COMPORTAMIENTO PARA TIEMPOS GRANDES EN ALGUNAS ECUACIONES DE HAMILTON–JACOBI.

G. Díaz y J.M. Rey
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
Madrid 28040, España.

1 Presentación.

La presente contribución trata de clasificar los distintos comportamientos, para tiempos grandes, de las soluciones del problema de valor inicial

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} u_t - \mathcal{H}(x,u,\nabla u) = 0 & \text{en } \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathbf{T}_\infty[\\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}} \end{array} \right.$$

con $\mathbf{T}_\infty \leq +\infty$. Con el fin de simplificar la exposición, nos limitaremos a hamiltonianos significativamente adecuados de la forma

$$\mathcal{H}(x,r,p) = \mathcal{H}(p) - \lambda\beta(r) - f(x).$$

Puesto que nuestro objetivo son ese tipo de propiedades cualitativas, omitimos resultados de existencia y supondremos que $(\mathcal{P})$ admite soluciones de viscosidad. Más concretamente, nos interesamos en el estudio de las siguientes propiedades

$$\left\{\begin{array}{l} \text{decaimientos} \left\{\begin{array}{l} \text{tiempos largos} \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{potenciales}\\ \text{exponenciales}\end{array}\right. \\ \text{extinción en tiempo finito}\end{array}\right. \\ \text{crecimientos} \left\{\begin{array}{l} \text{tiempos largos} \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{potenciales}\\ \text{exponenciales}\end{array}\right. \\ \text{explosión en tiempo finito}\end{array}\right. \\ \text{no existencia}\end{array}\right.$$

para los que empleamos las siguientes técnicas: comparaciones (locales y globales), soluciones de similaridad, análisis asintótico,... a partir de los siguientes comportamientos de los datos

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{\mathcal{H}(p)}{|p|^{\mathrm{m}}} = \mathrm{R} > 0 \quad (\mathrm{m} \geq 1)$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\beta(r)}{r^q} = \lambda \geq 0 \quad (q \in \mathrm{I\!R})$$

y

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{1+\alpha}} = A > 0 \quad (\alpha \in \mathrm{I\!R}).$$

Consecuentemente, el estudio del *problema modelo*

$$(\mathcal{P})_{\lambda,\alpha,\mathrm{m},q} \left\{ \begin{array}{ll} u_t - \mathrm{R}|\nabla u|^{\mathrm{m}} + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}} \times \mathrm{I\!R}_+ \\ u(x,0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}} \end{array} \right.$$

juega un papel esencial sobre el que tratará, fundamentalmente, esta contribución. Con el fin de abreviar, detallaremos las ideas principales del caso sin perturbar $\lambda = 0$ para el que, en algunas situaciones, se admiten las *fórmulas de representación de Lax–Oleinik*:

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{y\in\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}} \left\{ A|y|^{1+\alpha} - (\mathrm{m}-1)\left(\frac{|x-y|^{\mathrm{m}}}{\mathrm{Rm}^{\mathrm{m}}t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}} \right\}, \ \mathrm{m} > 1$$

y

$$\mathcal{U}(x,t) = A \sup_{|y-x|\leq \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha}, \ \mathrm{m} = 1.$$

También para $\lambda > 0,\ \mathrm{m} = 1$ y $0 < q < 1$ se tiene la representación

$$u(x,t) = \sup_{y\in\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} \left\{ \left(\left[(u_0(y))^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \right\}$$

(veáse [**Di-Re1**]).

Entre otras propiedades, cabe reseñar que para $\lambda = 0$ y datos iniciales u_0 localmente superiormente acotados, la fórmula de Lax–Oleinik define una función que verifica la ecuación en derivadas parciales en el sentido de la viscosidad (ver [**Cr-Li**], [**Cr-Ev-Li**], [**Cr-Is-Li**], [**Di-Re2**], ...) y que realiza, exclusivamente, la envuelta semicontinua superior del dato inicial, es decir,

$$\mathcal{U}(x,0^+) = \limsup_{y\to x} u_0(y) \doteq (u_0)^*(x),\ \ x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}.$$

Las ecuaciones que tratamos surgen en contextos muy diversos de las aplicaciones: Geometría Optica, semiconductores,...radicando nuestro interés principal en su intervención en la Teoría de Control Optimo Determinista, de las que las anteriores fórmulas de representación son una buena muestra.

Como hemos comentado, ceñiremos nuestro estudio al problema modelo $(\mathcal{P})_{\lambda,\alpha,\mathrm{m},q}$ del que el siguiente es un sumario de las propiedades obtenidas:

$$\bullet\ \lambda = 0 \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{m} > 1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay solución} \\ \text{Solución constante} \\ \text{Crecimiento potencial} \\ \text{Blow–up} \end{array} \right. \\ \mathrm{m} = 1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Existencia fuera de conos} \\ \text{Solución constante} \\ \text{Crecimiento potencial} \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{en función de } \alpha.$$

$$\bullet\ \text{Convergencia } \mathrm{m} \to 1 \quad (\lambda = 0).$$

$$\bullet\ \lambda > 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{m} > 1 \\ \mathrm{m} = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay solución} \\ \text{Extinción} \\ \text{Decaimiento potencial} \\ \text{Decaimiento exponencial} \\ \text{Crecimiento potencial} \\ \text{Blow–up} \end{array} \right\} \text{en función de } \alpha \text{ y } q.$$

Una versión detallada de los resultados que vamos a comentar es desarrollada, junto con otras propiedades, en [**Di-Re2**].

2 Crecimiento superlineal $(\mathrm{m} > 1)$

La solución del problema de Cauchy

$$(\mathcal{P})_{\alpha,\mathrm{m}} \left\{ \begin{array}{ll} u_t - \mathrm{R}|\nabla u|^{\mathrm{m}} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{array} \right.$$

viene dada por la *fórmula de Lax–Oleinik*

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \psi(y;x,t)$$

siendo

$$\psi(y;x,t) = A|y|^{1+\alpha} - (\mathrm{m}-1)\left(\frac{|x-y|^{\mathrm{m}}}{\mathrm{R}\mathrm{m}^{\mathrm{m}}t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}}, \ y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Nótese que podemos escribir

$$\psi(y;x,t) = A|y|^{1+\alpha} + \mathcal{S}(x-y,t), \ y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

donde la función

$$\mathcal{S}(x,t) = -(\mathrm{m}-1)\left(\frac{|x|^{\mathrm{m}}}{\mathrm{R}\mathrm{m}^{\mathrm{m}}t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}}, \ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \ t > 0$$

es *solución de similaridad* de la ecuación

$$u_t - \mathrm{R}|\nabla u|^{\mathrm{m}} = 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+.$$

Aunque no comentamos aquí cuestiones de Control Determinista, señalamos que el valor $y_{\max}(x,t);x,t)$ verificando

$$\mathcal{U}(x,t) = \psi(y_{\max}(x,t);x,t)$$

puede ser considerado como un *control óptimo*.

Ante todo, se observa

$$\mathcal{U}(x,t) \geq \psi(y;x,t), \; y \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$$

y, en particular,

$$\mathcal{U}(x,t) \geq \psi(x;x,t) = A|x|^{1+\alpha}, \; x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}.$$

Puesto que

$$\psi(0;x,t) = +\infty \;\text{ si }\; \boxed{1+\alpha < 0}$$

y

$$\psi(y;x,t) \sim A|y|^{1+\alpha} \;\text{ para }\; |y| \to \infty \;\text{ si }\; \boxed{1+\alpha > \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-1}}$$

se sigue

$$\mathcal{U}(x,t) = +\infty \;\text{ si }\; t > 0 \;\text{ para }\; \alpha \notin \left[-1, \frac{1}{\mathrm{m}-1}\right],$$

por lo que, obviamente, nos ocuparemos del *intervalo de exponentes admisibles*

$$I_\alpha = \left[-1, \frac{1}{\mathrm{m}-1}\right].$$

Distinguimos, por tanto, tres posibles situaciones:

a) $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow \psi(y;x,t) = A + \mathcal{S}(x-y,t)$. Entonces,

$$\mathcal{U}(x,t) = \psi(x;x,t) = A, \; x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}, \; t \geq 0.$$

b) $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{\mathrm{m}-1}}$ En este caso, las propiedades

$$\psi(y;x,t) \sim -(\mathrm{m}-1)\left(\frac{|y|^{\mathrm{m}}}{\mathrm{Rm}^{\mathrm{m}} t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}} \leq 0 \;\text{ si }\; |y| \to \infty$$

y

$$\mathcal{U}(x,t) \geq \psi(x;x,t) = A|x|^{1+\alpha} \geq 0, \; x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$$

implican la existencia de $y_{\max} = y_{\max}(x,t) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$ con

$$\mathcal{U}(x,t) = \psi(y_{\max}(x,t);x,t).$$

Además, $y_{\max}(x,t)$ queda caracterizado por

$$(1+\alpha)A|y_{\max}(x,t)|^{\alpha} = \left(\frac{|x-y_{\max}(x,t)|}{\mathrm{Rm}t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}}$$

dando lugar a

$$\mathcal{U}(x,t) = A|y_{\max}|^{1+\alpha}\left[1-\frac{\mathrm{R}(\mathrm{m}-1)(1+\alpha)^{\mathrm{m}}A^{\mathrm{m}-1}}{|y_{\max}|^{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}}t\right].$$

En particular, haciendo $t \to \infty$, se tiene

$$|y_{\max}(x,t)| \sim \left[\mathrm{Rm}((1+\alpha)A)^{\mathrm{m}-1}t\right]^{\frac{1}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}}$$

con lo que

$$\mathcal{U}(x,t) \sim C_{\infty}t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}} \quad \text{si} \quad t\to\infty, \ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

siendo

$$C_{\infty} \doteq (1-\alpha(\mathrm{m}-1))\left[\mathrm{R}^{1+\alpha}(A\mathrm{m}^{\alpha})^{\mathrm{m}}(1+\alpha)^{(1+\alpha)(\mathrm{m}-1)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}}.$$

Observación 1

Las líneas anteriores permiten los siguientes comentarios:

1. Podemos determinar la evolución *exacta* de $x = 0$:

$$\mathcal{U}(0,t) = C_{\infty}t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}}, \ t \geq 0.$$

2. En el caso u_0 'lipschitziano' ($\alpha = 0$) se tiene

$$|y_{\max}(x,t)| = |x| + \mathrm{Rm}A^{\mathrm{m}-1}t$$

que permite una representación 'sencilla' de la solución:

$$\mathcal{U}(x,t) = A|x| + \mathrm{R}A^{\mathrm{m}}t, \ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \ t \geq 0.$$

Como se aprecia, expresa una *traslación en el tiempo* del dato inicial.

3. Comportamiento asintótico temporal *uniforme* en x. De la misma forma, los *controles óptimos* son uniformes en x para $t \to \infty$.

4. El *rango de exponentes admisibles* para el dato inicial

$$-1 \leq \alpha < \frac{1}{\mathrm{m}-1}$$

hace que en el comportamiento asintótico, de orden $t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}}$, *recorra todas las potencias.*[1] $\square$

c) $\boxed{\alpha = \frac{1}{\mathrm{m}-1}}$ Como ahora

$$\psi(y;x,t) \sim \left[A - (\mathrm{m}-1)\left(\frac{1}{\mathrm{R}\mathrm{m}^{\mathrm{m}} t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}}\right] |y|^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-1}} \quad \text{si} \quad |y| \to \infty$$

denotando

$$\mathbf{T}_\infty \doteq \frac{1}{\mathrm{R}\mathrm{m}^{\mathrm{m}}}\left(\frac{\mathrm{m}-1}{A}\right)^{\mathrm{m}-1}$$

podemos distinguir tres casos a partir del signo del coeficiente de $|y|^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-1}}$:

$$\begin{cases} t > \mathbf{T}_\infty & \Rightarrow \quad \mathcal{U}(x,t) = +\infty \\ t = \mathbf{T}_\infty & \Rightarrow \quad \text{(se detallará más adelante)} \\ t < \mathbf{T}_\infty & \Rightarrow \quad \mathcal{U}(x,t) = \psi(y_{\max}; x, t). \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{U}$ sólo tiene sentido en la región $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}} \times [0, \mathbf{T}_\infty[$. Trabajando con la fórmula de representación se obtiene el *control óptimo*

$$y_{\max}(x,t) = \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} x, \;\; x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$$

que conduce, para $x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$ y $0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$, a

$$\mathcal{U}(x,t) = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_\infty - t) = A|x|^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-1}} \left(\frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}}.$$

---

[1] Desde las constantes para $\alpha = -1$ hasta el 'infinito' para $\alpha \to \frac{1}{\mathrm{m}-1}$, caso en el que cabe esperar una situación completamente distinta a las anteriores.

Observación 2

De nuevo, podemos sumarizar algunos comentarios:

1. Como ya sabemos, de una forma *global*, se verifica

$$\mathcal{U}(x,t) = +\infty \quad \text{si} \quad t > \mathbf{T}_\infty, \ \ x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}},$$

mientras que el comportamiento $t \to \mathbf{T}_\infty^-$ tiene un carácter *puntual.*

2. Un caso especial aparece cuando $x = 0$:

$$\mathcal{U}(0,t) = A \sup_{y \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}} \left\{ \left(1 - (\mathrm{m}-1) \left(\frac{1}{\mathrm{Rm}^{\mathrm{m}} t} \right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}} \right) |y|^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-1}} \right\}$$

de donde

$$y_{\max}(0,t) = \begin{cases} 0, & t < \mathbf{T}_\infty \\ \text{arbitrario}, & t = \mathbf{T}_\infty \end{cases}$$

mientras que para $t > \mathbf{T}_\infty$:

$$\sup_{y \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}} \psi(y;0,t) = +\infty$$

lo que hace que

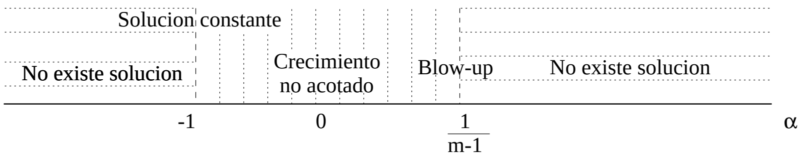
$$\mathcal{U}(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \mathbf{T}_\infty \\ +\infty, & t \ge \mathbf{T}_\infty. \end{cases}$$

El peculiar comportamiento

$$\mathcal{U}(x,\mathbf{T}_\infty) = \begin{cases} +\infty, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es estudiado, con mayor profundidad, en [**Di-Re2**]. □

A continuación mostramos un gráfico y un cuadro en el que se resume el comportamiento asintótico de la solución de $(\mathcal{P})_{\alpha,\mathrm{m}}$ con $\mathrm{m} > 1$ según los valores de α.



CUADRO RESUMEN (m > 1)		
COMPORTAMIENTOS MAXIMALES FINALES		
α	τ_∞	Convergencias
$\alpha < -1$	0	No hay solución
$\alpha = -1$	$+\infty$	$\mathcal{U}(x,t) = A,\ t \geq 0$
$-1 < \alpha < \dfrac{1}{\mathrm{m}-1}$	$+\infty$	$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathcal{U}(x,t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}}} = C_\infty$
$\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{m}-1}$	$\mathbf{T}_\infty$	$\mathcal{U}(x,t) = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_\infty - t),\ 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$
$\alpha > \dfrac{1}{\mathrm{m}-1}$	0	No hay solución

3 Crecimiento lineal $(\mathrm{m} = 1)$

Consideremos ahora el problema de Cauchy

$$(\mathcal{P})_{\alpha,1} \begin{cases} u_t - \mathrm{R}|\nabla u| = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

cuya solución viene dada por la *fórmula de Lax–Oleinik*

$$\mathcal{U}(x,t) = A \sup_{|y-x|\leq \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha}.$$

Para la elección $y = x$ se obtiene

$$\mathcal{U}(x,t) \geq A|x|^{1+\alpha},\ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Sea $y_{\max} = y_{\max}(x,t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)$ tal que

$$\mathcal{U}(x,t) = A|y_{\max}(x,t)|^{1+\alpha}.$$

Cálculos directos determinan

$$|y_{\max}| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leq \mathrm{R}t \\ |x| - \mathrm{R}t & \text{si} \quad |x| > \mathrm{R}t \end{cases} \quad \text{si} \quad \alpha + 1 < 0,$$

$$y_{\max} = y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x) \quad \text{si} \quad \alpha + 1 = 0$$

y

$$|y_{\max}| = |x| + \mathrm{R}t \quad \text{si} \quad \alpha + 1 > 0.$$

De esta forma obtenemos explícitamente

$$\mathcal{U}(x,t) = \begin{cases} A\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha} & \text{si} \quad \alpha < -1 \\ A & \text{si} \quad \alpha = -1 \\ A(|x| + \mathrm{R}t)^{1+\alpha} & \text{si} \quad \alpha > -1. \end{cases}$$

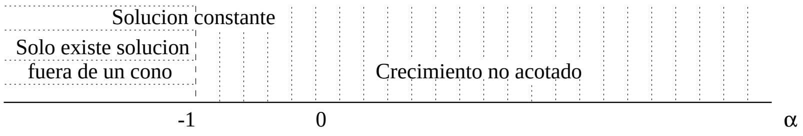
Observación 3

Para el caso $\alpha < -1$ se tiene

$$\mathcal{U}(x,t) = +\infty \quad \text{si} \quad |x| \leq \mathrm{R}t,$$

que expresa cómo se propaga la explosión inicial de $x = 0$ a lo largo del tiempo a través del cono de dependencia. □

Veamos un gráfico en el que se resume el comportamiento asintótico de la solución de $(\mathcal{P})_{\alpha,1}$ según los valores de α.



4 Convergencia m → 1.

Parece natural estudiar el tránsito de la solución $\mathcal{U}_{\alpha,\mathrm{m}}$ cuando $\mathrm{m} \to 1$ en función de los diversos valores de α :

1. $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow \mathcal{U}_{-1,\mathrm{m}}(x,t) \equiv A \equiv \mathcal{U}_{-1,1}(x,t)$.

2. $\boxed{\alpha > -1} \Rightarrow \left]1, 1+\dfrac{1}{\alpha}\right[\neq \emptyset$, con lo que

$$1 < \mathrm{m} < 1 + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow -1 < \alpha < \frac{1}{\mathrm{m}-1}.$$

Puesto que para $\alpha \in \left]-1, \dfrac{1}{\mathrm{m}-1}\right[$ se tiene

$$\mathcal{U}_{\alpha,\mathrm{m}}(x,t) \sim C_\infty t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(\mathrm{m}-1)}} \quad \text{para} \quad t \to \infty,$$

el límite $\mathrm{m} \to 1$ lleva, heurísticamente, a

$$\lim_{\mathrm{m}\to 1} \mathcal{U}_{\alpha,\mathrm{m}}(x,t) \sim A\mathrm{R}^{1+\alpha} t^{1+\alpha} \quad \text{si} \quad t \to \infty,$$

resultado acorde a

$$\mathcal{U}_{\alpha,1}(x,t) \sim A\mathrm{R}^{1+\alpha} t^{1+\alpha} \quad \text{si} \quad t \to \infty.$$

A partir de estimaciones locales del gradiente, en [**Di-Re2**] se muestra que, de hecho, se tiene la convergencia

$$\mathcal{U}_{\alpha,\mathrm{m}} \to \mathcal{U}_{\alpha,1} \quad \text{para} \quad \mathrm{m} \to 1$$

uniformemente en subconjuntos compactos.

3. $\boxed{\alpha = +\infty}$ Consideremos la sucesión

$$\left\{ \alpha(\mathrm{m}) \doteq \frac{1}{\mathrm{m}-1} \right\}_{\mathrm{m}>1}.$$

Ahora, la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla u|^{\mathrm{m}} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathbf{T}_\infty^{(\mathrm{m})}[\\ u(x,0) = A|x|^{1+\alpha(\mathrm{m})}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

viene dada, para $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ y $0 \leq t < \mathbf{T}_\infty^{(\mathrm{m})}$, por

$$\mathcal{U}_{\alpha(\mathrm{m}),\mathrm{m}}(x,t) = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_\infty^{(\mathrm{m})} - t)$$

donde

$$\mathcal{S}(x,t) = -(\mathrm{m}-1)\left(\frac{|x|^{\mathrm{m}}}{\mathrm{Rm}^{\mathrm{m}}t}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}}$$

y

$$\mathbf{T}_{\infty}^{(\mathrm{m})} \doteq \frac{1}{\mathrm{Rm}^{\mathrm{m}}}\left(\frac{\mathrm{m}-1}{A}\right)^{\mathrm{m}-1} \to \frac{1}{\mathrm{R}} = \mathbf{T}_{\infty}^{(1)} \quad \text{si} \quad \mathrm{m}\to 1.$$

Por otro lado,

$$\lim_{\mathrm{m}\to 1} A|x|^{1+\alpha(\mathrm{m})} = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ A, & |x|=1 \\ +\infty, & |x|>1. \end{cases}$$

En esta situación, la función límite

$$\mathcal{W}(x,t) \doteq \lim_{\mathrm{m}\to 1} \mathcal{U}_{\alpha(\mathrm{m}),\mathrm{m}}(x,t)$$

estará definida para $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ y $0 \le t < \dfrac{1}{\mathrm{R}}$. Cálculos directos permiten probar

$$\mathcal{W}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| + \mathrm{R}t < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad |x| + \mathrm{R}t \ge 1. \end{cases}$$

Además, $\mathcal{W}$ es solución de viscosidad de

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla u| \quad \text{si} \quad |x| + \mathrm{R}t < 1 \\ \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ +\infty, & |x| \ge 1. \end{cases} \end{cases}$$

Finalmente, por la propiedad del *cono de dependencia* (véase [**Di-Re2**]), que conduce a la *unicidad* de solución, se concluye

$$\mathcal{W}(x,t) = \mathcal{U}_{\infty,1}(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_{+}.$$

En los ejemplos modelos considerados los datos iniciales han sido, hasta el momento, continuos o semicontinuos superiormente. Ahora la solución de Lax–Oleinik describe la envuelta semicontinua superior del dato inicial:

$$\mathcal{U}(x,0^{+}) = (u_0)^{*}(x) = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ +\infty, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Observación 4

El valor $\alpha = +\infty$ también podría haberse abordado fijando previamente el valor $\mathrm{m} = 1$ y considerando la convergencia en el dato inicial. Concretamente, si $\sigma > 0$, la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = A|x|^{1+\sigma}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

viene dada por

$$\mathcal{U}_{\sigma,1}(x,t) = A(|x| + \mathrm{R}t)^{1+\sigma}, \ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \ t \geq 0.$$

De esta forma, la función límite

$$\mathcal{V}(x,t) \doteq \lim_{\sigma \to \infty} \mathcal{U}_{\sigma,1}(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| + \mathrm{R}t < 1 \\ A, & |x| + \mathrm{R}t = 1 \\ +\infty, & |x| + \mathrm{R}t > 1 \end{cases}$$

es solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla u| \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \\ \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ A, & |x| = 1 \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Finalmente, nótese

$$\mathcal{V}^*(x,t) = \mathcal{U}_{\infty,1}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| + \mathrm{R}t < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad |x| + \mathrm{R}t \geq 1. \end{cases} \quad \square$$

5 El problema perturbado: $\mathrm{m} \geq 1$ y $\lambda > 0$.

En el problema

$$(\mathcal{P})_{\lambda,\alpha,\mathrm{m},q} \begin{cases} u_t - \mathrm{R}|\nabla u|^{\mathrm{m}} + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

el parámetro $\lambda > 0$ nos sirve para distinguir un término de *perturbación* para el cual los valores de $q \in \mathbb{R}$ conducen a propiedades diferentes: *extinción,* *decaimiento potencial o exponencial, crecimiento no acotado* e incluso *blow–up*; finalmente el rango de $\alpha \in \mathbb{R}$ permite clasificar nuestro estudio a partir de los diversos datos iniciales *admisibles*.

Acompañamos este resumen con unas figuras que ilustran los resultados más significativos del problema modelo remitiéndonos, nuevamente, a [**Di-Re2**] para los detalles específicos.

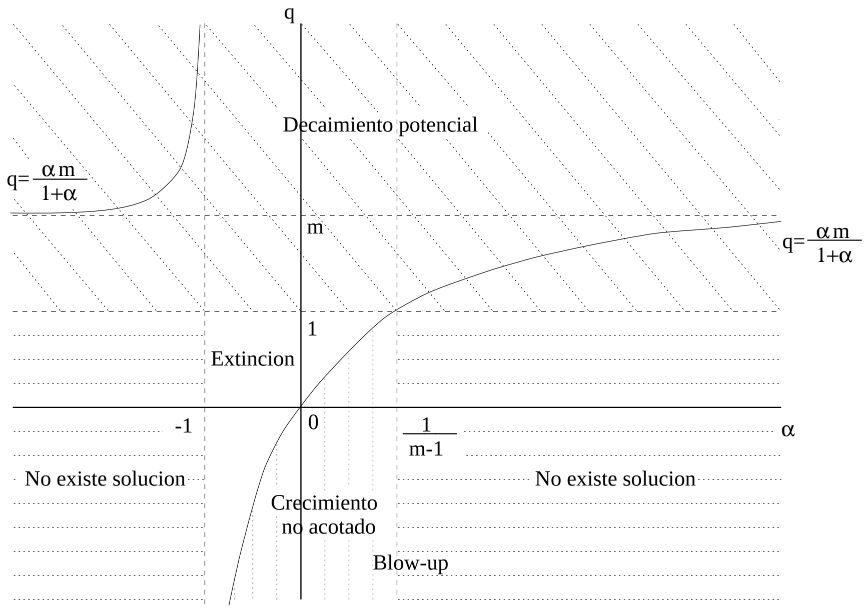


Figure 1: Comportamientos, para m > 1 y $\lambda > 0$, en el plano (α, q).

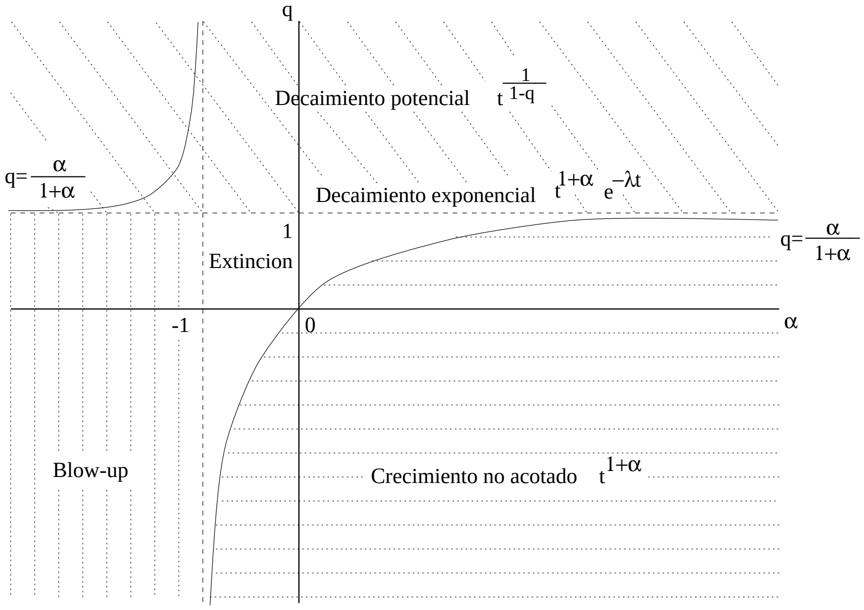


Figure 2: Comportamientos, para m $= 1$ y $\lambda > 0$, en el plano (α, q).

References

[Cr-Ev-Li] M.G.Crandall, L.C.Evans y P.L.Lions. *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984). 487–502.

[Cr-Is-Li] M.G.Crandall, H.Ishii y P.L.Lions. *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Diferential Equations.* Bull. Amer. Math. Soc. Vol **27**. No **1** (1992). 1–67.

[Cr-Li] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Viscosity Solutions of Hamilton Jacobi Equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983). 1–42.

[Di-Re1] G.Díaz y J.M.Rey. *Finite Extinction Time for Some Perturbed Hamilton–Jacobi Equations.* Applied Mathematics and Optimization. **27** (1993). 1–33.

[Di-Re2] G.Díaz y J.M.Rey. *Large time behaviour for solutions of some first order Hamilton–Jacobi equations.* To appear.