Estabilidad de los métodos Runge–Kutta para problemas parabólicos casilineales en espacios de Banach

C. González *and C. Palencia †

Abstract

We consider an abstract quasilinear parabolic problem

$$u'(t) = A(u(t))u(t); \quad u(t_0) = u_0,$$

where $A(u) : D_u \subset X \to X$, $u \in V$, is a family of sectorial operators in a Banach space X. This problem is discretized in time by means of an L(θ)-stable Runge-Kutta. We prove that the resulting discretization is stable, under some natural assumptions on the relative Lipschitz variation of $A(u)$ with respect u. Our results are applicable to the analysis of quasilinear parabolic problems in the L^p norms.

1 Introducción

Sea X un espacio de Banach complejo y sea $V \subset X$.

En esta comunicación se estudian las discretizaciones en tiempo del problema parabólico casilineal dado por la ecuación

$$(1) \qquad \begin{cases} u'(t) &= A(u(t))u(t), \qquad t \in I, \\ u(t_0) &= u_0 \in D(u_0), \end{cases}$$

donde para cada $u \in V$, $A(u) : D(u) \subset X \to X$ es un operador sectorial con dominio denso.

En este primer estudio nos reducimos al caso más sencillo en el cual el dominio $D(u)$ es independiente de u para $u \in V$. Para $\theta \in [0, \pi/2]$, definimos el sector del plano complejo

$$S_\theta = \{z \in C : |\arg(-z)| \le \theta\}.$$

El carácter sectorial es uniforme en el siguiente sentido

*Departamento de Matemática Aplicada y Computación, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain, email: cesareo@mac.cie.uva.es

†Departamento de Matemática Aplicada y Computación, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain, email: palencia@cpd.uva.es

H0 existen $M \geq 1$ y $\theta \in [0, \pi/2)$ tal que, para $z \notin S_\theta$ ó $z = 0$ y $u \in V$, la resolvente $(z - A(u))^{-1}$ está definida y además

$$\|(z - A(u))^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |z|}.$$

En lo sucesivo el dominio fijo $D(u)$, $u \in V$, se denota por X_1. Se supondrá que X_1 está dotado de la norma del grafo correspondiente a un operador $A(u^*)$ donde u^* se selecciona en V. También denotaremos $X_0 = X$. X_η, $0 \leq \eta \leq 1$, es la familia de espacios de interpolación de Calderón. Un tratamiento extenso de estos espacios aparece en [4, 24]. Sólo damos aquí unas notas acerca de ellos.

Se demuestra en [24] que si los operadores satisfacen la hipótesis H0, y $D(u) = X_1$, para $u \in V$, entonces el espacio de interpolación X_γ, para $0 \leq \gamma \leq 1$, es $(D((-A(u))^\gamma), \|\cdot\|_\gamma)$, independientemente del $u \in V$. La norma $\|\cdot\|_\gamma$ se puede tomar pues como

$$\|x\|_\gamma = \|(-A(u))^\gamma x\|,$$

para $x \in D((-A(u))^\gamma)$, donde u se fija en V.

Se tiene así una cadena de espacios X_γ, $0 \leq \gamma \leq 1$, tales que si $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1$ entonces

$$D = X_1 \hookrightarrow X_{\gamma_2} \hookrightarrow X_{\gamma_1} \hookrightarrow X_0 = X,$$

donde las inclusiones son continuas y densas. Se verifica también que, dado $x \in X_{\gamma_2}$,

$$\|x\|_{\gamma_1} \leq \|x\|_0^{1-\gamma_1/\gamma_2} \|x\|_{\gamma_2}^{\gamma_1/\gamma_2}.$$

Alternativamente se podrían utilizar los espacios de interpolación real (ver [4, 6, 24]).

Además necesitaremos otra hipótesis acerca de la variación de $A(u)$ con respecto de u. Dados $\mu \in [0, 1]$ y un subconjunto $S_\mu \subset X_\mu$ denotamos $S_\sigma = S_\mu \cap X_\sigma$, para $\mu \leq \sigma \leq 1$.

H1 Se supone que V_γ es abierto en X_γ, para cierto $\gamma \in [0, 1)$, y que existe una constante L positiva tal que

$$\|A(u_1)x - A(u_2)x\| \leq L\|A(u_1)x\|\|u_1 - u_2\|_\gamma,$$

para $u_1, u_2 \in V_\gamma$, $x \in X_1$.

Esta condición puede también escribirse de forma más compacta como

$$A(\cdot) \in \mathcal{C}^{1-}(V_\gamma, \mathcal{L}(X_1, X_0)).$$

Observemos que en virtud de H1 selecciones distintas de puntos u^* en V_γ dan lugar a normas equivalentes en X_1. En consecuencia los espacios X_η, $0 < \eta < 1$, son independendientes de la selección del punto $u^* \in V_\gamma$.

Señalemos que es posible considerar la hipótesis menos exigente que H1

$$A(\cdot) \in \mathcal{C}^{\rho}(V_\gamma, \mathcal{L}(X_1, X_0)), \qquad \rho \in (0,1),$$

(ver [22]). Ahora bien, bajo esta hipótesis más amplia debe imponerse también la compacidad de las resolventes de los operadores $A(\cdot)$, ya que la técnica utilizada se basa en el Teorema de Schauder de punto fijo.

Nos restringimos a semidiscretizaciones basadas en los métodos Runge-Kutta. Para aplicar el método numérico consideramos una sucesión $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ de puntos en el intervalo I con paso fijo $h = t_{n+1} - t_n$, para $0 \le n \le N-1$. El método Runge-Kutta, aplicado al problema (1), se escribe en la forma

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i A(U_n^i) U_n^i, \tag{2}$$

donde U_n^i son las etapas intermedias del método que han de verificar las ecuaciones

$$U_n^i = u_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} A(U_n^j) U_n^j, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{3}$$

El primer problema que surge es precisamente el estudio de la resolubilidad de las ecuaciones para las etapas intermedias, es decir, la existencia de solución del sistema (3). Es conveniente reescribir (3) en la notación más compacta

$$\mathbf{U} = \mathbf{e} \otimes u + h\mathcal{A}B(\mathbf{U})\mathbf{U}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{U} = [U^1, \ldots, U^s]$, y $B(\mathbf{U})$ es el operador definido de X_1^s en X_0^s dado por $\mathrm{diag}(A(U^1), \ldots, A(U^s))$. Probamos que si el paso h, con el que se aplica el método, es suficientemente pequeño y si $u \in V_\beta$, $\gamma < \beta < 1$ entonces (4) es resoluble. De esta forma las ecuaciones (2) y (3) definen un operador no lineal $\mathcal{N}(t_{n+1}, t_n, u_n)$ que envía u_n, la solución numérica en el nivel de tiempo t_n, en u_{n+1} la solución numérica en el nivel t_{n+1}, de suerte que el semiflujo discreto preserva V_β. Este operador admite la siguiente representación

$$\mathcal{N}(t_{n+1}, t_n, u_n) = u_n + h\mathbf{b}^T B(U_n)(\mathcal{I} - h\mathcal{A}B(U_n))^{-1}\mathbf{e} \otimes u_n$$

para $0 \le n \le N-1$. El resultado principal que establecemos es la estabilidad de este esquema numérico, para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, bajo la hipótesis de la L(θ)-estabilidad del método. Nuestro teorema de estabilidad 2, asegura que

$$\|\mathcal{N}(t_N, t_0, u_0) - \mathcal{N}(t_N, t_0, v_0)\|_\beta \le C\|u_0 - v_0\|_\beta,$$

para u_0, $v_0 \in V_\beta$ y $t_N - t_0 < T$, donde C depende del problema y del método. Además se sugiere la manera de extender estos resultados a intervalos de tiempo

del mismo tamaño que los dominios de definición de las soluciones. Esto se consigue a través del estudio de la convergencia.

Notemos que nuestros resultados son acordes con su contrapartida continua. Así en [2] se prueba, bajo las mismas hipótesis H0 y H1, que el problema (1) tiene solución para $u_0 = V_\beta = X_\beta \cap V_\gamma$ y tiempos suficientemente pequeños. Se define de esta forma un semiflujo en V_β, del que se establece la dependencia tipo Lipschitz en X_β, respecto del dato inicial.

La única referencia de la que disponemos en relación con las discretizaciones de problemas casilineales es [14]. Las hipótesis impuestas al método en [14] son más amplias, pues sólo se exige la A(θ)-estabilidad fuerte del método. Como contrapartida la elección del marco funcional de [14], los tripletes de Lions-Gelfand, es más restrictiva. Esta elección facilita sobremanera el estudio de la convergencia, pues permite el uso de la transformada de Fourier y las igualdades de Parseval. Además, en [14], no se estudia la estabilidad.

2 Resultados principales

Teorema 1 *Supongamos que los operadores $A(w)$, $w \in V_\gamma$, del problema (1) verifican las hipótesis H0 y H1 y que el método Runge-Kutta dado por las ecuaciones (2) y (3) es L(θ)-estable. Sean $\gamma < \eta < 1$ y $u \in V_\eta$. Entonces existe $h^* > 0$ dependiendo sólo de M, de θ, del método Runge-Kutta y de $\|u\|_\eta$, tal que el sistema (4) es resoluble con unicidad para todo $0 < h < h^*$, es decir existe $\mathbf{U} \in V_\gamma^s$ tal que se verifica la ecuación (4). Además existe una constante K^* positiva dependiendo sólo de M, θ, del método Runge-Kutta y de h^* tal que*

$$\|(\mathcal{I} - h\mathcal{A}B(\mathbf{U}))^{-1}\|_{\mu\to\mu} \le K^*, \qquad \|(\mathcal{I} - h\mathcal{A}B(\mathbf{U}))^{-1}\|_{0\to 1} \le \frac{K^*}{h},$$

para $0 \le \mu \le 1$ y $0 < h < h^*$.

Teorema 2 *Supongamos que el problema parabólico casilineal (1) verifica las condiciones H0 y H1 y que el método Runge-Kutta dado por (2) y (3) es L(θ)-estable. Sean u_0, $v_0 \in V_\beta$, y sea W_γ cerrado en X_γ tal que v_0, $u_0 \in W_\gamma \subset V_\gamma$. Tomemos $\eta \in (\gamma, \beta)$ entonces existen constantes $K > 0$, $\delta > 0$ y $T > 0$, que sólo dependen de M, θ, L, del método Runge-Kutta, de $\mathrm{dist}_{X_\eta}(u_0, \partial W_\eta)$, de $\mathrm{dist}_{X_\eta}(v_0, \partial W_\eta)$, de $\|u_0\|_\beta$ y de $\|v_0\|_\beta$ tales que*

$$\mathcal{N}(t_N, t_0, u_0),\ \mathcal{N}(t_N, t_0, v_0) \in V_\beta, \tag{5}$$

y también se verifica el siguiente estimativo

$$\|\mathcal{N}(t_N, t_0, u_0) - \mathcal{N}(t_N, t_0, v_0)\|_\beta \le K\|u_0 - v_0\|_\beta, \tag{6}$$

siendo $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ una sucesión arbitraria de niveles de tiempo en el intervalo I con paso fijo $h \le \delta$ y $t_N - t_0 \le T$.

La prueba de estos resultados esta basada en los resultados sobre la estabilidad de discretizaciones para el problema lineal no autónomo

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u'(t) & = & A(t)u(t), & t \in I, \\ u(t_0) & = & u_0 \in D(t_0), & \end{array} \right. \tag{7}$$

donde $A(t) : D(t) \subset X \to X$, $t \in I$, es una familia de operadores lineales con dominio denso $D(t)$ (ver [1]). El resultado necesario en la demostración es la estabilidad de las discretizaciones del problema anterior bajo las siguientes hipótesis:

1. Sectorialidad. El problema de valores iniciales asociado con $A(t^*)$, para cada t^* fijo en I es parabólico en el sentido descrito antes.

2. La dependencia de los operadores $A(t)$ con respecto a t es de continuidad Hölder en un sentido adecuado.

Tanto de estos resultados como de los resultados de esta comunicación aparece la prueba en [7, 8].

Se hace también un boceto acerca de la posibilidad de globalizar el resultado de estabilidad local anterior. Esto nos conduce también a extender el estimativo de estabilidad a intervalos más amplios.

Suponemos que nos encontramos en las hipótesis de los Teoremas 1 y 2. Se supone además que existe solución $u(t)$ para el problema (1) en I con condición inicial $u(t_0) = u_0 \in V_\beta$ y que ésta permanece acotada como función con valores en X_β. Se supone además que existe la derivada de orden $q+1$, siendo q el orden de las etapas del método, y que $u^{(q+1)}(t) \in \mathcal{L}^1(I, X_\beta)$. No hacemos hipótesis sobre la derivabilidad de $A(u(t))$, por lo que el orden de convergencia que establecemos muy posiblemente no será óptimo (comparar con [16]).

Se considera $t_0 < \cdots < t_N$ una sucesión finita de tiempos en I y sea $h = t_{j+1} - t_j$, $0 \leq j \leq N-1$, el paso del método Runge-Kutta. Si hacemos la diferencia entre el esquema numérico aplicado a la solución continua y el mismo esquema numérico, trás resolver las ecuaciones y acotarlas se obtiene que los errores de truncación $\tau_{n+1} = u_{n+1} - u(t_{n+1})$ estan acotados por

$$\|\tau_{n+1}\|_\beta \leq Ch^q \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(q+1)}(t)\|_\beta \, dt. \tag{8}$$

Una vez estimados los errores de truncación procedemos a acotar el error global mediante la bien conocida descomposición

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t_n, t_0, u_0) - u(t_n) = {} & \mathcal{N}(t_n, t_0, u_0) - \mathcal{N}(t_n, t_1, u(t_1)) + \mathcal{N}(t_n, t_1, u(t_1)) \\ & - \mathcal{N}(t_n, t_2, u(t_2)) + \cdots + \mathcal{N}(t_n, t_{n-1}, u(t_{n-1})) - u(t_n). \end{aligned}$$

Si se toman normas en la expresión anterior y la diferencia $t_n - t_0$ es suficientemente pequeña como para que se verifique el Teorema 2 entonces

$$\|\mathcal{N}(t_n, t_0, u_0) - u(t_n)\|_\beta \leq K\|\tau_1\|_\beta + K\|\tau_2\|_\beta + \cdots + \|\tau_{n+1}\|_\beta.$$

Aplicando el estimativo (8) se obtiene finalmente

$$\|\mathcal{N}(t_n, t_0, u_0) - u(t_n)\|_\beta \leq Kh^q \int_{t_0}^{t_n} \|u^{(q+1)}(t)\|_\beta \, dt.$$

Se ha probado entonces que si h es suficientemente pequeño y $t_n - t_0$ también lo es, nuestro método numérico converge con el orden de las etapas. Esto se verifica hasta cierto $t_n = t_N$ tal que $t_N - t_0 \leq T$ y T es la constante seleccionada en el Teorema 2.

Por otra parte, para poder extender el Teorema 2 se selecciona h tal que

$$Kh^q \int_{t_0}^{t_N} \|u^{(q+1)}(t)\|_\beta \, dt \leq \mathrm{dist}_\beta(u(t_N), \partial V_\beta),$$

y se aplica de nuevo el método durante otro intervalo de tiempo $t_{N_1} - t_N$ suficientemente pequeño. Aquí se verifica también el teorema de estabilidad local, con lo que se podrían extender nuestros resultados a este nuevo intervalo $[t_0, t_{N_1}]$. Esto se puede seguir haciendo mientras exista solución del problema teórico. Nótese que la constante h^* podría variar según avanzamos en tiempo.

Agradecimientos. El primer autor ha sido financiado por "Universidad de Valladolid" bajo Prog. 541A, Apl. 644. El segundo autor ha sido financiado por DGICYT PB-0254.

References

[1] P. Acquiestapace, *Abstract linear nonautonomous parabolic equations: A survey*, Ed. G. Dore, A. Favini, E. Obrecht, A. Venni. Diff. Eq. in Banach spaces. Proceedings 1991. Lect. Notes in Pure and Applied Math. 148, Dekker (1993).

[2] H. Amann, *Quasilinear evolution equations and parabolic systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 293 (1986), pp. 191-227.

[3] H. Amann, *Dinamic theory of quasilinear parabolic equations - I. Abstract evolution equations*, Nonlin. Anal. Th. Meth. and Appl., 12 (1988), pp. 895-919.

[4] J. Bergh and J. Loefstroem, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] P. Brenner, V. Thomee, *On rational approximations of semigroups*, SIAM J. Numer. Anal., 16 (1979), pp. 683-694.

[6] G. Dore and A. Favini, *On the equivalence of certain interpolation methods*, Boll. Un. Mat. Ital., 1 (1987), pp. 1227-1238.

[7] C. González, *Discretizaciones en tiempo de problemas parabólicos en espacios de Banach*, Tesis Doctoral, U. Valladolid.

[8] C. González, C. Palencia, *Stability of Runge–Kutta method for abstract quasilinear parabolic problems*, en preparación.

[9] E. Hairer and S. P. Norsett, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin (1988).

[10] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lect. Notes Math. 840, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[11] R. Hersh and T.Kato, *High-accuracy stable difference schemes for well-posed initial-value problems*, SIAM J. Numer. Anal., 16 (1979), pp. 670-682.

[12] M. Le Roux, *Semidiscretization in time for parabolic problems*, Math. Comp., 33 (1979), pp. 919-931.

[13] Ch. Lubich and O. Nevanlinna, *On resolvent conditions and stability estimates*, BIT, 31 (1991), pp 293-313.

[14] Ch. Lubich and A. Ostermann, *Runge-Kutta approximation of quasilinear parabolic equations*, aparecerá en Math. Comp..

[15] A. Lunardi, *Abstract quasilinear parabolic equations*, J. Diff. Eq., 58 (1985), pp. 228-242.

[16] A. Ostermann and M. Roche, *Runge-Kutta methods for partial differential equations and fractional order of convergence*, Math. Comp., 59 (1992), pp. 403-420.

[17] C. Palencia, *A stability result for sectorial operators in Banach spaces*, SIAM J. Numer. Anal., 30 (1993), pp 1373-1384.

[18] C. Palencia, *On the stability of variable stepsize rational approximations of holomorphic semigroups*, Math. Comp., 62 (1994), pp. 93-103.

[19] C. Palencia, *Stability of rational multistep approximations of holomorphic semigroups*, Math. Comp. 64, (1995), pp. 591-599.

[20] C. Palencia, *Maximum norm analysis of completely discrete finite element methods for parabolic problems*, aparecerá en SIAM J. Numer. Anal..

[21] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1983).

[22] P. E. Sobolevskii, *Equations of parabolic type in Banach space*, Amer. Math. Soc. Transl., 49 (1966), pp. 1-62.

[23] H. Tanabe, *Equations of Evolution*, Pitman, London, 1979.

[24] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Noth-Holland, Amsterdam, 1978.