INESTABILIDADES MAGNETOHIDRODINÁMICAS Y MANCHAS SOLARES

Manuel Núñez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Valladolid

1 Introducción

La Magnetohidrodinámica (MHD) estudia el comportamiento de los fluidos provistos de carga eléctrica. Constituye la descripción matemática más asequible del comportamiento de un plasma, y como tal resulta de gran interés en Astrofísica (para el estudio de la generación de los campos magnéticos de planetas y estrellas) y en la teoría de la fusión nuclear por confinamiento magnético. Si bien es cierto que la Magnetohidrodinámica es un modelo simplificado de un fenómeno muy complejo, obtenido simplificando las ecuaciones de Maxwell-Boltzmann para el estudio macroscópico de procesos de baja frecuencia, varios de los resultados previstos por este modelo han sido posteriormente comprobados experimentalmente, y parece ser que en las condiciones habituales del plasma real (que constituye más del 90% de la masa visible del universo), la Magnetohidrodinámica es una herramienta fiable. Las ecuaciones de la MHD constituyen un problema analítico de primera magnitud, y aparte del reto matemático que suponen, cualquier resultado acerca del comportamiento de las soluciones puede mostrarse valioso en nuestra comprensión de fenómenos como la inversión periódica del campo magnético terrestre, los ciclos de irradiación solar (y su influencia en el clima), y la posibilidad de mantener confinado un plasma a la suficiente densidad y temperatura para que se inicien reacciones de fusión, lo que sería de enorme importancia en el campo de la producción de energía. Esta exposición pretende ser una invitación a los matemáticos para que se interesen en un problema de importancia fundamental: por ello nos concentraremos en ciertos aspectos de la Magnetohidrodinámica en los que los resultados matemáticos son más completos y sugestivos. Ciertamente el campo es inmenso y no sería posible elaborar una perspectiva global en tiempo limitado.

2 Las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

Supongamos que un fluido conductor carente de viscosidad, con presión p, densidad ϱ, velocidad $\mathbf{u}$ y entropía S está inmerso en un campo magnético $\mathbf{B}$ con densidad de corriente $\mathbf{J}$. Con una elección adecuada de las unidades, se verifica la ecuación de Euler tomando en consideración la fuerza de Lorentz $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ y otra posible fuerza externa $\mathbf{F}$:

$$\varrho\,\mathbf{u}_t + \varrho\,\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}$$

junto con la ecuación de continuidad

$$\varrho_t + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0$$

y la invariancia de la entropía

$$S_t + \mathbf{u}\cdot\nabla S = 0$$

Por su parte, $\mathbf{B}$ debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell. De hecho, se supone que la corriente de desplazamiento es nula, dado que los fenómenos que se estudian son de baja frecuencia. Las ecuaciones correspondientes (de Faraday, o pre-Maxwell) son

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

las cuales, junto con la relación de Ohm (que no es una ley física, sino una relación de estado)

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}$$

proporcionan la ecuación de inducción

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B} - \eta\operatorname{rot}\mathbf{B})$$

donde $\eta = \dfrac{1}{\sigma}$ es la resistividad del medio, la cual se reduce a cero en el caso de la "Magnetohidrodinámica ideal". También se verifica $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, luego si η es constante la ecuación de inducción se reduce a

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \eta\,\Delta\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})$$

en la que el primer sumando representa la difusión del campo a través del fluido, y el segundo el transporte de las líneas de campo por el flujo. En el caso ideal, dichas líneas son transportadas por el fluido como objetos materiales (se dice que están congeladas en el flujo).

Asimismo debe existir una ecuación de estado

$$p = p(\varrho, S)$$

que es particularmente interesante en el caso incompresible (ϱ=cte.) y en el del gas politrópico $p = A(S)\varrho^{\gamma}$. γ se toma habitualmente como $\dfrac{5}{3}$.

El valor de la fuerza externa $\mathbf{F}$ depende del problema. En la Fusión Nuclear, este valor es considerado nulo en comparación con el resto de las magnitudes; en problemas astrofísicos, la atracción gravitatoria $\mathbf{F} = \varrho\mathbf{g}$ debe tomarse en consideración. Para un estudio detallado de las ecuaciones de la MHD y su rango de validez, ver [1].

El problema de la dinamo consiste en estudiar en qué condiciones un campo magnético puede ser originado o mantenido por un campo de velocidades. Vemos que a su vez el campo magnético influye sobre la velocidad a través de la fuerza de Lorentz; sin embargo, cuando su magnitud es pequeña relativa a la velocidad, se puede considerar ésta como un dato y reducirnos a la ecuación de inducción, que es lineal en $\mathbf{B}$ ([2]). Su estudio constituye la denominada dinamo cinemática, y a pesar de sus limitaciones es muy instructiva para visualizar la interacción del campo y el fluido. Por otra parte, si queremos probar que una cierta clase de velocidades y campos no puede dar lugar a un efecto dinamo, basta con probar que aplicando la ecuación de inducción obtenemos $\mathbf{B}\to\mathbf{0}$. Estos resultados se conocen como teoremas anti-dinamo y a continuación nos ocuparemos del más famoso de ellos.

3 El Teorema de Cowling

En 1934 T. G. Cowling ([3]) contestó a una sugerencia de Joseph Larmor de 1919 ([4]) acerca del campo magnético de las manchas solares probando que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{B}$ son axisimétricos y poloidales (esto es, están en planos que contienen al eje de simetría) el campo invariablemente decrece. Esencialmente su argumento es el siguiente: como $\mathbf{B}$ es solenoidal y poloidal, existe una función de flujo ψ tal que, en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

Si suponemos que el campo es estacionario, en los puntos críticos de ψ la ecuación de inducción se reduce a $\Delta \psi = 0$, lo que en general no tiene por qué verificarse (por ejemplo, en los máximos y mínimos no degenerados de ψ). Cowling explicó este hecho mostrando que los extremos de ψ son pozos donde se sume la energía magnética. Backus y Chandrasekhar ([5]) generalizaron este resultado al caso en el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{B}$ son axisimétricos pero no poloidales; sin embargo, supusieron $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, esto es, que el fluido es incompresible. Por primera vez hicieron uso de algunos resultados acerca de las ecuaciones elípticas (de modo no enteramente riguroso).

De todos modos, una opinión muy extendida es que era posible encontrar un teorema general probando la imposibilidad del efecto dinamo, es decir, del mantenimiento de un campo magnético por los movimientos del fluido. Aunque Bullard y Gellman ([6]) habían mostrado numéricamente cierta evidencia positiva, sus cálculos estaban bajo sospecha y luego se mostró que procedían de la truncación de una serie divergente ([7]). Sin embargo, en 1958 G. E. Backus ([8]) mostró un efecto dinamo real en una configuración toroidal, lo que excluyó la posibilidad de un teorema anti-dinamo general. En 1968 Dietrich Lortz ([9]) completó la prueba del teorema de Cowling en el caso estacionario admitiendo un fluido compresible y resistividad no constante; su demostración utiliza fundamentalmente el principio del máximo para operadores elípticos.

El primer resultado importante acerca del caso no estacionario se debe a S. I. Braginskii ([10]). Se considera el caso de un conductor V rodeado por un aislante W. Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{u}$ son axisimétricos y solenoidales, se pueden escribir en coordenadas cilíndricas como

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, rq, \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ \mathbf{u} &= \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, rp, \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación de inducción, Braginskii demuestra

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_V |\psi|^2 = -\eta \iint_{V \cup W} |\psi|^2$$

lo que prueba que ψ tiende hacia cero en $\mathcal{L}^2(V)$ (dado que ψ se anula en el infinito). Asimismo se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_V |q|^2 = -\eta \iint_V |q|^2 + \iint_V q(\mathbf{B}_p \cdot \nabla p)$$

Si $\mathbf{B}_p$ (componente poloidal del campo) tiende hacia cero, como ∇p es acotado, también q tiende hacia cero en $\mathcal{L}^2(V)$.

Vemos que aparte de suponer la incompresibilidad, el principal problema es la suposición de que si ψ tiende a cero tambien $\nabla\psi$ tiende a cero, que es un paso generalmente dado por la mayoría de los autores. La cuestión de la incompresibilidad mereció la atención de Todoeschuk y Rochester, que en 1980 ([11]) conjeturaron que en un fluido compresible sí podía mantenerse un campo axisimétrico, invocando el hecho de que el campo magnético de Saturno, recientemente medido por el Pioneer 11, era altamente axisimétrico. R. Hide y T. N. Palmer en 1982 ([12]) refutaron este argumento con una demostración diferente; aunque ingeniosa, supone que la variación de una función está dominada por el máximo de la misma, lo que en general es falso. Fue nuevamente Lortz quien en dos trabajos con Rita Meyer-Spasche ([13], [14]) probó que en general ψ decrece con la norma del máximo y q decrece en $\mathcal{L}^1(V)$. Más tarde, junto con E. W. Stredulinsky ([15], [16]) estos autores probaron que ψ y q tienden exponencialmente a cero. Estos últimos resultados son extremadamente técnicos, pero con menos esfuerzo se puede probar que ψ (y $\nabla\psi$) tienden a cero; lo importante es que ψ satisface

$$\eta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-u_r\frac{\partial\psi}{\partial r}-u_z\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$$

en V, mientras que en W

$$\eta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$$

junto con condiciones de continuidad en ∂V,

$$[\psi]=\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right]=0.$$

La clave del resultado es que ψ satisface una ecuación parabólica en V, elíptica en W, y tiende a cero en el infinito; por el principio del máximo para ambos tipos de operadores, los máximos de ψ se alcanzan en la frontera, pero en virtud de la propiedad de Hopf ($\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}<0$) esto es contradictorio con la continuidad de la derivada normal. Comparando ψ con una función adecuada, se obtiene que ψ tiende a cero; que $\nabla\psi$ también tiende a cero se deduce de las estimaciones de Schauder y de los resultados de Ladyzhenskaya sobre problemas de transmisión ([17]). Un argumento algo más complicado, pero utilizando los mismos principios, resuelve el problema para q ([18]).

La esencia de estos teoremas anti-dinamo estriba en que la acción debe ser estrictamente tridimensional; existen argumentos topológicos (aún no totalmente rigurosos) en este sentido ([19]).

4 Resultados recientes sobre la dinamo cinemática

Varios fenómenos observados muestran un crecimiento extremadamente rápido del campo magnético, con variaciones mucho más súbitas de las que cabe esperar del movimiento del fluido. Éstos se atribuyen a las denominadas dinamos rápidas, que se interpretan del modo siguiente en términos de la ecuación de inducción: se dice que un campo de velocidades $\mathbf{u}$ da lugar a una dinamo rápida cuando el campo $\mathbf{B}$ que satisface

$$\mathbf{B}_t=\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{B}-\eta\mathrm{rot}\,\mathbf{B})$$

crece exponencialmente para alguna condición inicial $\mathbf{B}(0)$, incluso en el límite $\eta \to 0$. Si $\mathbf{u}$ no depende de t, esto quiere decir que el operador

$$\mathbf{B} \mapsto \mathrm{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \mathrm{rot}\,\mathbf{B})$$

tiene parte de su espectro en un semiplano $\mathrm{Re}(z) > \epsilon$, para todo valor de η. En 1993 I. Klapper y L. S. Young ([20]) probaron en el caso incompresible que para que un fluido dé lugar a una dinamo rápida su movimiento debe ser caótico, en el sentido de que la entropía topológica ([21]) debe ser positiva. (Recordemos que se define la entropía de un recubrimiento por abiertos α de X como $H(\alpha) = \log N(\alpha)$, donde $N(\alpha)$ es el menor número de abiertos de α que recubren X. Dada una aplicación $f\colon X \to X$ –en nuestro caso el desplazamiento del fluido– se define

$$h(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right), \qquad h(f) = \sup_{\alpha} h(f,\alpha)$$

El hecho de que la entropía $h(f,\alpha)$ sea positiva significa que el número de trayectorias que son distinguibles si sólo captáramos los abiertos de α crece exponencialmente con las iteraciones de f)

A la luz de este resultado cobran un gran interés los trabajos de Edward Ott y sus colaboradores T. M. Antonsen y Y. Du. En 1989 Ott y Antonsen ([22]) probaron que en el caso ideal $\eta = 0$ el campo magnético tiende a concentrarse en un conjunto fractal si el desplazamiento del fluido es caótico; asimismo calcularon las dimensiones de Renyi ([23]) de dicho fractal en función de los exponentes de Lyapunov del fluido. La prueba no es enteramente rigurosa, pero es intuitivamente convincente, y está apoyada por el análisis de ejemplos concretos. Por ello cabe esperar que el aspecto del campo sea más y más irregular, con grandes variaciones concentradas en conjuntos extremadamente dispersos. En 1995 Ott y Du ([19] y [24]) estudiaron el caso $\eta > 0$, en el que la difusión del campo tiende a atenuar las variaciones del mismo, hallando que dicho campo tiende a concentrarse en un conjunto de aspecto fractal hasta la escala $\sqrt{\eta}$, y regular para escalares menores. Asimismo introdujeron el "exponente de cancelación", que mide la tendencia al cambio de dirección en pequeñas escalas del campo; en cierto modo, se obtiene comparando $\int |\mathbf{B}|$ con $|\int \mathbf{B}|$. Su importancia es obvia con vistas a calcular el flujo total del campo; si éste, aunque su magnitud sea grande, cambia muy rápidamente de sentido, el flujo total será pequeño. En función de este exponente, Du y Ott obtuvieron para el crecimiento de $\int_V |\mathbf{B}|$ la fórmula

$$\int_V |\mathbf{B}| \sim e^{\gamma t}, \quad \gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \int_V L_1(x) L_3(x)^{\kappa} dx$$

donde L_1 es el mayor y L_3 es el menor de los exponentes de Lyapunov del flujo, y κ es el exponente de cancelación. Du y Ott no han probado rigurosamente la existencia del exponente de cancelación; este punto y muchos otros todavía aguardan una demostración rigurosa. Obviamente, los resultados mencionados serán válidos en la medida que lo sea la dinamo cinemática; para campos fuertes, $\mathbf{B}$ interacciona con $\mathbf{u}$ a través de la ecuación de movimiento y el estudio debe ser diferente (y no lineal). Los resultados obtenidos sobre este problema general son hasta el presente muy modestos.

5 Estados de equilibrio

Cuando las magnitudes magnetohidrodinámicas no dependen del tiempo, se dice que el estado es de equilibrio; si además la velocidad del fluido es nula, el equilibrio es estático.

Cuando no existen fuerzas externas, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{J} &= \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación no lineal en $\mathbf{B}$, y su interés excede el puramente matemático. El plasma confinado en un contenedor magnético, que debe poseer una elevada temperatura y densidad con vistas a comenzar una reacción de fusión nuclear, debería idealmente estar en un estado de equilibrio, para evitar pérdidas de plasma y difusión de la temperatura hasta las paredes del contenedor. Hasta 1993 sólo se había probado la existencia de soluciones del problema anterior en el caso axisimétrico ([25], [26]). En este caso, existe una función de flujo ψ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\xi + I(\psi)\nabla\xi$$

donde ξ representa el ángulo en coordenadas cilíndricas. Las superficies ψ =cte. son invariantes por el flujo de $\mathbf{B}$; la existencia de una foliación de superficies toroidales es importante para que la temperatura del plasma en el interior del contenedor no se extienda hasta las paredes del mismo, dado que el campo difunde la temperatura con gran rapidez. En 1958 Grad y Rubin ([27]) redujeron las ecuaciones del equilibrio axisimétrico a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\left(r^2\frac{dp}{d\psi} + I\frac{dI}{d\psi}\right)$$

Se especifican arbitrariamente las funciones $p(\psi)$, $I(\psi)$ y se obtiene una ecuación elíptica semilineal en ψ. De este modo se han obtenido computacionalmente gran cantidad de equilibrios de interés experimental. Grad tenía sus dudas acerca de la existencia de equilibrios no axisimétricos, pero en 1993 P. Laurence y O. Bruno ([28]) probaron un teorema de existencia para superficies toroidales próximas a una de revolución. La prueba utiliza un argumento de perturbación inicialmente debido a Moser.

Independientemente de la existencia de estados de equilibrio, una vez alcanzado éste es fundamental que sea estable, esto es, que pequeñas variaciones del mismo no conduzcan a crecimientos exponenciales de dichas perturbaciones. Con este fin se plantean las ecuaciones linealizadas: si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{u}$ denotan las perturbaciones del campo y la velocidad, y p_* la variación de la presión total $p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2$, dichas ecuaciones son, tras una transformación de Fourier en t, ([29])

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{B} - \nabla p_* - i\omega\varrho\mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{B} - \frac{1}{\gamma p}(\mathbf{u}\cdot\nabla p)\mathbf{B} - i\omega\left[\mathbf{b} + \frac{1}{\gamma p}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\mathbf{B} - \frac{1}{\gamma p}p_*\mathbf{B}\right] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\cdot(\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{B}) - \mathbf{u}\cdot\nabla p - (\gamma p + B^2)\operatorname{div}\mathbf{u} - i\omega p_* &= 0 \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que la ecuación de estado del plasma es $p = S\varrho^\gamma$. Este sistema puede expresarse en la forma

$$F\mathbf{u} = \omega^2\varrho\mathbf{u}$$

donde F es un operador autoadjunto. Por ello ω^2 siempre es real, y el equilibrio será inestable cuando $\omega^2 \leq 0$. El sistema original tiene la forma

$$\begin{aligned} Av + Bw &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial\psi} + Cv + Dw &= 0 \end{aligned}$$

donde A, B, C y D son operadores diferenciales de primer orden que corresponden a derivadas dentro de las superficies de flujo ψ=cte.; ω aparece como un parámetro dentro de estos operadores. E. Hameiri ([29]) probó que los valores de ω para los que existe una solución no trivial de $Av = 0$, forman parte del espectro esencial de todo el operador; de hecho constituyen el denominado espectro de Alfvén, y corresponden a ondas transversales que viajan a través de las líneas de campo. Se presentan en muchos campos de la Física: Southwood y Kivelson ([30]) han mostrado que las oscilaciones diurnas del campo magnético terrestre se deben a que la radiación solar excita las frecuencias precisas para la aparición de ondas de Alfvén estacionarias en las líneas de campo. También se han observado éstas en el campo magnético de Júpiter ([31]). Grad propuso de hecho la existencia de ondas de Alfvén en el interior de un plasma con un emisor externo de ondas electromagnéticas con vistas a calentar dicho plasma. En efecto, por las propiedades de dichas ondas, la zona de absorción de energía se mantiene lejos de las paredes del contenedor ([32], [33]). Volviendo a las ecuaciones originales, Hameiri demostró que en el caso axisimétrico y para un modo de Fourier fijo, el espectro esencial es precisamente el de Alfvén, aunque puede haber autovalores fuera de él; mientras que el espectro de Alfvén es siempre real, estos autovalores pueden ser imaginarios. Los puntos de acumulación de éstos para todos los posibles modos también forman parte del espectro esencial. Diferentes partes del espectro tienen nombres curiosos, que datan a menudo de los años cincuenta y describen el aspecto que toma el tubo de plasma cuando se excitan estas frecuencias: modos en rizo (kink), en globo (ballooning), de intercambio en flauta (flute) o en salchicha (sausage) ([26]). La estabilidad de un equilibrio dado depende de su configuración geométrica. Existen criterios necesarios (Suydam, Mercier, [26]). En cuanto a los equilibrios no estáticos, son en su mayoría inestables ([34]), pero su análisis está poco avanzado. En configuraciones sencillas, el problema se reduce a la estabilidad de una ecuación de Hill que, como sabemos, depende de modo complicado de los coeficientes de la misma.

6 La evolución de los tubos de flujo en el interior del Sol

Relacionado con el tema de la estabilidad lineal de configuraciones de equilibrio, el fascinante trabajo ([35], [36]) de Fernando Moreno-Insertis y Antonio Ferriz-Mas, del Instituto Astrofísico de Canarias, y Manfred Schüssler y Peter Caligari, del Instituto Kiepenheuer de Física Solar de Friburgo, representa una importante contribución a nuestra comprensión del mecanismo de formación de las manchas solares. Las manchas solares son zonas de menor luminosidad que la fotosfera circundante; aparecen en pares, con una inclinación típica (tilt) y generalmente en latitudes medias. Posteriormente van apareciendo en zonas más próximas al ecuador, durante un ciclo de 22 años (cada 11 años cambia la polaridad de su campo magnético). Precisamente sus características más notoria son su fuerte campo magnético (mil veces mayor que el campo solar medio) y el hecho de que la polaridad de dos manchas contiguas es siempre opuesta ([37]). Parece obvio que estas dos manchas deben ser los extremos de un tubo de flujo magnético que ha aflorado a la fotosfera, y los estudios realizados desde los años cuarenta (Alfvén, Parker, Babcock, etc.) intentan explicar la formación de dichos tubos de flujo, así como su evolución posterior. La razón de su ascenso es clara: la presión total $p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2$ debe coincidir dentro y fuera del tubo. Como el campo $\mathbf{B}$ es mucho mayor en el interior, la presión debe ser menor y el tubo asciende por un efecto de flotabilidad (buoyancy) magnética. Existe un consenso en el que el campo magnético se almacena en la región frontera entre la zona de convección y la región subadiabática inferior. El hecho de que los tubos aparecen poco distorsionados por la convección del plasma y que afloran en latitudes medias, y no cerca de los polos, donde los empujaría la fuerza de Coriolis, indican que el campo original es del orden de $10^5 G$ (si coincidiera la energía magnética con la cinética del plasma en movimiento sería tan solo de $10^4 G$). El modelo estudiado por los autores anteriormente mencionados es el siguiente: partimos de un tubo delgado situado en un plano horizontal distinto del ecuatorial, en estado de equilibrio. Para este equilibrio (no estático), existen fuerzas externas que deben ser tomadas en consideración; dado que originalmente el tubo está inmóvil, las densidades interna y externa deben coincidir:

$$\varrho = \varrho_e.$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir del siguiente modo: la suma de la energía magnética, que es aproximadamente nula fuera del tubo, y la energía cinética, debe coincidir en el interior y el exterior. Como el movimiento es circular de radio R_0, esto significa

$$R_0{}^2(\Omega^2 - \Omega_e{}^2) = v_A{}^2$$

donde Ω y Ω_e son las velocidades angulares interna y externa, y $v_A = \dfrac{B}{\sqrt{\varrho}}$ la denominada velocidad de Alfvén en el tubo. Si suponemos una pequeña perturbación con frecuencia temporal fija ω y modo de Fourier m, las ecuaciones linealizadas se reducen a un sistema algebraico en ω^2 y m^2, que da lugar a un polinomio real de sexto grado en ω^2. El equilibrio será estable cuando todas las raíces sean positivas. Los parámetros fundamentales son el valor B, magnitud original del campo magnético, y la latitud λ, que entra en la velocidad angular Ω_e debido a la rotación diferencial del Sol. De acuerdo con una ley empírica basada en análisis heliosismológicos,

$$\Omega_e(R,\lambda) = 2.7 \cdot 10^6(1 + 0.06(1 - 5\,\mathrm{sen}^2\lambda)e^{2.5(1-R/R_1)})$$

donde R_1 es el radio del Sol.

Los modos fundamentales son los primeros; los siguientes requieren valores de B del orden de $10^6 G$ para mostrar inestabilidad. Para $m = 0$, $m = 1$ y $m = 2$ los resultados numéricos muestran que los parámetros B y λ deben permanecer en ciertas regiones para que los tubos inestables asciendan en un tiempo razonable (del orden de 10^{10} días). A continuación se estudia la evolución no lineal de los tubos; la aproximación lineal sólo es válida en el comienzo de la inestabilidad. Con este fin se identifica el tubo con una curva unidimensional y se plantea la ecuación de movimiento en términos de las componentes de la derivada lagrangiana de la velocidad de un punto material en el tubo. Los resultados ([35]) muestran una excelente concordancia con las observaciones, en particular con la latitud de la zona de emersión y el ángulo de inclinación de las dos ramas del tubo. Asimismo se observa una asimetría entre ambas ramas de la ondulación emergente: la rama adelantada es menos vertical que la posterior. Es preciso destacar que el movimiento del tubo no corresponde al de las partículas materiales dentro de él, que tienden a desaparecer de la parte alta y descender a regiones más profundas.

No cabe duda de que la identificación de las manchas solares con interiores de tubos de flujo está bien establecida, si bien la evolución de los mismos aún está sujeta a discusión. En particular, la explicación habitual de la dinamo solar parece incapaz de producir tubos de flujo de la intensidad necesaria ($10^5 G$), por lo que este capítulo dista mucho de estar cerrado.

Referencias

[1] Krall N.A., Trivelpiece A.W., *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[2] Ghil, M., Childress S., *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Springer Verlag, New York, 1987.

[3] Cowling T.G. *The magnetic field of sunspots*, Month. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 39-48, 1934.

[4] Larmor J. *How could a rotating body such as the Sun become a magnet?*, Brit. Assoc. Reports, 159-160, 1919.

[5] Backus G.E., Chandrasekhar S., *On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos*, Proc. Nat. Acad. Sci., Washington D.C., **42**, 105-109, 1956.

[6] Bullard E.C., Gellman H., *Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, **247**, 213-278, 1954.

[7] Gibson R.D., Roberts P.H., *The Bullard-Gellman Dynamo*, en *Applications of Modern Physics to the Earth and Planetary Interiors*, Wiley Interscience, pag. 577, New York, 1969.

[8] Backus G.E., *A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos*, Ann. Phys., **4**, 372-447, 1958.

[9] Lortz D., *Impossibility of steady dynamos with certain symmetries*, Phys. of Fluids, **11**, 913-915, 1968.

[10] Braginskii S.I., *Self-excitation of a magnetic field during the motion of a highly conducting fluid*, Sov. Phys. J.E.T.P. **20**, 746-735, 1964.

[11] Todoeschuck J.P., Rochester M.G. *The effect of compressible flow on anti-dynamo theorems*, Nature, **284**, 250-251, 1980.

[12] Hide R., Palmer T.N. *Generalizations of Cowling's theorem*, Geoph. Astroph. Fluid Dyn., **19**, 301-309, 1982.

[13] Lortz D., Meyer-Spasche R., *On the decay of symmetric dynamo fields*, Math. Meth. in the Appl. Sci, **4**, 91-97, 1982.

[14] Lortz D., Meyer-Spasche R., *On the decay of symmetric toroidal dynamo fields*, Z. Naturfosch, **37a**, 736-740, 1982.

[15] Lortz D., Meyer-Spasche R., Stredulinsky E.W., *Asymptotic behaviour of solutions of certain parabolic equations*, Comm. in Pure and Appl. Math., **37**, 677-703, 1984.

[16] Stredulinski E.W., Lortz D., Meyer-Spasche R., *Asymptotic behaviour of solutions of certain parabolic problems with space and time dependent coefficients*, Comm. in Pure and Appl. Math., **39**, 233-266, 1986.

[17] Ladyzhenskaya O.A., *Linear and Quasi-Linear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[18] Núñez M., *The decay of axisymmetric magnetic fields: a review of Cowling's theorem*, (Preprint), 1995.

[19] Du Y., Ott E., *Growth rates for fast kinematic dynamo instabilities of chaotic fluid flows*, J. Fluid Mech., **277**, 265-288, 1993.

[20] Klapper I., Young L.S., *Rigorous bounds on the fast dynamo growth rate involving topological entropy*, Univ. of Arizona, (Preprint), 1993.

[21] Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H., *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **114**, 309-319, 1965.

[22] Ott E., Antonsen T.M. *Fractal measures of passively convected vector fields and scalar gradients in chaotic fluid flows*, Phys. Rev A, **39**, 7, 3660-3671, 1989.

[23] Renyi A., *Probability theory*, Elsevier - North Holland, Amsterdam, 1970.

[24] Du Y., Ott E., *Fractal dimension of fast dynamo magnetic fields*, Physica D, **67**, 387-417, 1993.

[25] Bateman G., *MHD Instabilities*, The M.I.T. Press, Cambridge Mass., 1978.

[26] Freidberg J.P., *Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems*, Rev. of Mod. Phys., **54**, 3, 801-899, 1982.

[27] Grad H., Rubin H., *Proceeding of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, **31**, pag 190, Genova, 1958.

[28] Bruno O., Laurence P., *On the existence of three dimensional sharp boundary solutions of the ideal MHD equilibrium equations in a torus*, Comptes rendus de l'Academie des Sciences, **312**, 3, 1993.

[29] Hameiri E., *On the essential spectrum of ideal Magnetohydrodynamics*, Comm. in Pure and Appl. Math., **38**, 43-66, 1985.

[30] Kivelson M.G., Southwood D.J., *Resonant ULF waves: a new interpretation*, Geoph. Res. Lett., **12**, 1, 49-52, 1985.

[31] Glassmeier K.H., Ness N.F., Acuña M.H., Neubauer F.M., *Standing hydromagnetic waves in the Io Plasma Torus: Voyager 1 Observations*, J. Geoph. Res., **94**, A11, 15063-76, 1989.

[32] Núñez M., Rojo J., *A WKB analysis of the Alfvén spectrum of the linearized magnetohydrodynamics equations*, Appl. of Math., **38**, 1, 23-38, 1993.

[33] Núñez M., Rojo J., Tristán L.A., *Singularities arising in the linearized magnetohydrodynamics equations*, (Preprint), 1995.

[34] Hameiri E., Hammer J.H., *Unstable continuous spectrum in magnetohydrodynamics*, Phys. of Fluids, **22**, 9, 1700-1705, 1979.

[35] Caligari P., Moreno-Insertis F., Schüssler M., *Emerging flux tubes in the solar convection zone I. Asymmetry, tilt, and emergency latitude*, Astrophys. J., **441**, 1995.

[36] Ferriz-Mas A., Schmitt D., Schüssler M., *A dynamo effect due to the instability of magnetic flux tubes*, Astron. and Astroph., 1994.

[37] Schmitt D., Schüssler M. (Eds.), *Solar Magnetic Fields*, Cambridge Univ. Press, 1994.