ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DEL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS

Gerard Gómez
Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisis
Universitat de Barcelona

La idea de Henri Poincaré sobre las órbitas periódicas como "la mejor erramienta para entender el problema de tres cuerpos" (Les Métodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, vol 1, p 82) ha sido ampliamente explotada a lo largo de éste siglo.

El monumental trabajo de Elis Strömgren sobre el cálculo efectivo de las famílias de soluciones periódicas del problema, realizado con la ayuda de integradores mecánicos entre 1900 y 1935, constituye la fuente más valiosa en la que adquirir una idea del comportamiento cuantitativo sobre la mayor parte de éste tipo de soluciones.

Entre 1966 y 1970 Michel Hénon publicó una serie de 6 artículos, con el título genérico "Exploración Numérica del Problema Restringido" que complementan el trabajo de Strömgren e ilustran de forma cuantitativa el papel de las soluciones periódicas (estables) dentro de las soluciones acotadas. En sus exploraciones numéricas Hénon encontró de forma efectiva tres tipos de comportamientos cualitativamente distintos para las soluciones del problema restringido de tres cuerpos: movimientos cuasi-periódicos, semi-ergódicos y de escape, de acuerdo con su nomenclatura.

Una parte de los comportamientos puestos de manifiesto en sus cálculos es el que ya había quedado descrito de forma cualitativa por Poincaré (en el tercer volumen de la obra anteriormente citada) y, por lo que se refiere a los movimientos cuasi-periódicos, demostrado por Vladimir I. Arnold en 1963 en el contexto de los sistemas hamiltonianos próximos a integrables.

Los comportamientos mencionados son comunes a otros tipos de problemas de interés: movimientos de estrellas en galaxias con simetrias, trayectorias de partículas en aceleradores lineales, oscilaciones de un satélite artificial, dinámica molecular, etc. y de ello deriva su relevancia.

En el contexto de los sistemas dinámicos conservativos (sistemas hamiltonianos y aplicaciones simplécticas), Jacques Laskar ha introducido recientemente una técnica denominada análisis de frecuencias que, de forma parecida a la llamada aplicación de Poincaré, resulta útil para hacerse una idea bastante global del comportamiento cualitativo y cuantitativo del sistema estudiado. Los resultados más espectaculares de éste procedimiento se han obtenido en el estudio de la estabilidad del sistema solar. Tambien se ha aplicado para definir criterios de destrucción de toros invariantes en apliciones 2D, para obtener representaciones cuasiperiódicas de soluciones, para analizar procesos de difusión a lo largo y a través de las líneas de resonáncia en sistemas con tres o más grados de libertad, etc.

La idea básica del método es la siguiente. De acuerdo con el teorema KAM, en el espacio de fases de un sistema conservativo, suficientemente próximo a uno integrable, persiten todavia muchos toros invariantes. Las trayectorias con condiciones iniciales sobre uno de estos toros permanecen indefinidamente sobre él, con un movimiento cuasiperiódico con un vector de frecuencias fijo y que depende exclusivamente del toro. La familia de toros está parametrizada sobre un conjunto de vectores de frecuencias con estructura cantoriana, y en los vacios del conjunto de Cantor aparecen los llamados movimientos caóticos. La representación numérica de los toros invariantes puede hacerse con relativa facilidad (hasta un cierto grado de precisión numérica) utilizando métodos de análisis de Fourier refinados (y, por tanto, sin necesidad de buscar transformaciones a variables acción–ángulo). A pesar que las frecuencias sólo estan definidas sobre los toros invariantes, el algoritmo de Fourier puede calcular para un intervalo de tiempo dado, un vector de frecuencias asociado a cualquier condición inicial, entonces los valores de las frecuencias variaran con el intervalo de tiempo que se tome. En éste caso la variación de los valores de las frecuencias proporciona información sobre la difusión.

En la presente comunicación se presentarán las técnicas para llevar a cabo el análisis de frecuencias, los resultados que se obtienen al aplicarlas al problema restringido de tres cuerpos y su relación con los obtenidos en los trabajos antes citados.