TEORIA ERGODICA PARA SISTEMAS LINEALES BIDIMENSIONALES

Rafael Obaya

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería, E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid, Paseo del Cauce s/n, 47011 Valladolid.

En esta conferencia exponemos algunas propiedades dinámicas del flujo proyectivo continuo o discreto inducido por una familia de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias lineales. Dichas propiedades se corresponden con un comportamiento cualitativo específico de las soluciones de las ecuaciones consideradas.

El comportamiento dinámico del flujo queda determinado por la estructura de sus conjuntos invariantes. Con frecuencia se emplean técnicas de dinámica topológica en la caracterización de los subconjuntos minimales. La teoría ergódica se ocupa del estudio de las medidas invariantes y los subconjuntos en los que éstas están concentradas. El teorema espectral de Sacker-Sell o el teorema ergódico multiplicativo de Osedelec son resultados bien conocidos que se ajustan a los enfoques anteriores. En ambos casos se obtiene una descomposición del fibrado proyectivo en una suma continua o medible de subfibrados invariantes con dinámica más simple. Dichos subfibrados guardan relación con los exponentes de Lyapunov del sistema (que miden el crecimiento exponencial de las soluciones). Cuando varios exponentes coinciden en un mismo valor la información contenida en estos teoremas es incompleta.

Sea Ω un espacio métrico compacto en el que tenemos definido un flujo continuo Ξ que representamos por $\xi{\cdot}t = \Xi(\xi, t)$. Dada una función continua $S : \Omega \to L(\mathbb{R}^2)$ de traza cero, consideramos la familia de sistemas lineales bidimensionales

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} a(\xi{\cdot}t) & b(\xi{\cdot}t) \\ c(\xi{\cdot}t) & -a(\xi{\cdot}t) \end{pmatrix} \mathbf{z} = S(\xi{\cdot}t)\mathbf{z}, \quad \xi \in \Omega, \tag{1}$$

sus soluciones permiten definir un flujo en el fibrado $V_{\mathbb{C}} = \Omega \times \mathbb{C}^2$ ($V_{\mathbb{R}} = \Omega \times \mathbb{R}^2$) que por linealidad en las fibras puede ser trasladado al fibrado proyectivo $K_{\mathbb{C}} = \Omega \times P^1(\mathbb{C})$ ($K_{\mathbb{R}} = \Omega \times P^1(\mathbb{R})$) con aplicación flujo Φ.

Nuestro objetivo es determinar el número y propiedades de las medidas invariantes para el flujo proyectivo. Esto nos permite deducir una clasificación completa de los sistemas lineales bidimensionales del tipo (1) desde un punto de vista ergódico. Dicha clasificación resulta especialmente relevante cuando el exponente de Lyapunov del sistema es nulo.

Consideramos inicialmente una partición de Ω en componentes ergódicas y fijamos una medida ergódica m_0. El símbolo $m_1 = m_0 \otimes r_1$ representa la medida producto en la correspondiente σ-álgebra completa. Nos referimos a dinámica absolumente continua cuando existen medidas invariantes para el flujo que son absolutamente continuas respecto de la medida producto y a dinámica singular cuando todas las medidas invariantes son singulares.

Precisamos a continuación algunos conceptos básicos.

Sea μ una medida invariante para Φ, absolutamente continua respecto de m_1, con $d\mu = p\,dm_1$. Decimos que μ es una *medida invariante lineal* si existen funciones medibles C_1, C_2,

$C_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ y un subconjunto invariante Ω_0 con $m_0(\Omega_0) = 1$ con

$$p(\xi, \varphi) = (C_1(\xi)\cos^2\varphi + C_2(\xi)\sin^2\varphi + 2\,C_3(\xi)\sin\varphi\cos\varphi)^{-1}$$

para todo $(\xi, \varphi) \in \Omega_0 \times P^1(\mathbb{R})$.

Los siguientes subconjuntos invariantes son importantes en el desarrollo de la teoría.

Sea M un subconjunto invariante de $K_{\mathbb{C}}$, y $\pi : M \to \Omega$ la proyección en la base. Decimos que M es una *k-lámina medible* con respecto a m_0 si existe un subconjunto invariante $\Omega_0 \subset \Omega$ con $m_0(\Omega_0) = 1$ tal que

(i) $\mathrm{card}\,(\pi^{-1}(\xi)) = k$ para todo $\xi \in \Omega_0$.

(ii) La función que lleva $\xi \in \Omega_0$ en $\pi^{-1}(\xi) = \{(\xi, Z_1(\xi)), (\xi, Z_2(\xi)), \ldots, (\xi, Z_k(\xi))\}$ es medible.

A partir de una k-lámina medible M se puede definir en $K_{\mathbb{C}}$ una medida invariante puramente discontinua μ que proyecta en m_0 y verifica $\mu(M) = 1$ mediante la relación

$$\int_{K_{\mathbb{C}}} g\, d\mu = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega} g(\xi, Z_j(\xi))\, dm_0, \quad \forall g \in C(K_{\mathbb{C}}).$$

Decimos que M es una *k-lámina ergódica* con respecto a m_0 si μ es la única medida invariante en $K_{\mathbb{C}}$ que proyecta en m_0 y está concentrada en M. Para $k = 1$ nos referimos simplemente a M como una *lámina ergódica*.

Un teorema clásico incluido en Furstenberg [1] caracteriza las medidas ergódicas en $K_{\mathbb{R}}$ cuando se tiene previamente una medida invariante absolutamente continua. En Obaya-Paramio [6] se obtienen condiciones necesarias y suficientes que garantizan la existencia de tales medidas. Además en Novo-Obaya [4] se asegura la existencia de medidas invariantes lineales en el caso absolutamente continuo y se comprueba que dichas medidas se pueden construir directamente a partir de las componentes ergódicas del flujo. Combinando estos resultados es sencillo deducir que si μ es una medida invariante absolutamente continua entonces verifica una de las dos opciones siguientes:

(a.1) μ es ergódica lo que implica que es una medida invariante lineal y además la única medida invariante proyectando en m_0.

(a.2) μ no es ergódica y toda medida ergódica en $K_{\mathbb{R}}$ que proyecta en m_0 está concentrada en una k-lámina ergódica.

En el caso singular son posibles las tres opciones siguientes:

(b.1) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una única medida ergódica concentrada en una lámina ergódica.

(b.2) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite dos medidas ergódicas, cada una de ellas concentrada en una lámina ergódica.

(b.3) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una única medida ergódica concentrada en una 2-lámina ergódica.

Algunos de los modelos anteriores no se pueden presentar en los sistemas lineales periódicos lo que descarta la existencia de una teoría de Floquet aplicable a las ecuaciones correspondientes. Novo-Obaya [5] demuestran que éste es además el comportamiento genérico en clases muy amplias de sistemas lineales bidimensionales con exponente de Lyapunov nulo.

Recordamos que R. Johnson da en [2] una clasificación completa de los sistemas lineales del tipo (1) basada en argumentos topológicos y existe una relación directa entre alguno de los casos considerados en ambas clasificaciones. La conexión entre resultados de naturaleza espectral y ergódica es relevante en esta teoría. (Véanse [3, 6].)

Referencias

1. H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformations of the torus*, Amer. J. Math. **85** (1983), 573-601.
2. R. Johnson, *On a Floquet theory for almost-periodic, two-dimensional linear systems*, J. Differential Equations **37** (1980), 184-204.
3. S. Kotani, *Lyapunov indices determine absolutely continuous spectrum of stacionary random 1-dimensional Schrödinger equations*, Proc. of Taniguchi Sympos., S.A. Katata (1982) 225-247.
4. S. Novo y R. Obaya, *An ergodic classification of bidimensional linear systems*, Univ. de Valladolid (1994).
5. S. Novo y R. Obaya, *Bidimensional linear systems with singular dynamics*, aparecerá publicado en Proc. Amer. Math. Soc.
6. R. Obaya y M. Paramio, *Directional differentiability of the rotation number for the almost-periodic equation*, Duke Math. J. **66** (1992) 521-552.