SOBRE LA INTEGRACIÓN DE UN PROBLEMA EXTERIOR PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON UN MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Francisco Javier Sayas

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Campus Universitario, 50009 Zaragoza.

El objetivo de esta comunicación es mostrar un algoritmo basado en técnicas de elementos de contorno para la integración numérica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el exterior de un dominio acotado. Se muestra cómo llegar a un esquema totalmente discreto y se indica una útil propiedad de existencia de desarrollo asintótico del error, que permite aplicar estrategias de extrapolación tanto para el control del error como para la aceleración de la convergencia del método.

El contenido de lo que sigue y las demostraciones de los resultados citados aparecen en trabajos recientes de Crouzeix y Sayas (1995) y Sayas (1995) o son consecuencia directa de ellos.

Planteamiento del problema

Sea Ω' el exterior de un dominio acotado simplemente conexo del plano $\mathbf{R}^2$, Γ su frontera regular y u_0 una función suficientemente regular definida sobre Γ. Entonces nos planteamos hallar una función u, definida sobre Ω', tal que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega'$$

y

$$u|_\Gamma = u_0.$$

A la condición de contorno de tipo Dirichlet en Γ hay que añadir condiciones 'naturales' en infinito que aseguren la unicidad de solución. Centraremos ese aspecto del problema después.

Consideremos una función integrable $\psi : \Gamma \to \mathbf{R}$ y una constante real c cualquiera. Entonces la función

$$v(\,\cdot\,) := -\int_\Gamma \log|\,\cdot\, - \mathbf{x}|^2 \psi(\mathbf{x}) d\gamma_{\mathbf{x}} + c, \tag{1}$$

donde $d\gamma_{\mathbf{x}}$ es el elemento de longitud sobre la curva Γ, es solución de la ecuación de Laplace sobre Ω'. Uno de los llamados métodos indirectos consiste en buscar soluciones del problema de contorno anterior mediante los llamados potenciales de capa simple (1).

En concreto, por las relaciones de salto de los potenciales –ver, por ejemplo, Sloan (1992)– restringiendo v a Γ, se debe cumplir

$$u_0(\,\cdot\,) = -\int_\Gamma \log|\,\cdot\, - \mathbf{x}|^2 \psi(\mathbf{x}) d\gamma_{\mathbf{x}} + c, \quad \text{en } \Gamma. \tag{2}$$

Además, si

$$B = \int_\Gamma \psi(\mathbf{x}) d\gamma_x,$$

se tiene que

$$u(\mathbf{y}) \simeq -B\log|\mathbf{y}|^2 + \mathcal{O}(1), \quad \text{cuando } |\mathbf{y}| \to \infty.$$

En la siguiente sección daremos un tratamiento riguroso de la ecuación (2). En el ya citado Sloan (1992) pueden encontrarse diversos enfoques de la búsqueda de soluciones de éste y otros problemas (interiores y exteriores) de contorno en la ecuación de Laplace mediante potenciales.

Ecuaciones integrales con núcleo logarítmico

Sea $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \Gamma$ una parametrización regular, 1-periódica de la curva Γ. Por simplicidad se puede suponer que $\mathbf{x}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Entonces consideramos el operador de capa simple

$$Vg(\,\cdot\,) := -\int_0^1 \log|\mathbf{x}(\,\cdot\,) - \mathbf{x}(s)|^2 g(s)ds,$$

definido para funciones suficientemente regulares, y su extensión continua a espacios de distribuciones periódicas adecuados.

La resolución del problema: hallar $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 1-periódica y $c \in \mathbf{R}$ tales que

$$\begin{cases} Vg + c = u_0, \\ \displaystyle\int_0^1 g(s)ds = 0, \end{cases} \tag{3}$$

nos proporciona soluciones acotadas del problema de Dirichlet exterior. El marco funcional más apropiado para el estudio de esta ecuación es el de los espacios de Sobolev periódicos (ver Yan y Sloan (1988) o Sayas (1994), por ejemplo), denotados generalmente H^s, $s \in \mathbf{R}$.

Supongamos que $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}$, espacio isomorfo (a través de la parametrización de la curva Γ) al espacio de trazas $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Consideremos la forma bilineal $b : H^{-\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}} \to \mathbf{R}$

$$b(g,r) := (Vg, r)_0 = -\int_0^1\int_0^1 \log|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\sigma)|^2 g(s) r(\sigma) ds d\sigma,$$

donde $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_0$ denota al producto escalar de H^0 y a su extensión como producto de dualidad entre $H^{\frac{1}{2}}$ y $H^{-\frac{1}{2}}$ y la expresión integral debe entenderse en un sentido débil.

Entonces el problema integral (3), entendido en un sentido débil, es equivalente al problema desacoplado

$$(P)\begin{cases} g \in H_0^{-\frac{1}{2}}, \\ b(g,r) = (u_0, r)_0, \quad \forall r \in H_0^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

$$c = (u_0, 1)_0 - b(g,1)$$

donde

$$H_0^{-\frac{1}{2}} = \{f \in H^{-\frac{1}{2}} : (f,1)_0 = 0\}.$$

Como la forma bilineal $b(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es coerciva (ver LeRoux(1974)), el problema tiene solución única por una simple aplicación del teorema de Lax-Milgram.

Métodos discretos

Consideremos el espacio V_h^0 de las funciones constantes a trozos 1-periódicas sobre una malla uniforme ($h = 1/N$) y con integral nula sobre el intervalo $(0,1)$. Aplicando un método de Galerkin con espacio *test-trial* V_h^0 obtenemos la versión discreta de (P)

$$\begin{cases} g_h \in V_h^0, \\ \\ b(g_h, r_h) = (u_0, r_h)_0, \quad \forall r_h \in V_h^0, \end{cases}$$

con el cálculo a posteriori

$$c_h = (u_0, 1)_0 - b(g_h, 1).$$

Entonces es bien conocido que si $g \in H^1$, para todo $t \in [-2, 1/2)$ se tiene la cota de convergencia

$$\|g_h - g\|_t \leq C h^{1-t}$$

y

$$|c_h - c| \leq C h^3.$$

No obstante, al calcular los coeficientes y el término independiente del sistema lineal que determina la solución de (P_h) hay que evaluar determinadas integrales que requieren algunas aproximaciones adicionales. Expondremos brevemente un método completamente discreto basado en la familia de métodos de Galerkin colocación, originada en los trabajos de Hsiao, Kopp y Wendland (1980 y 1985).

Si denotamos s_i a los puntos medios del mallado, el término independiente del sistema exige calcular

$$\int_{s_i - \frac{h}{2}}^{s_i + \frac{h}{2}} u_0(s) ds = h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_0(s_i + ht) dt.$$

Para la aproximación de la anterior integral utilizaremos una fórmula de tres puntos en lugar de la fórmula del punto medio propuesta en Hsiao, Kopp y Wendland (1980). Aunque, en principio, la regla de Simpson en el intervalo $(-1/2, 1/2)$ es válida, la siguiente fórmula

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt \simeq \frac{1}{24} f(-1) + \frac{11}{12} f(0) + \frac{1}{24} f(1), \tag{4}$$

que utiliza puntos fuera del intervalo de integración, no sólo es válida aquí ya que u_0 está definida en todo $\mathbf{R}$, sino que reduce a la mitad el número de evualuaciones totales de la función u_0.

En cuanto a la matriz de coeficientes, requiere de la evaluación aproximada de

$$b_{i,j} := \int_{s_i - \frac{h}{2}}^{s_i + \frac{h}{2}} \int_{s_j - \frac{h}{2}}^{s_j + \frac{h}{2}} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\sigma)|^2 ds d\sigma.$$

Por periodicidad, podemos calcular los coeficientes para valores cualesquiera de $i, j \in \mathbf{Z}$. Entonces, exigiendo que $|i - j| \leq N/2$, se tiene la descomposición

$$b_{i,j} = \int_{s_i - \frac{h}{2}}^{s_i + \frac{h}{2}} \int_{s_j - \frac{h}{2}}^{s_j + \frac{h}{2}} \log \frac{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\sigma)|^2}{(\sigma - s)^2} ds d\sigma + B_{i-j}(h).$$

La primera integral puede ser aproximada por la fórmula de tres puntos antes indicada en cada variable (nótese el considerable descenso del número de evaluaciones que supone emplear la fórmula (4) respecto de la de Simpson). En cuanto a los coeficientes $B_{i-j}(h)$, se pueden descomponer de forma que su cálculo requiere únicamente del conocimiento de una matriz simétrica Toeplitz independiente de h. Los elementos de esa matriz tienen expresiones analíticas conocidas, aunque su evaluación –realizada una única vez para todos los problemas– es más estable si se realiza por medio de una serie de potencias como se explica en Hsiao, Kopp y Wendland (1985).

Las anteriores modificaciones del método de Galerkin se pueden reinterpretar como un problema variacional aproximado

$$(P_h^*)\begin{cases} g_h^* \in V_h^0, \\ \\ b_h(g_h^*, r_h) = (u_0, r_h)_h, \quad \forall r_h \in V_h^0, \end{cases}$$

con el cálculo

$$c_h^* = (u_0, 1)_h - b_h(g_h, 1).$$

Si las operaciones son bien organizadas, el cálculo de c_h^* no requiere más que unas combinaciones lineales de coeficientes calculados para el sistema (P_h^*). El método tiene el mismo orden de convergencia que el dado para el método de Galerkin y presenta, como él, un fenómeno de superconvergencia en los puntos medios, como se demuestra en Sayas (1994) y Crouzeix y Sayas (1995).

Integración numérica del potencial

Una vez obtenida la solución numérica (g_h^*, c_h^*) queremos calcular

$$u_h^*(\mathbf{y}) := -\int_0^1 \log|\mathbf{y}-\mathbf{x}(s)|^2 g_h^*(s)ds + c_h^* = -\sum_{i=1}^N g_h^*(s_i)\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}} \log|\mathbf{y}-\mathbf{x}(s)|^2 ds + c_h^*,$$

en cualquier $\mathbf{y} \in \Omega'$. Aplicando de nuevo la fórmula de integración (4) obtenemos una nueva aproximación $U_h(\mathbf{y})$. Entonces para todo $\mathbf{y}$ se tiene

$$|u(\mathbf{y}) - U_h(\mathbf{y})| \leq C_{\mathbf{y}} h^3.$$

Además, en condiciones suficientes de regularidad, tenemos un desarrollo asintótico del error

$$U_h(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}) + C_3h^3 + C_4h^4 + \ldots + C_mh^m + \mathcal{O}(h^{m+1}).$$

Este desarrollo permite aplicar extrapolación de Richardson para la aceleración de la convergencia del método y obtener estimaciones del error cometido.

Agradecimientos

Los resultados aquí expuestos han sido realizados por el autor en colaboración con el profesor Michel Crouzeix de la Universidad de Rennes I (Francia). Parte del trabajo ha sido realizado mientras el autor disfrutaba de una beca del CONAI (Diputación General de Aragón), referencia BCB0392, y con apoyo financiero del proyecto CICYT AMB94-0396.

Referencias

Crouzeix, M. y Sayas, F.J.(1995): *Asymptotic expansions of the error of Boundary Element Methods: I. spline Galerkin methods; II. the Galerkin collocation method*, PrePrint 95-16 Université de Rennes I, enviado para publicación.

Hsiao, G.C., Kopp, P. y Wendland, W.L. (1980): *A Galerkin collocation Method for Some Integral Equations og the First Kind*, Computing **25**, 89-130.

Hsiao, G.C., Kopp, P. y Wendland, W.L. (1985): *Some Applications of a Galerkin-Collocation Method for Boundary Integral Equations of the First Kind*, Math.Meth. in the Appl.Sci. **6**, 280-325.

Le Roux, M.N.(1974): *Résolution numérique du problème du potential dans le plan pas une méthode variationelle d'éléments finis*, Thèse de troisième cycle, Université de Rennes, Francia.

Sayas, F.J. (1994): *Asymptotic expansion of the error of some boundary element methods*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

Sloan, I.H. (1992): *Error analysis of boundary integral equations*, en *Acta Numerica*, Cambridge University Press.

Yan, Y. & Sloan, I.H. (1988): *On integral equations of the first kind with logarithmic kernels*, J. of Int. Eqn. Appl. **1**, 549-579.