RBITAS PERIDICAS EN SISTEMAS DE CONTROL

Gerard Olivar(1) y Enric Fossas(2)

(1) Departament de Matemtica Aplicada i Telemtica, Universitat Politcnica de Catalunya, Av. Vctor Balaguer s/n, E-08800 Vilanova i la Geltr.

(2) Departament de Matemtica Aplicada i Telemtica, Universitat Politcnica de Catalunya, C/. Gran Capit s/n, Modul C3 Campus Nord, E-08034 Barcelona.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a trozos pueden modelizar aceptablemente esquemas de control de mecanismos electrnicos de potencia. En este resumen se analiza el comportamiento de un convertidor de corriente contnua de tipo buck, en el cual se ha detectado experimentalmente bifurcaciones y caos. El tratamiento analtico del sistema de ecuaciones diferenciales se lleva a cabo fcilmente debido a la naturaleza lineal del sistema. Sin embargo, la topologa del circuito cambia segn las soluciones de una ecuacin no lineal que debe resolverse numricamente.

Introduccin

El sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza un convertidor de tipo buck es

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ V_{in}/L \end{pmatrix} u(t) \qquad \text{con} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2, \quad \text{y} \tag{1}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_1 > \alpha + \beta\tilde{t} \\ 1 & \text{if } x_1 < \alpha + \beta\tilde{t} \end{cases} \qquad (\tilde{t} = t \quad modT) \tag{2}$$

siendo $R, C, L, V_{in}, \alpha, \beta, T$ constantes positivas que dependen de los componentes del circuito. Se trata pues de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y T-peridico, cuyo espacio de fases natural es $R^2 \times S^1$. En los instantes de tiempo t tales que $x_1 = \alpha + \beta\tilde{t}$ (condicin de cruce), se tiene el cambio de topologa del circuito. Las expresiones de las soluciones pueden conocerse exactamente en cada una de las topologas, dada la linealidad de los sistemas. Concretamente, se tiene

$$x(t) = \begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{in}/R \end{pmatrix} u(t) + e^{-k(t-t_0)} \cdot [I\cos\omega(t-t_0) + A\sin\omega(t-t_0)][x^0 - \begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{in}/R \end{pmatrix} u(t)]$$

donde $k = \frac{1}{2RC}, \omega = +\sqrt{\frac{1}{LC} - k^2} > 0, A = \begin{pmatrix} -k/\omega & 1/(C\omega) \\ -1/(L\omega) & k/\omega \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

rbitas peridicas

A partir de la expresin de las soluciones pueden obtenerse diferentes tipos de rbitas peridicas, segn los valores de V_{in}. Definimos, para $r \geq 0$ y $m \geq 0$,

$P(r, m) = \{$ rbitas rT-peridicas que cruzan, como mucho, m veces por periodo$\}$.

Fijando los valores de los componentes del circuito de acuerdo con [1]-[3], y manteniendo V_{in} como nico parmetro, puede demostrarse fcilmente que $P(r, 0) = \emptyset \quad \forall r \geq 0$. $P(1, 1)$ y $P(2, 1)$ han sido tambin estudiados con detalle, obteniendo una rbita de $P(1, 1)$ para cada valor de $V_{in} \in (12, 50)$ (que es el rango de valores experimentalmente vlido), y otra rbita de $P(2,1)$ para cada valor de $V_{in} \in (24.5, 36)$. El caso general $P(r,1)$ puede tratarse de forma similar al anterior, obtenindose una frmula recurrente que involucra los valores de x_1 y x_2 al final de cada uno de los r periodos y los tiempos $\alpha_1 T, \ldots, \alpha_r T$ en los cuales el sistema permanece en una de las dos topologas posibles. As, las condiciones iniciales de las rbitas rT-peridicas, x_1^0, x_2^0, vienen dadas por

$$x^0(V_{in}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = V_{in}[N(0) - N(r)]^{-1}[\sum_{j=0}^{r-1}(N(j) - N(j+1-\alpha_{r+1-j}))] \begin{pmatrix} 1 \\ 1/R \end{pmatrix} \quad (3)$$

con las condiciones adicionales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(V_{in}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) & = & 0 \\ \ldots & & \\ f_r(V_{in}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) & = & 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

donde $N(\alpha) = e^{-kT\alpha}[I \cos \omega T\alpha + A \sin \omega T\alpha]$, y

$$f_j(V_{in}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \alpha + \beta T \alpha_j - (1,0) \cdot N(\alpha_j) \begin{pmatrix} x_1^{j-1} \\ x_2^{j-1} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{j} \\ x_2^{j} \end{pmatrix} = N(1) \begin{pmatrix} x_1^{j-1} \\ x_2^{j-1} \end{pmatrix} + V_{in}[N(0) - N(1-\alpha_j)] \begin{pmatrix} 1 \\ 1/R \end{pmatrix}. \quad (6)$$

De esta forma, el problema de encontrar las rbitas peridicas de $P(r,1)$ se reduce a resolver numricamente el sistema de ecuaciones (4) en la regin $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in [0,1]^r$.

Estabilidad

Para cada una de las rbitas de $P(1,1)$ y $P(2,1)$ obtenidas, se ha determinado su estabilidad mediante el clculo de los respectivos multiplicadores caractersticos. La rbita T-peridica se desestabiliza a partir de $V_{in} = 25.5$ en favor de la rbita $2T$-peridica. sta, a su vez, pierde su estabilidad cuando $V_{in} = 31$. Si se traza el diagrama de bifurcaciones (segn el parmetro V_{in}) se observa una sucesin de doblamiento de periodos, hasta que se alcanza una zona catica.

Bibliografa

[1] Deane, J.H.B. y Hamill, D.C.: Analysis, Simulation and Experimental Study of Chaos in the Buck Converter. IEEE PESC. June 1990.

[2] Hamill, D.C., Deane, J.H.B. y Jefferies, D.J.: Modelling of Chaotic DC-DC Converters by Iterated Nonlinear Mappings. IEEE Transactions on Power Electronics, VOL 7, NO 1. January 1992.

[3] Olivar, G. y Fossas, E.: Study of Chaos in the Buck Converter. (to appear)