SOLUCIONES ACOTADAS Y CUASIPERIÓDICAS DE UN OSCILADOR ASIMÉTRICO

Rafael Ortega
Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad de Granada, 18071 Granada

Consideramos la ecuación diferencial

$$y'' + ay^+ - by^- = 1 + \epsilon p(t) \tag{1}$$

donde y^+, y^- representan las funciones parte positiva y negativa de y; es decir,

$$y^+ = \max(y, 0), \quad y^- = \min(-y, 0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Las constantes a, b y ϵ son positivas y la función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica con periodo T.
La ecuación es lineal cuando a y b coinciden ($a = b$) y representa al modelo tradicional de oscilador forzado. Si a y b son distintos ($a \neq b$) la ecuación es no lineal y se puede pensar como un modelo de oscilador asimétrico en el que la fuerza recuperadora cumple la ley de Hooke con diferentes constantes que dependen de la dirección.
La ecuacion (1) aparece como una simplificación de la ecuación en derivadas parciales propuesta en [1] para modelar las oscilaciones de un puente en suspensión. En dicho modelo se tienen en cuenta los efectos no lineales inducidos por el hecho de que los cables sólo ejercen fuerza cuando están tensos. La práctica ha demostrado que estos puentes pueden estar sometidos a grandes oscilaciones aun cuando las fuerzas exteriores sean pequeñas. En la teoría lineal este fenómeno se ha explicado a partir de la resonancia que se produce en ciertos valores de los parámetros. En concreto, para la ecuación (1) es bien sabido que si

$$a = b = (\frac{2\pi n}{T})^2$$

para algún $n = 1, 2, \cdots$ y además

$$\mid \int_0^T p(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} \ dt \mid + \mid \int_0^T p(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} \ dt \mid > 0$$

entonces todas las soluciones de (1) oscilan con una amplitud que crece con el tiempo de modo ilimitado. En esta exposición veremos que este fenómeno no se traslada al caso no lineal y que si $a \neq b$ y ϵ es pequeño entonces todas las soluciones de (1) son acotadas. Además, mostraremos que la dinámica de (1) en un entorno del infinito está inducida por un difeomorfismo con torsión ("twist"). Este hecho implica la existencia de un gran número de oscilaciones subarmónicas y cuasiperiódicas con amplitud grande. La discusión será en ocasiones informal. Los aspectos más técnicos y las demostraciones se encuentran en [3].

La ecuación (1) entra dentro de la clase de osciladores forzados del tipo

$$y'' + g(y) = f(t) \tag{2}$$

donde f es periódica y $g(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. En los años sesenta Littlewood propuso el estudio del problema de acotación para esta esta clase de ecuaciones y más tarde Morris probó en [2] que todas las soluciones están acotadas en el caso concreto de la ecuación de Duffing con $g(y) = 2y^3$. La técnica de demostración de Morris está basada en el hecho de que la aplicación de Poincaré asociada a la correspondiente ecuación (2) tiene "torsión en infinito". Esta propiedad permite aplicar el Teorema Twist de Moser y obtener una familia expansiva de curvas invariantes en el plano (y, y'). Cada una de estas curvas determina una región invariante e impide que las soluciones que quedan dentro en el inicio puedan escapar hacia infinito. La técnica de Morris ha sido modificada y extendida por varios autores, pero en todas las extensiones se requiere una regularidad considerable para la función g; al menos $g \in C^4$. Esto hace que dicha técnica no sea aplicable en el caso de (1) a menos que se haga uso de una sección transversal diferente a la usual.

Referencias

[1] A.C. Lazer, J.P. McKenna, Large-amplitude oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. SIAM Rev. 32 (1990), 537-578.

[2] G.R. Morris. A case of boundedness in Littlewood's problem on oscillatory differential equations. Bull. Australian Math. Soc. 14 (1976), 71-93.

[3] R. Ortega. Asymmetric oscillators and twist mappings. Aparecerá en Journal London Math. Soc.