INTEGRABILIDAD DE CAMPOS VECTORIALES CUASI-HOMOGENEOS EN EL PLANO

J. Chavarriga, I. García y J. Giné

Departament de Matemática.
Universidad de Lleida.
Pl. Víctor Siurana, 1. 25003. Lleida.

El objetivo de este trabajo consiste en determinar los casos de integrabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano de la forma $\dot{x} = -y^{2p-1} + X_2(x,y)$, $\dot{y} = x2^{2q-1} + Y_2(x,y)$, siendo $X_2(x,y)$ y $Y_2(x,y)$ polinomios (p-q) cuasi-homogeneos de grados $2pq$-q+1 y $2pq$-p+1 respectivamente.

1 INTRODUCCIÓN

Se dice que un polinomio $X(x,y)$ es (p,q) *cuasi-homogéneo de grado* r, siendo p, q, $r \in N$, si verifica la siguiente propiedad

$$X(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda^r X(x,y)\ \forall \lambda \in \Re.$$

En el caso particular $p = q = 1$ la definición anterior coincide con la definición usual de polinomio homogéneo de grado r.

Consideramos los sistemas bidimensionales autónomos de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = X_n(x,y) + X_m(x,y),\ \dot{y} = Y_n(x,y) + Y_m(x,y) \tag{1}$$

donde $X_k(x,y)$, $Y_k(x,y)$ son polinomios (p,q) cuasi-homogéneos de grados respectivos $k - q + 2pq - 1$ y $k - p + 2pq - 1$ con $m > n$, siendo $k = \{n, m\}$. Estos sistemas fueron estudiados por primera vez en el caso $X_m(x,y) = Y_m(x,y) \equiv 0$ por Liapunov [Li].

Definimos las (p,q) *funciones trigonométricas generalizadas* $x(\varphi)=\cos(\varphi),\ y(\varphi)=\sin(\varphi)$ como las soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\tfrac{dx}{d\varphi} &= -y^{2p-1},\ \tfrac{dy}{d\varphi}=x^{2q-1},\\ x(0) &= p^{\frac{-1}{2q}},\ y(0)=0.\end{aligned}$$

Dichas funciones, fueron introducidas por Liapunov en sus estudios sobre la estabilidad de los puntos críticos degenerados [Li]. Recientemente se han utilizado para estudiar propiedades de ecuaciones diferenciales en el plano por Brumella y Miari [BrM], Dumortier y Rousseau [DuR] y Gassull y Prohens [GaP].

Efectuando el cambio de variables a *coordenadas polares generalizadas* dado por

$$x=r^p\cos(\varphi),\ y=r^q\sin(\varphi) \tag{2}$$

y el escalado de tiempo

$$\frac{dt}{ds}=r^{p+q-2pq} \tag{3}$$

el sistema (1) queda de la forma

$$\frac{dr}{ds}=P_n(\varphi)r^n+P_m(\varphi)r^m,\ \frac{d\varphi}{ds}=Q_n(\varphi)r^{n-1}+Q_m(\varphi)r^{m-1},$$

siendo

$$\begin{pmatrix} P_k(\varphi)\\ Q_k(\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^{2q-1}(\varphi) & \sin^{2p-1}(\varphi)\\ -q\sin(\varphi) & p\cos(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_k(\cos(\varphi),\ \sin(\varphi))\\ Y_k(\cos(\varphi),\ \sin(\varphi))\end{pmatrix} \tag{4}$$

donde $k=\{n,m\}$.

Finalmente haciendo el cambio $R=r^{m-n}$ y el escalado de tiempo $\frac{d\tau}{ds}=r^{n-1}$ obtenemos el sistema

$$\frac{dR}{d\tau}=(m-n)(P_n(\varphi)R+P_m(\varphi)R^2),\ \frac{d\varphi}{d\tau}=Q_n(\varphi)+Q_m(\varphi)R.$$

Una primera aproximación al estudio de la integrabilidad de estos sistemas es considerar $P_n(\varphi)\equiv 0$ y $Q_n(\varphi)\equiv 1$. En este caso, los grados de $X_n(x,y)$ y $Y_n(x,y)$ son respectivamente $2pq-q$ y $2pq-p$, que corresponden a un caso particular con *n=1* para el cual $X_n(x,y)=-y^{2p-1},\ Y_n(x,y)=x^{2q-1}$ siendo $X_m(x,y)$ y $Y_m(x,y)$ polinomios *(p,q)* cuasi-homogéneos de grados $m-q+2pq-1$ y $mp+2pq-1$ respectivamente. Estos sistemas generalizan los sistemas polinomiales con parte lineal de tipo centro y cuya parte no lineal son polinomios homogéneos del mismo grado, vease [Ch]

El objetivo del presente trabajo consiste en determinar los posibles casos de integrabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano de la forma

$$\dot{x} = -y^{2p-1} + X_2(x,y),\ \dot{y} = x^{2q-1} + Y_2(x,y), \tag{5}$$

siendo $X_2(x,y)$, $Y_2(x,y)$ polinomios *(p-q)* cuasi-homogeneos de grados $2pq - q + 1$, $2pq - p + 1$ respectivamente.

Observamos que el caso $p = q = 1$ corresponde al caso particular de sistemas cuadráticos ampliamente estudiados, ver por ejemplo [Sch].

Llamaremos *factor de divergencia nula* para el sistema (1) a una función *V(x, y)* tal que *V(x, y)* es solución particular de (1) y la divergencia del campo

$$C = \left(\frac{X_n(x,y) + X_m(x,y)}{V(x,y)},\ \frac{Y_n(x,y) + Y_m(x,y)}{V(x,y)}\right)$$

definida en $\Re^2\{(x,y)\ :\ \ V(x,y) = 0\}$ es idénticamente nula. En particular $\frac{1}{V(x,y)}$ es factor integrante del sistema (1). En el caso que $V(x,y) \equiv 1$ el sistema en hamiltoniano.

2 RESULTADOS PRINCIPALES

En este apartado enunciamos las conclusiones principales respecto a la integrabilidad de sistemas del tipo (4).

En primer lugar consideramos los sistemas polinomiales (1-2) cuasi-homogéneos, es decir, de la forma

$$\dot{x} = -y + a_1xy + a_2x^3,\ \dot{y} = x^3 + b_1y^2 + b_2x^2y + b_3x^4 \tag{6}$$

Se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 1. *El sistema (6) es integrable solo en los siguientes casos*: *(i)* $a_2 = b_2 = 0$; *(ii)* $a_1 = -2b_1$ y $b_2 = -3a_2$; *(iii)* $a_1 = b_1 + b_3$, $b_2 = -3a_2$ y $6a_2^2 + b_1b_3 + 2b_3^2 = 0$.

En segundo lugar estudiamos los sistemas polinómicos (1-q) cuasi-homogéneos con $q > 2$, es decir, los sistema de la forma

$$\dot{x} = -y + a_1xy + a_2x^{q+1},\ \dot{y} = x^{2q-1} + b_1y^2 + b_2x^qy + b_3x^{2q} \tag{7}$$

obteniendo el siguiente resultado

TEOREMA 2. *El sistema (7) es integrable solamente en los siguientes casos* *(i)* $a_2 = b_2 = 0$; *(ii)* $a_1 = -2b_1$, y $b_2 = -(q+1)a_2$.

Finalmente consideramos los sistemas polinómicos (p-q) cuasi-homogéneos con $p > 1,\ q > 2$, es decir

$$\dot{x} = -y^{2p-1} + X_2(x,y),\ \dot{y} = x^{2q-1} + Y_2(x,y), \tag{8}$$

siendo $X_2(x,y),\ Y_2(x,y)$ polinomios $(p-q)$ cuasi-homogéneos de grados $2pq-q+1$, $2pq-p+1$. Notemos que, por la definición de polinomio *(p-q)* cuasi-homogéneo, tenemos

$$X_2(x,y) = \sum_i a_i x^{A_i} y^{B_i},\ Y_2(x,y) = \sum_i b_i x^{C_i} y^{D_i}$$

donde

$$A_i p + B_i q = 2pq + 1 - q,\ C_i p + D_i q = 2pq + 1 - p, \tag{9}$$

siendo $A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i \in N$.

PROPOSICION 2. *Si p, q no son primos entre si, no existen $A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i \in N$ que verifiquen las condiciones (9).*

PROPOSICION 3. *Si p,q son primos entre si con $p > 1,\ q > 2$, los polinomios $X_2(x,y),\ Y_2(x,y)$ son de la forma*

$$X_2(x,y) = a_1 x^{q+\alpha} y^{p+\beta-1} + a_2 x^{2q+\alpha} y^{\beta-1},$$
$$Y_2(x,y) = b_1 x^{q+\alpha-1} y^{p+\beta} + b_2 x^{2q+\alpha-1} y^{\beta},$$

siendo $a_i,\ b_i \in \Re$ los coeficientes de los polinomios y α y β numeros enteros satisfaciendo las relaciones

$$\alpha p + \beta q = 1;\ 1 - q \leq \alpha < 0,\ 1 \leq \beta < p.$$

Utilizando las proposiciones 2 y 3,el sistema (8) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\ -y^{2p-1} + a_1 x^{q+\alpha} y^{p+\beta-1} + a_2 x^{2q+\alpha} y^{\beta-1}, \\ \dot{y} = &\ x^{2q-1} + b_1 x^{q+\alpha-1} y^{p+\beta} + b_2 x^{2q+\alpha-1} y^{\beta}. \end{aligned} \tag{10}$$

para estos sistemas tenemos el siguiente resultador

TEOREMA 3. *El sistema (10) con $p > 1$ y $q > 2$ es integrable sólo en el caso de que se cumplan las condiciones siguientes $a_2(\alpha + 2q) + \beta b_2 = 0,\ a_1(\alpha + q) + b_1(\beta + p) = 0$.*

3 INTEGRABILIDAD DE SISTEMAS POLINOMIALES (1-2) CUASI-HOMOGENEOS

PROPOSICION 1. Los sistemas de la forma (4) al ser transformados a coordenadas generalizadas mediante el cambio de variables (2) y el escalado de tiempo (3) verifican

$$P_n(x,y)=0,\ Q_n(x,y)=1$$

Demostración. De las equaciones (4) se sigue que los sistemas de la forma (1) donde $P_n(\varphi)\equiv 0$ y $Q_n(\varphi)\equiv 1$ han de verificar las relaciones

$$\frac{X_n(\cos(\varphi),\ \sin(\varphi))}{Y_n(Cs(\varphi),\ \sin(\varphi))}=-\frac{\sin^{2p-1}(\varphi)}{\cos^{2q-1}(\varphi)}, \tag{11}$$

$$p\cos(\varphi)Y_n(\cos(\varphi),\ \sin(\varphi))=1+q\sin(\varphi)X_n(\cos(\varphi),\ \sin(\varphi)). \tag{12}$$

Los sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano de la forma (5) son un caso particular de los sistemas de tipo (1) con *n=1*. Estos sistemas verifican trivialmente (11). Por otra parte con las funciones trigonométricas generalizadas cumplen la relación fundamental $p\cos^{2q}(\varphi)+q\sin^{2p}(\varphi)=1$ se comprueba facilmente que los sistemas considerados verifican la condición (12).

Demostracion del teorema 1. Consideremos la serie de potencias $H(x,y)=\sum_{n=4}^{\infty}H_n(x,y)$ donde $H_n(x,y)$ polinomios (1-2) cuasi-homogéneos de grado n. Imponemos que $\dot H=\frac{\partial H}{\partial x}\dot x+\frac{\partial H}{\partial y}\dot y=0$, es decir que la serie en cuestión sea una integral primera del sistema (6). La anulación de los términos de menor grado cuasi-homogéneo en el desarrollo de $\dot H(x,y)$ implica $H_4(x,y)=x^4+2y^2$. Sea $H^k(x,y)=\sum_{n=4}^{k}H_i(x,y)$, tomemos

$$H^5(x,y)=(x^4+2y^2)+(A_1^5x^5+A_2^5x^3y+A_3^5xy^2)$$

siendo A_i^5 $(i=1,\ 2,\ 3)$ coeficientes arbitrarios que determinaremos de manera que se anulen los términos peso 6 cuasi-homogéneo en el desarrollo de $\dot H_5=\frac{\partial H_5}{\partial x}\dot x+\frac{\partial H_5}{\partial y}\dot y$. Se tiene

$$A_1^5=\frac{4(a_1+2b_1+b_3)}{5},\ A_2^5=-4a_2,\ A_3^5=4b_1$$

y además, la condición de integrabilidad

$$b_2=-3a_2 \tag{13}$$

Si aumentamos los términos de la serie de $H(x,y)$, truncándola en grado 6 cuasi-homogéneo se tiene $H^6(x,y) = H^5(x,y) + (A_1^6 x^6 + A_2^6 x^4 y + A_3^6 x^2 y^2 + A_4^6 y^3)$, de manera que anulando peso 7 cuasihomogéneo en $\dot{H}^6(x,y)$ obtenemos

$$A_1^6 = \frac{2(a_1+2b_1)(a_1+b_1+b_3)}{3},\ A_2^6 = -4a_2(a_1+2b_1),\ A_3^6 = 2b_1(a_1+2b_1),$$

$$A_4^6 = \frac{-4a_2(a_1+2b_1)}{3}.$$

Si aumentamos los términos de la serie $H(x,y)$ y la truncamos en peso 7 cuasi-homogéneo, resulta $H^7(x,y) = H^6(x,y) + (A_1^7 x^7 + A_2^7 x^5 y + A_3^7 x^3 y^2 + A_4^7 x y^3)$, de manera que anulando los términios de grado 8 cuasihomogéneo en el desarrollo de $\dot{H}^7(x,y)$ obtenemos

$$\begin{array}{ll} A_1^7 = & \frac{4(3b_1+b_3)(3a_2^2+10b_1^2+17b_1b_3+6b_3^2)}{21},\ A_2^7 = -4a_2(2b_1+b_3)(3b_1+b_3) \\ A_3^7 = & \frac{4(3b_1+b_3)(3a_2^2+2b_1^2+b_1b_3)}{3},\ A_4^7 = -4a_2b_1(3b_1+b_3) \end{array}$$

y además, la condición de integrabilidad

$$a_2(a_1+2b_1)(a_1-b_1-b_3) = 0 \tag{14}$$

De la anulación simultanea de (13) y (14) resultan los siguientes casos

1. Si $a_2 = b_2 = 0$ el sistema (6) queda de la forma

   $$\dot{x} = y(-1+a_1x),\ \dot{y} = x^3 + b_1y^2 + b_3x^4,$$

   y la ecuación diferencial de las trayectorias es

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+b_1y^2+b_3x^4}{y(-1+a_1x)}.$$

   Efectuamos el cambio de variable $z = y^2$. La ecuación anterior queda

   $$\frac{dz}{dx} = \frac{2(x^3+b_1z+b_3x^4)}{-1+a_1x},$$

   que es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, y por lo tanto integrable por cuadraturas.

2. Si $a_1 = -2b_1,\ b_2 = -3a_2$ el sistema (6) queda de la forma

$$\dot{x} = -y - 2b_1xy + a_2x^3,\ \dot{y} = x^3 + b_1y^2 - 3a_2x^2y + b_3x^4.$$

   Notemos que $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0$ y por lo tanto, el sistema anterior es hamiltoniano.

3. Si $a_1 = b_1 + b_3$. Sea $H^8(x,y) = H^7(x,y) + (A_1^8x^8 + A_2^8x^6y + A_3^8x^4y^2 + A_4^8x^2y^3 + A_5^8y^4)$ de manera que anulando los términos de grado 9 cuasi-homogéneo en el desarrollo de $H^8(x,y)$ resulta

$$A_1^8 = \frac{1}{12}\left(-54a_2^2b_1^2 + 60b_1^4 + 206b_1^3b_3 + 6a_2^2b_3^2 + 212b_1^2b_3^2 + 86b_1b_3^3 + 12b_3^4 + 3A_3^8\right)$$

$$A_2^8 = -\frac{1}{3}\left(a_2(3b_1 + b_3)(6a_2^2 + 40b_1^2 + 43b_1b_3 + 10b_3^2)\right)$$

$$A_3^8 = ?$$

$$A_4^8 = -2a_2b_1(3b_1 + b_3)(4b_1 + b_3)$$

$$A_5^8 = -\frac{1}{3}\left(117a_2^2b_1^2 + 30b_1^4 + 66a_2^2b_1b_3 + 43b_1^3b_3 + 9a_2^2b_3^2 + 20b_1^2b_3^2 + 3b_1b_3^3 - 3A_3^8\right)$$

   obteniendo además la condición de integrabilidad

$$6a_2^2 + b_1b_3 + 2b_3^2 = 0. \tag{15}$$

   Vemos que el coeficiente A_3^8 no ha podido ser calculado en este paso, pero es calculado posteriormente siguiendo el mismo método, resultando

$$A_3^8 = \frac{2(18a_2^2 + 5b_3^2)(24a_2^2 + 7b_3^2)(540a_2^6 + 915a_2^4b_3^2 + 288a_2^2b_3^6 + 23b_3^6)}{b_3^4(162a_2^2 + 41b_3^2)}$$

   Si $b_3 = 0$, de la condición anterior y de (13) resulta $a_2 = b_2 = 0$ que corresponde al caso **1**. Por consiguiente podemos suponer en lo sucesivo $b_3 \neq 0$.

   Imponiendo las condiciones de integrabilidad (13), (14) y (15) al sistema (6) resulta

$$\dot{x} = -y - (b_3 + 6\frac{a_2^2}{b_3})xy + a_2x^3,\ \dot{y} = x^3 - 2(b_3 + 3\frac{a_2^2}{b_3})y^2 - 3a_2x^2y + b_3x^4. \tag{16}$$

Queremos encontrar un factor de divergencia nula $V(x,y)^{1/A}$ con A constante arbitraria para el sistema anterior, siendo

$$V(x,y) = m_0 + m_1 x + (m_2 x^2 + m_3 y),$$

suma de 2 polinomios (1-2) cuasi-homogéneos. Obtenemos

$$V(x,y) = 1 + \frac{(3a_2^2 + b_3^2)(2x + b_3 x^2 - 2a_2 y)}{b_3}$$

con $A = \frac{6a_2^2+2b_3^2}{18a_2^2+5b_3^2}$. Una integral primera del sistema (16) viene dada por

$$H(x,y) = \left(\frac{b_3^2}{3a_2^2(4a_2^2+b_3^2)(6a_2^2+b_3^2)} + \frac{b_3}{a_2^2(6a_2^2+b_3^2)}y + \frac{3a_2^2+b_3^2}{a_2^2(6a_2^2+b_3^2)}x^2 - \frac{1}{a_2}xy\right) V^{\frac{A-1}{A}}(x,y)$$

Notemos que el sistema (16) es un caso particular de los sistemas cuádraticos integrables. Vease [ChG].

4 INTEGRABILIDAD DE SISTEMAS POLINOMIALES (1-Q) CUASI-HOMOGÉNEOS

Demostración del teorema 2. Consideremos la serie de potencias $H(x,y) = \sum_{k=2q}^{\infty} H_k(x,y)$ donde $H_k(x,y)$ son polinomios *(1-q)* cuasi-homogéneos de grado k. Imponemos que $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0$, es decir, que la serie sea una integral primera del sistema (7). La anulación de los términos de menor grado cuasi-homogéneo en el desarrollo de $\dot{H}(x,y)$ implica $H_{2q}(x,y) = x^{2q} + qy^2$. Sea $H^k(x,y) = \sum_{i=2q}^{k} H_i(x,y)$. Tomemos

$$H^{2q+1}(x,y) = (x^{2q} + qy^2) + (A_1^{2q+1}x^{2q+1} + A_2^{2q+1}x^{q+1}y + A_3^{2q+1}xy^2)$$

siendo A_i^{2q+1} (i=1, 2, 3) coeficientes arbitrarios que determinaremos de manera que se anulen los términos de grado *3q* cuasi-homogéneo en el desarrollo de $\dot{H}^{2q+1}(x,y)$. Se tiene

$$A_1^{2q+1} = \frac{2q(a_1 + 2b_1 + b_3)}{1+2q},\ A_2^{2q+1} = -2a_2 q,\ A_3^{2q+1} = 2b_1 q$$

y además, la condición de integrabilidad

$$b_2 = -(q+1)a_2. \tag{17}$$

Si aumentamos los términos de la serie $H(x,y)$, truncándola en grado $2q+2$ cuasi-homogéneo, se tiene

$$H^{2q+2}(x,y) = H^{2q+1}(x,y) + (A_1^{2q+2}x^{2q+2} + A_2^{2q+2}x^{q+2}y + A_3^{2q+2}x^2y^2)$$

de manera que anulando los términos de grado $3q+1$ cuasi-homogéneo en $H^{2q+2}(x,y)$ obtenemos

$$A_1^{2q+2} = \frac{q(a_1^2+3a_1b_1+2b_1^2+a_1b_3+2b_1b_3)}{1+q},\ A_2^{2q+2} = -2a_2q(a_1+2b_1),$$
$$A_3^{2q+2} = b_1q(a_1+2b_1)$$

y la condición de integrabilidad

$$a_2(a_1+2b_1) = 0. \tag{18}$$

De la anulación simultanea de (17) y (18) resultan los siguientes casos:

1. Si $a_2 = b_2 = 0$ el sistema (7) queda de la forma

   $$\dot{x} = y(-1+a_1x),\ \dot{y} = x^{2q-1} + b_1y^2 + b_3x^{2q},$$

   de modo que la ecuación diferencial de las trayectorias es

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{2q-1}+b_1y^2+b_3x^{2q})}{y(-1+a_1x}).$$

   Efectuamos el cambio de variable $z = y^2$. La ecuación queda

   $$\frac{dz}{dx} = \frac{x^{2q-1}+b_1z+b_3x^{2q})}{-1+a_1x}.$$

   que es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, y por tanto integrable por cuadraturas.

2. Si $a_1 = -2b_1,\ b_2 = -(q+1)a_2$ el sistema (7) queda de la forma

   $$\dot{x} = -y - 2b_1xy + a_2x^{q+1},\ \dot{y} = x^{2q-1} + b_1y^2 - (q+1)a_2x^qy + b_3x^{2q}.$$

   En este caso se comprueba facilmente que $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0$ y por tanto, el sistema anterior es hamiltoniano.

5 INTEGRABILIDAD DE SYSTEMAS POLINOMIALES (P-Q) CUASI-HOMOGÉNEOS

Demostración de la Proposición 2. Si $d \neq 1$ es el máximo común divisor de p y q entonces d divide a Ap+Bq siendo A y B números enteros cualesquiera; en particular d divide a $2pq$-p y a $2pq$-q, como $d \neq 1$, d no puede dividir a $2pq$+1-p ni a $2pq$+1-q, por lo tanto no existen $(A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i) \in N$ que satisfagan las condiciones (9).

Demostración de la Proposición 3. Si p y q son primos entre sí, existen α y β números enteros tales que $\alpha p + \beta q = 1$. Si en (9) tomamos $A_i = aq + \alpha,\ B_i = (2-a)p + \beta - 1$ siendo a cualquier número entero, se verifica la primera igualdad, sin embargo esta igualdad, cuando $A_i,\ B_i,\ p,\ q \in N$, nos impone las restricciones

$$0 \leq A_i < 2q,\ 0 \leq B_i < 2p \tag{19}$$

de manera que los únicos posibles valores de a son 1 y 2. Si $a = 1,\ A_i = q + \alpha,\ B_i = p + \beta - 1$ y las condiciones (19) nos imponen que $-q \leq \alpha < q,\ 1 - p \leq \beta < p + 1$. Si $a = 2,\ A_i = 2q + \alpha,\ B_i = \beta - 1$ y las condiciones (19) nos imponen que $-2q \leq \alpha < q,\ 1 - p \leq \beta < p + 1$.

De manera similar tomando para la segunda igualdad de (9) $C_i = (2-a)q + \alpha - 1,\ D_i = ap + \beta$ siendo a cualquier número entero, ésta se verifica, pero al ser $C_i,\ D_i,\ p,\ q \in N$ tenemos las restricciones siguientes

$$0 \leq C_i < 2q,\ 0 \leq D_i < 2q \tag{20}$$

con lo cual a solo puede tomar los valores 0 y 1. Si a=0 tenemos que $C_i = 2q + \alpha - 1,\ D_i = \beta$ y las condiciones (20) nos imponen que $1 - 2q \leq \alpha < 0,\ 0 \leq \beta < 2q$. Si a=1 resulta $C_i = q + \alpha - 1,\ D_i = p + \beta$ de manera que al imponer las condiciones (20) obtenemos $1 - q \leq \alpha < q + 1,\ -p \leq \beta < p$. Uniendo ambas restricciones impuestas a $\alpha,\ \beta$ en los apartados anteriores tenemos que $1 - q \leq \alpha < 0,\ 1 \leq \beta < p$.

Demostración del Teorema 3. Consideremos la serie de potencias

$$H(x,y) = \sum_{k=2pq}^{\infty} H_k(x,y)$$

donde $H_k(x,y)$ son polinomios *(p-q)* cuasi-homogéneos de grado k. Imponemos que $\dot{H}(x,y) = 0$, es decir, que la serie en cuestión sea una integral primera del sistema (10). La anulación de los términos de menor grado cuasi-homogeneo en el desarrollo de $\dot{H}(x,y)$ implica $H_{2pq}(x,y) = px^{2q} + qy^{2p}$. Sea $H^k(x,y) = \sum_{i=2pq}^{k} H_i(x,y)$. Tomemos

$$H^{2pq+1}(x,y) = (px^{2q} + qy^{2p}) + A_1^{2pq+1}x^{2q+\alpha}y^{\beta} + A_2^{2pq+1}x^{q+\alpha}y^{p+\beta})$$

siendo A_1^{2pq+1}, A_2^{2pq+1} coeficientes arbitrarios que determinaremos de manera que se anulen los terminos de grado $4pq$-p-q+1 cuasi-homogéneo en el desarrollo de $\dot{H}^{2pq+1}(x,y) = \frac{\partial H^{2pq+1}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H^{2pq+1}}{\partial y}\dot{y}$. Se tiene

$$A_1 = -\frac{2a_2pq}{\beta},\ A_2 = -\frac{2a_1pq}{p+\beta}$$

y además las condiciones de integrabilidad

$$a_2(\alpha + 2q) + \beta b_2 = 0,\ a_1(\alpha + q) + b_1(\beta + p) = 0.$$

Notemos que $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0$ y por lo tanto, el sistema (10) es en este caso hamiltoniano.

REFERENCIAS

[BrM] Brunella, M. and Miari, M. *Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra*, J. of Diff. Eq. **85** (1990), 338-366.

[Ch] Chavarriga, J., Integrable systems in the plan with a center type linear part. *Applicationes Mathematicae.* Vol. 22 (1994), 285-309.

[ChG] Chavarriga, J. and Giné, J. Integrabiliy of a linear center perturbed by fourth degree homogeneous polynomial. Preprint. Universidad de Lérida, Spain (1994). To apper in *Publicacions Matemàtiques* UAB.

[DuR] Dumortier, F, and Rousseau, C. Cubic Liénard equations with linear damping, *Nonlinearity.* **3** (1990), 1015-1039.

[GaP] Gassull, A. and Prohens, R. Quadratic and cubic systems with degenerate infinity. Preprint. Universidad Autónoma de Barcelona. 1994.

[Li] Liaponouv, A.M. “Mathematics in Science and Engineering”. “Stability of motion”. Academic Press, New York, London, 1966.

[Sch] Schlomiuk, D. Algebraic and Geometric Aspects of the Theory of Polinomials Vector Fields. *Bifurcations and Periodics Orbits of Vector Fields.* Kluwer Academic Publisher (1993).