xz + a_{2,2}y^2 + \\ a_3x^3 + a_4x^2z + a_5xz^2 + a_6x^2y + a_7xyz + a_8xy)\frac{\partial}{\partial z},$$

verifique $a_{1,2} \neq 0$, $a_3 \neq 0$, además de otras tres desigualdades de formulación mas extensa. Independientemente de que estas tres últimas desigualdades se verifiquen o no, se había probado previamente en [11] la existencia de órbitas homoclínicas de tipo Sil'nikov en todo 4-despliegue genérico de cualquiera de estas singularidades de codimensión cuatro, según se establece en el siguiente resultado:

Teorema B. *Sea X_0 una C^∞-singularidad en $0 \in \mathbb{R}^3$ con un 3-jet C^∞-conjugado a*

$$j_3(X_0) = y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (a_{1,2}xy + a_{1,3}xz + a_{2,2}y^2 + a_3x^3 + ...)\frac{\partial}{\partial z},$$

donde $a_{1,2} \neq 0$ y $a_3 \neq 0$. Entonces la bifurcación de Sil'nikov ocurre en cualquier despliegue genérico X_λ de X_0.

Ahora la cuestión es saber si la bifurcación de Sil'nikov ocurre también en todo despliegue genérico de la singularidad nilpotente de codimensión tres. Nosotros aventuramos que la respuesta es afirmativa; sin embargo veremos en al próxima sección las dificultades para extender a este caso la prueba del teorema anterior.

El resto de la exposición se organiza como sigue: La sección 2 contiene un esquema de la prueba del Teorema B. Para un tratamiento más exhaustivo, ver [11]. En la sección 3 se comentan algunas ideas de la demostración del Teorema A. Véase [19] para todos los detalles.

Agradezco al Comité Organizador del XIV C.E.D.Y.A. todas sus atenciones y la oportunidad para exponer algunos resultados obtenidos recientemente por el Grupo de Sistemas Dinámicos de la Universidad de Oviedo, especialmente, por S.Ibáñez y A.Pumariño. La investigación ha sido financiada por los Proyectos DF-92/35 y DF-93/213-34 de nuestra Universidad.

Dedico al profesor A.Chenciner esta comunicación. Durante nuestro encuentro en Vich reviví aquellas visitas a París, donde me acogía con todo el afecto para iniciarme en la Teoría de la Bifurcación. Parte de esta exposición procede de aquellos días, hace pronto quince años..

2 Bifurcaciones de Sil'nikov en 4-despliegues genéricos de codimensión cuatro

Sea la singularidad de codimensión cuatro cuyo 3-jet en forma normal viene dado por

$$X_0 = y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (a_{1,2}xy + a_{1,3}xz + a_{2,2}y^2 +$$

$$+ a_3x^3 + a_4x^2z + a_5xz^2 + a_6x^2y + a_7xyz + a_8xy)\frac{\partial}{\partial z}$$

con $a_{1,2} \neq 0$ y $a_3 \neq 0$. Cualquier despliegue X_λ de X_0 se puede expresar como una familia de ecuaciones diferenciales del siguiente modo

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= A_1(\lambda) + A_2(\lambda)x + A_3(\lambda)y + A_4(\lambda)z + A_{1,1}(\lambda)x^2 + \\ &\quad + x^3F(\lambda, x) + yG(\lambda, x, y) + zH(\lambda, x, y, z). \end{aligned} \tag{1}$$

donde $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, $A_{1,1}$, F, G y H son C^∞ funciones tales que

(a) $A(0) = 0$, $A_{1,1}(0) = 0$ y $F(0,0) = a_3$,

(b) $G(\lambda, 0) = H(\lambda, 0) = 0$,

(c) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(0) = a_{1,2}, \dfrac{\partial G}{\partial y}(0) = a_{2,2}$,

(d) $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0) = a_{1,3}, \dfrac{\partial H}{\partial y}(0) = \dfrac{\partial H}{\partial z}(0) = 0$.

Puesto que $a_3 \neq 0$, podemos suponer $a_3 = 1$. El caso $a_3 = -1$ no aporta ninguna diferencia.

Impongamos al despliegue la condición genérica $DA(0) \neq 0$. Mediante el teorema de preparación de Malgrange y algunos cambios de variable (blow-up,etc) se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1 *Las bifurcaciones que ocurren, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y para $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ próximo a $\sigma = 0$, en el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= y + o(\epsilon), \\ y' &= z + x - \tfrac{1}{2}x^2 + o(\epsilon), \\ z' &= \sigma_1 x - z + \sigma_2 z + \sigma_3 x^2 + \\ &\quad + \epsilon\left\{(1 - \tfrac{1}{2}\overline{a}_{1,3})x^3 + \overline{a}_{2,2}y^2 + \overline{a}_{1,3}xz + \overline{a}_{1,3}x^2\right\} + o(\epsilon), \end{aligned} \tag{2}$$

donde los términos en $o(\epsilon)$ son cero cuando $x = y = z = 0$, ocurren también en la familia (1)

El punto de equilibrio de (2) en $x = y = z = 0$ es un foco-silla si y solo si $\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27} > 0$, con $b = \frac{1}{27}\left\{2(1 - \sigma_2)^3 + 9(1 - \sigma_2) + 27(\sigma_2 - \sigma_1 - 1)\right\}$ y

$a = -\frac{1}{3}\{3 + (1-\sigma_2)^2\}$. Además, si se satisface la condición $\sigma_1 > -4\sigma_2 + 6\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$ en un entorno de $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, entonces el foco-silla verifica las hipotésis de Sil'nikov $\lambda > \rho > 0$. Sea S el conjunto de los pares (σ_1, σ_2) que satisfacen estas condiciones y definamos el conjunto de parámetros $\widetilde{S} = \left\{\lambda = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \epsilon) \in \mathbb{R}^4 : (\sigma_1, \sigma_2) \in S, \epsilon > 0\right\}$. A continuación probaremos la existencia de una variedad $M \subset \mathbb{R}^4$ que interseca a $\widetilde{S}$ y tal que si $\lambda \in M$, entonces el sistema (2) tiene una órbita homoclínica en el origen.

El sistema (2) es del tipo

$$u' = F(u) + G(\lambda, u) \tag{3}$$

con $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \epsilon) \in \mathbb{R}^4$ y tal que

(H1) F y G son C^∞ y $F(0) = G(\lambda, 0) = G(0, u) = 0$. (4)
(H2) $u = 0$ es un punto hiperbólico de $u' = F(u)$ tal que $Spectrum DF(0) = \{-1, -1, 1\}$ y $Rank(DF(0) + I) = 2$.
(H3) El sistema $u' = F(u)$ tiene una órbita homoclínica $\Gamma = U^+(0) \cap U^-(0)$, donde $U^+(0)$ y $U^-(0)$ son, respectivamente, las variedades estable e inestable de $u = 0$. Esta conexión está contenida en el plano $z = 0$, viene dada por $2x^2 - 2y^2 - x^3/3 = 0$ y está parametrizada por la solución $p(t) = (12e^t(1+e^t)^{-2}, 12e^t(1-e^t)(1+e^t)^{-3}, 0)$.

Haciendo el cambio de variable $u(t) = p(t) + v(t)$ se obtiene la ecuación variacional

$$v'(t) = DF(p(t))v(t) + b(\lambda, t, v(t)), \tag{5}$$

donde $b(\lambda, t, v(t)) = F(p(t)+v(t)) - F(p(t)) - DF(p(t))v(t) + G(\lambda, p(t)+v(t))$.

Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de la ecuación lineal homogénea

$$v'(t) = DF(p(t))v(t), \tag{6}$$

entonces las soluciónes de la ecuación(5) satisfacen la siguiente ecuación integral

$$
\begin{aligned}
v(t) &= H(b(\lambda, t, v(t))) \\
&= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}v(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}b(\lambda, s, v(s))ds \\
&= c_1 f(t) + f(t)\int_0^t [\det \Phi(s)]^{-1}\, [q(s) \wedge r(s)]\, b(\lambda, s, v(s))ds \\
&+ c_2 q(t) + q(t)\int_0^t [\det \Phi(s)]^{-1}\, [r(s) \wedge f(s)]\, b(\lambda, s, v(s))ds \\
&+ c_3 r(t) + r(t)\int_0^t [\det \Phi(s)]^{-1}\, [f(s) \wedge q(s)]\, b(\lambda, s, v(s))ds,
\end{aligned} \tag{7}
$$

donde $f(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ son las columnas de $\Phi(t)$, es decir, soluciones linealmente independientes de (6). Por ello, buscaremos las condiciones bajo las cuales el operador integral H en (7) deja invariante el espacio $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ de las funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ y probaremos la existencia de funciones en $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ que son soluciones de (7). Estas soluciones definen órbitas homoclínicas del sistema inicial $u' = F(u) + G(\lambda, u)$.

Si $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ representa el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ cuyas derivadas hasta orden k existen y son continua y acotada en $\mathbb{R}$, entonces el operador lineal

$$
\begin{gathered}
L : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \longmapsto C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \\
(Lv)(t) = v'(t) - DF(p(t))v(t),
\end{gathered}
$$

es un operador de Fredholm de índice cero y su rango viene dado por

$$
\mathcal{R}(L) = \left\{ b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) : \int_{-\infty}^{\infty} e^t\, [r(t) \wedge f(t)]\, b(t)dt = 0 \right\}.
$$

Obsérvese que $\mathcal{R}(L) \simeq C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)/KerL = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)/\langle f \rangle$ y para toda clase de equivalencia $[u] = \left\{ u + \lambda f : u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ existe un único elemento $u + \lambda f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tal que $u(0) + \lambda f(0)$ es ortogonal a $f(0)$.

Sea $C^1_\omega = \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) : u(0) \text{ es ortogonal a } f(0) \right\}$, entonces podemos definir el operador lineal acotado $\mathcal{K} : \mathcal{R}(L) \longmapsto C^1_\omega$ que lleva $b \in \mathcal{R}(L)$ en la solución $\mathcal{K}b$ de la ecuación $v'(t) = DF(p(t))v(t) + b(t)$ tal que $\mathcal{K}b(0)$ es ortogonal a $f(0)$. Nótese que $\mathcal{K}$ es un operador continuo, puesto que es el inverso del operador lineal acotado y biyectivo $L\mid_{C^1_\omega}: C^1_\omega \longmapsto \mathcal{R}(L)$.

Definamos ahora la proyección continua

$$\begin{aligned} P &: C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \longmapsto C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \\ Pb &= A^{-1}k(s)^T \int_{-\infty}^{\infty} k(s)b(s)ds, \end{aligned}$$

con $k(s) = e^s\left[r(s) \wedge f(s)\right]$, $k(s)^T$ su traspuesta y $A = \int_{-\infty}^{\infty} k(s)k(s)^T ds$. Puesto que $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(I-P)$, se puede probar el siguiente resultado:

Lema 2.1 *Si $b(t) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$, entonces la ecuación $v' = DF(p(t))v + b(t)$ tiene solución en $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ si y sólo si $Pb = 0$. Además, si $Pb = 0$, hay una única solución $\mathcal{K}b$ con valor inicial ortogonal a $f(0)$ y*

$$\mathcal{K} : (I-P)C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \longmapsto C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$$

es continuo y lineal.

Definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &: \mathbb{R}^4 \times C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \longmapsto \mathbb{R} \times C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \\ \mathcal{H}(\lambda, v) &= (\overline{P}b_\lambda(v), v - \mathcal{K}(I-P)b_\lambda(v)), \end{aligned}$$

con el operador $b_\lambda : v \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \longmapsto b(\lambda,\cdot,v(\cdot))$ según (5) y con $\overline{P}b_\lambda(v) = \int_{-\infty}^{\infty} k(s)b(\lambda,s,v(s))ds$. Obsérvese que b_λ es continuamente diferenciable y que $Db_\lambda(0)h = DG(\lambda,p(\cdot))h$. Las órbitas homoclínicas de nuestro sistema inicial (3) vienen dadas, para cada valor de λ, por las soluciones de la ecuación $\mathcal{H}(\lambda,v) = 0$. Entonces, puesto que $\mathcal{H}(0,0) = 0$ y $Db_0(0) \equiv 0$, sólo necesitamos suponer que

$$\frac{d}{d\lambda}\overline{P}b_\lambda(0) \mid_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} k(s)G(\lambda,p(s))ds \mid_{\lambda=0} \neq 0,$$

con el fin de aplicar la reducción de Lyapunov-Schmidt y obtener el siguiente resultado:

Teorema 2.1 *Si la familia de ecuaciones diferenciales dada por (3) verifica $(c_1,c_2,c_3,c_4) \neq 0$, donde*

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} e^s\left[r(s) \wedge f(s)\right] \frac{\partial G}{\partial \lambda_i}(0,p(s))ds,$$

entonces tiene una órbita homoclínica para cada valor del parámetro λ perteneciente a una variedad regular M cuyo espacio tangente en $\lambda = 0$ viene dado por $\sum_{i=1}^{4} c_i \lambda_i = 0$.

Para concluir que la variedad M del teorema anterior interseca al conjunto $\widetilde{S} = \left\{ \lambda = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \epsilon) \in \mathbb{R}^4 : (\sigma_1, \sigma_2) \in S, \epsilon > 0 \right\}$ en todo entorno de $\lambda = 0$, lo que prueba el Teorema B, es suficiente comprobar que $c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^t \varphi(t) p_1(t)^2 dt \neq 0$, donde $\varphi(t) = -\int_t^{\infty} p_2(s) e^{-s} ds$ y p_i denota la correspondiente componente de $p(t) = (12e^t(1+e^t)^{-2}, 12e^t(1-e^t)(1+e^t)^{-3}, 0)$.

La dificultad para demostrar, siguiendo los argumentos anteriores, un resultado análogo al Teorema B que estableciese la existencia de bifurcaciones de Sil'nikov en todo despliegue genérico de la singularidad nilpotente de codimensión tres, radica en la Proposición 2.1. Sería necesario encontrar cambios de variable que transformasen los despliegues de la singularidad en una familia del tipo (3) verificando hipótesis similares a las dadas en (4)

3 Coexistencia y persistencia de atractores extraños

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= -\rho x + \omega y + P_\mu(x, y, z) \\ y' &= -\omega x - \rho y + Q_\mu(x, y, z) \\ z' &= \quad \lambda z + S_\mu(x, y, z), \end{aligned} \tag{8}$$

donde ρ, λ y ω son números reales positivos y P_μ, Q_μ y S_μ son aplicaciones suficientemente regulares, tanto respecto a las variables como al parámetro μ, que se anulan, junto con sus derivadas de primer orden, en el origen θ. En realidad, bajo hipótesis de linealización (o a propósito) podemos suponer que P_μ, Q_μ y S_μ son nulas en un entorno U de θ. En este caso el flujo en U viene dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\rho t}(x_0 \cos \omega t + y_0 \operatorname{sen} \omega t) \\ y(t) &= e^{-\rho t}(-x_0 \operatorname{sen} \omega t + y_0 \cos \omega t) \\ z(t) &= z_0 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Después de un reescalado del tiempo podemos suponer $\omega = 1$.

Tomemos el rectángulo

$$\Pi_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, de^{-2\pi\rho} \le y \le d, 0 < z \le e^{-\pi\lambda}\right\},$$

con $d = 2(1+e^{-2\pi\rho})^{-1}$ para que (0,1,0) sea el punto medio de la base de Π_0. Reescalemos tambien los ejes cartesianos, si fuese preciso, para que tanto Π_0 como todas las órbitas que partan de él permanezcan en U hasta rebasar el plano $\Pi_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\right\}$. De este modo el flujo lineal en U define la aplicación

$$\begin{gathered} \mathcal{L} : \Pi_0 \longmapsto \Pi_1 \\ \mathcal{L}(y,z) = (yz^{\rho/\lambda}\operatorname{sen}(\tfrac{1}{\lambda}\log\tfrac{1}{z}), yz^{\rho/\lambda}\cos(\tfrac{1}{\lambda}\log\tfrac{1}{z})), \end{gathered}$$

donde hemos obviado la componente $x = 0$ en Π_0 y la componente $z = 1$ en Π_1. Obsérvese que si definimos

$$R_m = \left\{(x,y,z) \in \Pi_0 : e^{-(2m+1)\pi\lambda} \le z \le e^{-(2m-1)\pi\lambda}\right\},$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $\Pi_0 = \cup_{m\in\mathbb{N}} R_m$, $\mathcal{L}$ lleva las dos bases de R_m sobre la misma recta y $\mathcal{L}(R_m)$ se aproxima a (0,0,1) a medida que m crece.

Elijamos ahora P_0, Q_0 y S_0 de modo que el campo en (8) tenga una órbita homoclínica Γ_0. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que pasa por los puntos (0,1,0) y (0,0,1). Asociado al flujo en un entorno de esta órbita, incluso para $\mu \neq 0$ suficientemente pequeño, podemos definir un difeomorfismo $\mathcal{R}_\mu$ de un entorno del punto (0,0,1) en el plano Π_1 a un entorno V_0 del punto (0,1,0) en el plano $x = 0$. Olvidando de nuevo las coordenadas $z = 1$ y $x = 0$, este difeomorfismo se puede expresar de la forma

$$\mathcal{R}_\mu(x,y) = (1 + c_1x + c_2y, \mu + c_3x + c_4y) + t.o.s.$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes reales y μ es un parámetro que despliega genéricamente la tangencia homoclínica.

En definitiva, para $\tilde{\Pi}_0 = \cup_{m>N} R_m$ con N suficientemente grande, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} &T_\mu = \mathcal{R}_\mu \circ \mathcal{L} : \tilde{\Pi}_0 \longmapsto V_0 \\ &T_\mu(y,z) = (1 + c_1yz^{\rho/\lambda}\operatorname{sen}(\lambda^{-1}\log z^{-1}) + c_2yz^{\rho/\lambda}\cos(\lambda^{-1}\log z^{-1}), \\ &\qquad \mu + c_3yz^{\rho/\lambda}\operatorname{sen}(\lambda^{-1}\log z^{-1}) + c_4yz^{\rho/\lambda}\cos(\lambda^{-1}\log z^{-1})), . \end{aligned}$$

que describe la dinámica en un entorno de la órbita homoclínica Γ_0.Como se puede ver en [20] y [24],esta dinámica local no depende de $\mathcal{R}_\mu$ cuando $\lambda \neq \rho$, sin embargo, puesto que estudiaremos el caso $\lambda = \rho$, los valores de las constantes c_i resultan esenciales. Tomaremos $\mu = c_2 = c_3 = 0, c_1 = -1, c_4 = a$ y probaremos que la familia

$$T_{\lambda,a}(y,z) = \left(1 + yz\,\mathrm{sen}(\lambda^{-1}\log z), ayz\cos(\lambda^{-1}\log z)\right),$$

tiene atractores extraños que son persistentes en el sentido de la medida. Para ello necesitamos efectuar primero algunas renormalizaciones

Por medio de las nuevas coordenadas $\eta = y$ y $\xi = \lambda^{-1}\log z$, Π_0 se convierte en la banda vertical

$$B = \left\{(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2e^{-2\pi\lambda}}{1+e^{-2\pi\lambda}} \leq \eta \leq \frac{2}{1+e^{-2\pi\lambda}}, \xi < -\pi\right\},$$

y cada rectángulo R_m se transforma en un nuevo rectángulo

$$R'_m = \{(\eta,\xi) \in B : -(2m+1)\pi \leq \xi \leq -(2m-1)\pi\}.$$

La aplicación $T_{\lambda,a}$ viene dada por

$$T_{\lambda,a}(\eta,\xi) = \left(1 + \eta e^{\lambda\xi}\,\mathrm{sen}\,\xi, \xi + \frac{1}{\lambda}(\log a + \log\eta + \log\cos\xi)\right),$$

y sólo está definida en

$$C_m = \{(\eta,\xi) \in R'_m : -(2m+1/2)\pi < \xi < -(2m-1/2)\pi\},$$

para $m > N$. Dentro de este conjunto existe un rectángulo invariante, de acuerdo con el siguiente resultado

Proposición 3.1 *Para cada* $\lambda > 0$ *existe* $a_1(\lambda) > 1$ *y* $m_0 = m_0(\lambda, a_1(\lambda)) \in \mathbb{N}$ *tal que, si* $a \in (1, a_1(\lambda))$ y $m > m_0$, *entonces existe un rectángulo* $S_m \subset C_m$ *verificando* $T_{\lambda,a}(S_m) \subset S_m$.

Introduciendo en cada S_m las nuevas coordenadas $x = \xi + 2\pi m$ e $y = (\eta - 1)e^{\pi\lambda m}$, las aplicaciones $T_{\lambda,a}$ vienen dadas por

$$T_{\lambda,a,b}(x,y) = (f_{\lambda,a}(x) + \frac{1}{\lambda}\log(1+\sqrt{b}y), \sqrt{b}(1+\sqrt{b}y)e^{\lambda x}\,\mathrm{sen}\,x),$$

con $b = e^{-2\pi\lambda m}$ y

$$f_{\lambda,a}(x) = \frac{1}{\lambda}\log a + x + \frac{1}{\lambda}\log\cos x,$$

y cada S_m se convierte en un nuevo rectángulo U_m tal que $T_{\lambda,a,b}(U_m) \subset U_m$.

A continuación, para poder seguir los pasos en [1] y [14], es imprescindible conocer si la familia $T_{\lambda,a,b}$ es un "buen" despliegue de la familia unimodal $f_{\lambda,a}$ (o mejor de $\Psi_{\lambda,a} = (f_{\lambda,a}, 0)$) del mismo modo que las familias tipo Hénon introducidas en [14] son un "buen" despliegue de la familia cuadrática $f_a(x) = 1 - ax^2$. Con este propósito se establece el próximo resultado.

Sea

$$DT_{\lambda,a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.2 *Existe una constante $K = K(\lambda) > 0$ tal que, para todo $(a,x,y) \in \widetilde{D} = (1,\infty) \times U_m$, se verifica:*
(a) $|A| \leq K, |B| \leq K\sqrt{b}, |C| \leq K\sqrt{b},\ |D| \leq Kb, |\det DT_{\lambda,a,b}| \leq Kb.$
(b) $\left\|D_{(a,x,y)}A\right\| \leq K, \left\|D_{(a,x,y)}B\right\| \leq K\sqrt{b}, \left\|D_{(a,x,y)}C\right\| \leq K\sqrt{b}, \left\|D_{(a,x,y)}D\right\| \leq K\sqrt{b}.$
(c) $\left\|D^2_{(a,x,y)}A\right\| \leq K, \left\|D^2_{(a,x,y)}B\right\| \leq K\sqrt{b}, \left\|D^2_{(a,x,y)}C\right\| \leq K\sqrt{b}, \left\|D^2_{(a,x,y)}D\right\| \leq K\sqrt{b}.$
(d) Denotando $T_{\lambda,a}(a,x,y) = T_{\lambda,a,b}(x,y)$ y $\Psi_\lambda(a,x,y) = (f_{\lambda,a}(x), 0)$, entonces

$$\|T_{\lambda,b} - \Psi_\lambda\|_{C^3(\widetilde{D})} \leq K\sqrt{b}.$$

Esta proposición (compárese con el Teorema 2.1 en [14]) aporta las estimaciones necesarias para iniciar la demostración del que es una reformulación del Teorema A en términos de la familia $T_{\lambda,a}$.

Teorema 3.3 *Fijado $0 < \lambda < 0.3319$, para todo $m_0 \in \mathbb{N}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $E = E(k)$ de valores del parámetro, con medida de Lebesgue positiva, tal que para todo $a \in E$ existen al menos k transformaciones $T_{\lambda,a,b}$, con $b < e^{-2\pi\lambda m_0}$, que tienen un atractor extraño. Además, existen valores del parámetro a para los cuales infinitas $T_{\lambda,a,b}$ tienen simultáneamente un atractor extraño.*

La prueba de este teorema es extremadamente laboriosa y se desarrolla en [19] con todo detalle. En realidad consiste en una cuidadosa adaptación para cada $T_{\lambda,a,b,}$, con b suficientemente pequeño, del complicado esquema inductivo introducido en [1] para la familia de Hénon y posteriormente reelaborado en [14]. La familia $f_{\lambda,a}$ no es ahora la familia cuadrática que se despliega en [1] y [14], por lo tanto, los centenares de enunciados y argumentos atados a una tortuosa linea inductiva son revisados a lo largo de más de trescientas páginas. Numerosas acotaciones justificadas para la familia cuadrática tienen que ser comprobadas para la bien diferente familia $f_{\lambda,a}$. Por ejemplo, la hipótesis $0< \lambda < 0.3319$ es una condición técnica necesaria para obtener derivada Schwarziana negativa y de ahí, la ausencia de atractores periódicos de $f_{\lambda,a}$, que impedirían concluir la existencia de los atractores extraños. La coexistencia de estos atractores se sigue mediante un argumento sencillo de compacidad. La existencia simultánea de dos atractores fue verificada también numéricamente en [19].

Puesto que la familia $f_{\lambda,a}$ no aporta ninguna propiedad especial a la demostración del Teorema 3.3, este resultado se puede extender a cualquier familia de difeomorfismos que despliegue adecuadamente (verificando la proposicion 3.2) otra familia de aplicaciones unimodales. Esta puede ser la situación en algunas experimentaciones numéricas que detectan posibles atractores extraños; véase, por ejemplo [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] M.Benedicks y L. Carleson. *The dynamics of the Hénon aplication.* Ann. Math. **133**, (1991).

[2] R. Bogdanov. *Versal deformation of a singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues.* Seminar Petrovski (1976). Selecta Math. Soviet.**1**, (1989).

[3] M. Bosch and C. Simó. *Attractor in a Sil'nikov-Hopf scenario and a related one-dimensional map.* Physica-D.**62**, (1993).

[4] H. Broer y G. Vegter. *Subordinate Sil'nikov bifurcations near some singularities of vector fields having low dimension.* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **14**, (1984).

[5] F. Dumortier y S. Ibáñez. *Nilpotent singularities in generic 4-parameter families of 3-dimensional vector fields*. Jour. Diff. Eq. (aparecerá).

[6] F. Dumortier, R. Roussarie y J. Sotomayor. *Generic 3-parameter families of planar vector fields unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case.* Ergodic. Th. & Dynam. Sys. **62**, (1987).

[7] J. Guckenheimer. *On a codimension two bifurcation.* Lecture Notes in Mathamatics **898**. Springer-Verlag (1981).

[8] M. Hénon. *A two- dimensional mapping with a strange attractor.* Comm. Math. Phys. **50**, (1976).

[9] P.J. Holmes. *A strange family of three-dimensional vector fields near a degenerate singularity.* Jour. Diff. Eq. **37**, (1980).

[10] S. Ibáñez. *Singularidades nilpotentes de campos vectoriales en* $\mathbb{R}^3$. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo. (1994).

[11] S. Ibáñez y J.A. Rodríguez. *Sil'nikov bifurcation in generic 4-unfoldings of a codimension-4 singularity.* Jour. Diff. Eq **120**, (1995).

[12] E.N. Lorenz. *Deterministic non-periodic flow.* Jour. Atmos. Sci. **20**, (1963).

[13] R. Mañé. *A proof of the* C^1 *stability conjecture.* Publ. Math. I.H.E.S. **66,** (1988).

[14] L. Mora y M. Viana. *Abundance of strange attractors.* Acta Math. **171**, (1993).

[15] S. Newhouse. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks.* Topology **13,** (1974).

[16] J. Palis y W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems.* Springer-Verlag (1982).

[17] J. Palis y F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge University Press. (1993).

[18] M. Peixoto. *Structutal stability on two-manifolds.* Topology **1**, (1962).

[19] A. Pumariño. *Coexistencia con probabilidad positiva de mas de un atractor extraño.* Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo. (1994).

[20] L.P. Sil'nikov. *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions.* Sov. Math. Dokl. **6**, (1965).

[21] J. Sotomayor. *Generic one-parameter families of flows on two-manifolds.* Publ. Mayh. I.H.E.S. **43**, (1974).

[22] F. Takens. *Singularities of vector fields.* Publ. Math. I.H.E.S. **43,** (1974).

[23] F. Takens. *Forced oscillations and bifurcations.* Appl. of Global Anal. **1**, Comm. of Math. Inst. Rijksuniv, Utrech, **3**, (1974).

[24] C. Tresser. Modèles simples de transitions vers la turbulence. These d'Etat. Universitè de Nice. (1981).