ESTRUCTURAS MEDIBLE Y TOPOLOGICA DE UN FLUJO PROYECTIVO LINEAL. UN CRITERIO DE DIFERENCIACION.

Ana I. Alonso

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería, E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid, Paseo del Cauce s/n, 47011 Valladolid.
e-mail: anaalo@wmatem.eis.uva.es

1 Introducción

Dado un espacio métrico compacto Ω, consideremos en él un flujo continuo $\Xi : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \Omega$, $(\xi, t) \to \xi_t$. Supondremos (Ω, Ξ) minimal y únicamente ergódico y denotaremos por $\mathcal{A}_0$ la compleción de la σ-álgebra de Borel respecto de la única medida ergódica m_0.

Dada una función continua $S : \Omega \to L(\mathbb{R}^2)$ con $\operatorname{tr} S = 0$ consideramos la familia de sistemas bidimensionales

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} a(\xi_t) & b(\xi_t) \\ c(\xi_t) & -a(\xi_t) \end{pmatrix} \mathbf{z} = S(\xi_t)\mathbf{z}\,, \quad \xi \in \Omega, \tag{1}$$

así como el flujo inducido en los fibrados lineales $V_{\mathbb{C}} = \Omega \times \mathbb{C}^2$ ($V_{\mathbb{R}} = \Omega \times \mathbb{R}^2$) de la forma: $(\xi, \mathbf{z}_0) \cdot t = (\xi_t, \mathbf{z}(t, \xi, \mathbf{z}_0))$, donde $\mathbf{z}(t, \xi, \mathbf{z}_0)$ representa la solución de (1) definida a lo largo de la trayectoria que pasa por ξ con la condición inicial $\mathbf{z}(0, \xi, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$. Por linealidad en las fibras, la aplicación $\Pi : V_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}} = \Omega \times P^1(\mathbb{C})$, $(\xi, \mathbf{z}) \to (\xi, z_2/z_1)$, translada el flujo al fibrado proyectivo; lo denotaremos por Φ independientemente del subconjunto invariante de $K_{\mathbb{C}}$ donde esté considerado.

Tomando en (1) la coordenada compleja $Z = z_2/z_1$ obtenemos las ecuaciones de Riccati

$$Z' = c(\xi_t) - 2a(\xi_t)Z - b(\xi_t)Z^2\,. \tag{2}$$

Si $Z(t, \xi, Z_0)$ es la solución de (2) que verifica la condición inicial $Z(0, \xi, Z_0) = Z_0$, entonces $\Phi(t, \xi, Z_0) = (\xi_t, Z(t, \xi, Z_0))$ define las ecuaciones del flujo en $K_{\mathbb{C}}$.

El espacio $K_{\mathbb{R}} = \Omega \times P^1(\mathbb{R})$ puede ser considerado trivialmente como un subconjunto cerrrado e invariante de $K_{\mathbb{C}}$; la restricción de Φ a dicho subconjunto nos proporciona un flujo real cuyas trayectorias en las coordenadas simpléctico-polares

$$\varphi = \cot^{-1}(x_2/x_1), \quad \rho = (x_1^2 + x_2^2)/2,$$

vienen representadas mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \varphi' &= f(\xi_t, \varphi) = b(\xi_t)\cos^2\varphi - c(\xi_t)\operatorname{sen}^2\varphi + 2a(\xi_t)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}(b(\xi_t) - c(\xi_t)) + a(\xi_t)\operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{2}(b(\xi_t) + c(\xi_t))\cos 2\varphi \\ \rho' &= -\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\xi_t, \varphi)\rho = (-2a(\xi_t)\cos 2\varphi + (b(\xi_t) + c(\xi_t))\operatorname{sen} 2\varphi)\rho\,, \end{aligned} \tag{3}$$

de modo que $\Phi(t, \xi, \varphi_0) = (\xi_t, \varphi(t, \xi, \varphi_0))$, siendo $\varphi(t, \xi, \varphi_0)$ la solución de (3) que verifica la condición inicial $\varphi(0, \xi, \varphi_0) = \varphi_0$. Identificando $P^1(\mathbb{R})$ con el espacio cociente $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ la relación $X = \cot\varphi$ permite el cambio entre ambos sistemas de coordenadas.

Denotaremos por r_1 la medida de Lebesgue normalizada en $P^1(\mathbb{R})$ y por $m_1 = m_0 \otimes r_1$ la medida producto en la correspondiente σ-álgebra completa $\mathcal{A}_1$ de $K_{\mathbb{R}}$. El subíndice 2, $(r_2, m_2, \mathcal{A}_2)$ lo reservaremos para los conceptos análogos definidos en $P^1(\mathbb{C})$ y $K_{\mathbb{C}}$.

El objetivo general de nuestro trabajo consiste en el estudio cualitativo del flujo proyectivo. Este artículo se ocupa concretamente de las oscilaciones de las trayectorias a lo largo del tiempo.

El concepto clásico de distalidad, i.e. separación uniforme entre trayectorias, resulta ineficaz en el estudio de una amplia clase de sistemas. Con soluciones no acotadas distalidad no proporciona una descripción global del flujo. Por otro lado, son conocidos numerosos ejemplos en los cuales el flujo proyectivo es una extensión proximal del flujo definido en la base (ver [4], [7]).

Es preciso ampliar este concepto. Presentamos aquí una versión medible que consiste en valorar las oscilaciones de las trayectorias en la topología L^1 mediante ciertas funciones invariantes capaces de diferenciar las estructuras medible y topológica del flujo. Nuestra definición será compatible tanto con la dinámica absolutamente continua como con la dinámica singular.

2 Preliminares

Desde el punto de vista ergódico los sistemas (1) puede dividirse básicamente en dos tipos. Nos referiremos al *caso absolutamente continuo* cuando exista en $K_{\mathbb{R}}$ una medida invariante absolutamente continua respecto de m_1 y al *caso singular* cuando toda medida invariante sea singular respecto de m_1. Las dinámicas exhibidas por sistemas de uno y otro tipo difieren de forma esencial lo que nos lleva a abordar su estudio por separado.

Entre las medidas absolutamente continuas cabe destacar las denominadas *medidas lineales*, estudidadas en [6] y cuya definición se recuerda a continuación.

Definición 2.1 *Sea μ una medida invariante absolutamente continua respecto de m_1 con $d\mu = p\, dm_1$. Se dice que μ es una* medida lineal invariante *si existen funciones medibles A, B, $C : \Omega \to \mathbb{R}$ y un subconjunto invariante $\Omega_0 \subset \Omega$ de medida uno tal que*

$$p(\xi, \varphi) = (A(\xi)\cos^2\varphi + B(\xi)\operatorname{sen}^2\varphi + 2\, C(\xi)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)^{-1}$$

para todo $(\xi, \varphi) \in \Omega_0 \times P^1(\mathbb{R})$.

En Obaya & Paramio [8] se comprueba la abundancia de sistemas bidimensionales con exponente de Lyapunov nulo que admiten medidas lineales. Posteriormente en [6] se demuestra que la existencia de una medida absolutamente continua implica la existencia de una medida lineal.

Directamente relacionados con ellas encontramos los siguiente subconjuntos invariantes.

Definición: Sea M un subconjunto invariante de $K_{\mathbb{C}}$, y $\pi : M \to \Omega$ la proyección sobre la base. M es una *k-lámina medible* para la medida m_0 si existe un subconjunto invariante $\Omega_0 \subset \Omega$ de medida uno tal que:

(i) $\mathrm{card}(\pi^{-1}(\xi)) = k$ para todo $\xi \in \Omega_0$.

(ii) La aplicación $\pi^{-1}(\xi) = \{(\xi, Z_1(\xi)), (\xi, Z_2(\xi)), \ldots, (\xi, Z_k(\xi))\}$, definida en Ω_0, es $\mathcal{A}_0$-medible.

Dada una k-lámina medible M podemos definir una medida invariante μ que proyecta en m_0 de la forma

$$\int_{K_{\mathbb{C}}} g\, d\mu = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega} g(\xi, Z_j(\xi))\, dm_0$$

para toda $g \in C(K_{\mathbb{C}})$. Obviamente μ es puramente discontinua y verifica $\mu(M) = 1$.

Se dice que M es una *k-lámina ergódica* para la medida m_0 si μ es la única medida invariante concentrada en M que proyecta en m_0. Cuando M es un subconjunto compacto de $K_{\mathbb{C}}$ y $\operatorname{card}(\pi^{-1}(\xi)) = k$ para todo $\xi \in \Omega$, decimos que M es una *k-lámina cerrada.* Con el fin de simplificar la notación nos referiremos a M simplemente como *lámina* (medible, ergódica o cerrada) en el caso $k = 1$.

A continuación damos una breve descripción de las medidas ergódicas de $K_{\mathbb{R}}$ que proyectan en m_0, obtenidas en [6]. Las posibles opciones son:

Caso absolutamente continuo: (Ver tambien Furstenberg [2]).
Sea μ una medida absolutamente continua respecto de m_1,

(a.1) Si μ es ergódica (y por lo tanto lineal), es la única medida invariante que proyecta en m_0.

(a.2) Si μ no es ergódica, entonces toda medida ergódica de $K_{\mathbb{R}}$ que proyecte en m_0 está concentrada en una k-lámina ergódica.

Caso singular:

(b.1) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una única medida ergódica concentrada en una lámina ergódica.

(b.2) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una única medida ergódica concentrada en una 2-lámina ergódica.

(b.3) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite dos medidas ergódicas diferentes, cada una de las cuales está concentrada en una lámina ergódica.

Consideremos ahora el espacio $K_{\mathbb{R}}$ como base de un nuevo fibrado proyectivo $L_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} \times P^1(\mathbb{R})$ y en él el flujo $\widetilde{\Xi} = \Phi_{|K_{\mathbb{R}}}$. Para obtener una formulación análoga a la descrita anteriormente basta con definir $\widetilde{a}(\xi,\varphi) = a(\xi)$, $\widetilde{b}(\xi,\varphi) = b(\xi)$ y $\widetilde{c}(\xi,\varphi) = c(\xi)$ para todo $(\xi,\varphi) \in K_{\mathbb{R}}$. Las soluciones de las correspondientes ecuaciones de Riccati (2) definen el nuevo flujo $\widetilde{\Phi}$ en $L_{\mathbb{R}}$ que, en coordenadas simpléctico-polares, se expresará: $\widetilde{\Phi}(t,\xi,\varphi_0,\psi_0) = (\xi_t, \varphi(t,\xi,\varphi_0), \varphi(t,\xi,\psi_0))$.

El interés de este nuevo fibrado reside en que sus medidas ergódicas están concentradas en láminas ergódicas. Nótese que $\widetilde{M} = \{(\xi,\varphi,\varphi) \,/\, (\xi,\varphi) \in K_{\mathbb{R}}\}$ define una lámina ergódica cerrada para toda medida ergódica en $K_{\mathbb{R}}$.

Sea μ una medida ergódica en $K_{\mathbb{R}}$ y $\widetilde{m} = \mu \otimes r_1$ la correspondiente medida producto en $L_{\mathbb{R}}$. En [6], se demuestra que $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una medida invariante absolutamente continua respecto de m_1 si y sólo si $(L_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Phi})$ admite una medida invariante absolutamente continua respecto de $\widetilde{m}$. Esto prueba que ambos flujos están simultáneamente en el caso absolutamente continuo y, por lo tanto, la estructura ergódica de $L_{\mathbb{R}}$ queda determinada por la previamente conocida en $K_{\mathbb{R}}$.

Caso absolutamente continuo:

$(L_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Phi})$ admite una medida invariante absolutamente continua y una lámina ergódica, por lo tanto las medidas ergódicas están concentradas en láminas ergódicas.

Caso singular:

(b.1) Sea $M = \{(\xi, \varphi(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}$ la única lámina ergódica de $(K_{\mathbb{R}}, \Phi) \Rightarrow (L_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Phi})$ admite una única medida ergódica concentrada en la lámina ergódica $\widetilde{M} = \{(\xi, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}$,

(b.2) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una única medida ergódica concentrada en $M = \{(\xi, \varphi_i(\xi)) \,/\, i = 1, 2,\ \xi \in \Omega\} \Rightarrow (L_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Phi})$ admite dos medidas ergódicas concentradas en las láminas ergódicas $\widetilde{M}_1 = \{(\xi, \varphi_i(\xi), \varphi_i(\xi))\ i = 1, 2 \,/\, \xi \in \Omega\}$ y $\widetilde{M}_2 = \{(\xi, \varphi_i(\xi), \varphi_j(\xi))\ i \neq j \,/\, \xi \in \Omega\}$,

(b.3) $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite dos medidas ergódicas $\mu_i\ i = 1, 2$ concentradas en las láminas $M_i = \{(\xi, \varphi_i(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\} \quad i = 1, 2 \Rightarrow (L_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Phi})$ admite dos medidas ergódicas que proyectan en μ_1 concentradas en $\widetilde{M}_i^1 = \{(\xi, \varphi_1(\xi), \varphi_i(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\} \quad i = 1, 2$, y dos medidas ergódicas que proyectan en μ_2 concentradas en las láminas ergódicas $\widetilde{M}_i^2 = \{(\xi, \varphi_2(\xi), \varphi_i(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}\ i = 1, 2$.

3 Resultados

Sean (ξ, φ), (ξ, ψ) dos puntos cualesquiera de $\{\xi\} \times P^1(\mathbb{R})$ y consideremos las trayectorias que pasan por ellos. Nuestro propósito es valorar, en la topología L^1, la media de la distancia a la que se encuentran las trayectorias a lo largo del tiempo.

El modo más natural de formular el problema consiste en pasar al flujo extendido $L_{\mathbb{R}}$ y considerar en él el punto (ξ, φ, ψ). La noción de distancia se corresponde con la aplicación:

$$d : L_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \varphi, \psi) \mapsto \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Theta(\varphi(t, \xi, \varphi), \varphi(t, \xi, \psi))\, dt$$

donde Θ denota la función longitud de arco en $P^1(\mathbb{R})$.

El teorema ergódico de Birkhoff nos garantiza su definición en un subconjunto $\widetilde{S}$ de $L_{\mathbb{R}}$ con medida completa.

La definición de d mediante un límite dificulta su aplicación al no poder garantizar su definición en todo punto. Esto nos lleva a introducir las funciones:

$$d^* : L_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \varphi, \psi) \mapsto \limsup_{T-S \to \infty} \frac{1}{T-S} \int_{S}^{T} \Theta(\varphi(t, \xi, \varphi), \varphi(t, \xi, \psi))\, dt$$

$$d_* : L_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \varphi, \psi) \mapsto \liminf_{T-S \to \infty} \frac{1}{T-S} \int_{S}^{T} \Theta(\varphi(t, \xi, \varphi), \varphi(t, \xi, \psi))\, dt\,.$$

Es inmediato comprobar que d, d^*, d_* son invariantes respecto del flujo extendido y simétricas en las coordenadas angulares, φ, ψ.

Comenzamos analizando las propiedades de d en el caso absolutamente continuo.

Para cada $T > 0$ consideramos la función

$$p_T(\xi, \varphi) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\left\{ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\Phi(s, \xi, \varphi))\, ds \right\} dt\,. \tag{4}$$

En [8] se demuestra que $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una medida invariante absolutamente continua equivalente a m_1 si y sólo si para casi todo $(\xi, \varphi) \in K_{\mathbb{R}}$ el límite $p(\xi, \varphi) = \lim_{T \to \infty} p_T(\xi, \varphi)$

existe y es un número real positivo. En este caso $d\mu = p\, dm_1$ es una medida invariante equivalente a m_1.

En estas condiciones la continuidad de d queda demostrada en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Si el flujo $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ admite una medida invariante absolutamente continua respecto de m_1 entonces existe un subconjunto invariante $\Omega_0 \subset \Omega$ de medida uno de modo que para cada $\xi \in \Omega_0$, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} d_\xi : & P^1(\mathbb{R}) \times P^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\varphi, \psi) & \mapsto & d(\xi, \varphi, \psi) \end{array}$$

está definida en todo punto y es continua.

La demostración se apoya en los siguientes lemas técnicos.

Lema 3.1 *Para todo $(\xi, \phi, \psi) \in L_{\mathbb{R}}$ se verifica*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Theta(\varphi(t,\xi,\phi), \varphi(t,\xi,\psi))\, dt \le \Theta\left(\int_{\phi}^{\psi} p(\xi, s)\, ds, 0 \right) .$$

Como consecuencia, si $(\xi, \phi, \psi) \in \widetilde{S}$, entonces

$$d(\xi, \phi, \psi) \le \Theta\left(\int_{\phi}^{\psi} p(\xi, s)\, ds, 0 \right) . \tag{5}$$

Demostración: Para todo $\phi \ge \psi$ se verifica

$$\varphi(t,\xi,\psi) - \varphi(t,\xi,\phi) = \int_{\phi}^{\psi} \exp\left\{ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\Phi(s,\xi,\varphi))\, ds \right\} d\varphi$$

por lo tanto, de la definición de $p_T(\xi,\varphi)$ y de su convergencia hacia $p(\xi,\varphi)$ para casi todo punto, se deduce

$$\begin{aligned} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} & \int_{-T}^{T} \Theta(\varphi(t,\xi,\phi), \varphi(t,\xi,\psi))\, dt \\ &= \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \min(\varphi(t,\xi,\psi) - \varphi(t,\xi,\phi),\, \pi - (\varphi(t,\xi,\psi) - \varphi(t,\xi,\phi))dt \\ &\le \min\left(\int_{\phi}^{\psi} p(\xi,\varphi) d\varphi,\, \pi - \int_{\phi}^{\psi} p(\xi,\varphi)\varphi \right) = \Theta\left(\int_{\phi}^{\psi} p(\xi, s)\, ds, 0 \right) . \end{aligned}$$

Lema 3.2 *Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $P^1(\mathbb{R})$ tal que $\psi_n \to \psi$ cuando $n \to \infty$. Si para algún $(\xi, \varphi) \in K_{\mathbb{R}}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ $(\xi, \varphi, \psi_n) \in \widetilde{S}$ entonces también $(\xi, \varphi, \psi) \in \widetilde{S}$.*

Demostración: Para todo φ, ψ y $\psi_n \in P^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\Theta(\varphi(t,\xi,\varphi), \varphi(t,\xi,\psi)) \le \Theta(\varphi(t,\xi,\varphi), \varphi(t,\xi,\psi_n)) + \Theta(\varphi(t,\xi,\psi_n), \varphi(t,\xi,\psi)),$$

desigualdad que se mantiene después de considerar los promedios en $[-T, T]$ y tomar $\limsup$ a lo largo de cualquier sucesión $\{T_k\}_{k\in N}$ con $T_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Por el Lema 3.1

$$\begin{aligned} &\left| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} \Theta(\varphi(t,\xi,\varphi), \varphi(t,\xi,\psi))\, dt - d(\xi,\varphi,\psi_n) \right| \\ &\qquad \le \limsup_{T\mapsto\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Theta(\varphi(t,\xi,\psi), \varphi(t,\xi,\psi_n))\, dt \le \Theta\left(\int_{\psi}^{\psi_n} p(\xi, s)\, ds, 0 \right) . \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 3.1

El teorema ergódico de Birkhoff nos garantiza la existencia de d en un conjunto $\widetilde{S}$ de medida completa. Dado $\xi \in \Omega$ consideramos la sección $\widetilde{S}_\xi = \{(\varphi,\psi) \in P^1(\mathbb{R}) \times P^1(\mathbb{R}) \,/\, (\xi,\varphi,\psi) \in \widetilde{S}\}$. Si llamamos $\tilde{r} = r_1 \otimes r_1$ a la medida producto en $P^1(\mathbb{R}) \times P^1(\mathbb{R})$ tenemos, por aplicación directa del teorema de Fubini, que $\widetilde{S}_\xi$ es un conjunto medible con medida $\tilde{r}(\widetilde{S}_\xi) = 1$ para casi todo $\xi \in \Omega$. Sea $\Omega_0 = \{\xi \in \Omega \,/\, \widetilde{S}_\xi \text{ es medible y } \tilde{r}(\widetilde{S}_\xi) = 1\}$, $m_0(\Omega_0) = 1$. Aplicando el Lemma 3.2 se comprueba fácilmente que $\widetilde{S}_\xi = P^1(\mathbb{R}) \times P^1(\mathbb{R})$ para todo $\xi \in \Omega_0$. La continuidad se deduce de la continuidad uniforme en cada componente. □

La siguiente propiedad se verifica tanto en el caso absolutamente continuo como en el singular.

Proposición 3.1 *La aplicación d es constante en las láminas ergódicas de $L_{\mathbb{R}}$. Además, si $(\xi,\varphi_1(\xi))$, $(\xi,\varphi_2(\xi))$ pertenecen a la 2-lámina $M_{1,2} = \{(\xi,\varphi_i(\xi))\ i = 1,2 \,/\, \xi \in \Omega\}$ o bien a las láminas $M_1 = \{(\xi,\varphi_1(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}$ y $M_2 = \{(\xi,\varphi_2(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}$ entonces*

$$d(\xi,\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi)) = \int_\Omega \Theta(\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi))\, dm_0 \tag{6}$$

para casi todo $\xi \in \Omega$.

Demostración: La igualdad (6) es consecuencia directa del teorema ergódico de Birkhoff y de ella se deduce inmediatamente la primera afirmación del enunciado. □

Analizamos a continuación las propiedades de d^* y d_*. En el siguiente teorema establecemos la relación de estas aplicaciones con la estructura topológica del flujo así como su caracterización en términos de las medidas ergódicas de $L_{\mathbb{R}}$.

Teorema 3.2 *Sea $(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) \in L_{\mathbb{R}}$ y denotemos por $\widetilde{K}$ la adherencia de su trayectoria, i.e. $\widetilde{K} = cls\{\widetilde{\Phi}(t,\xi_0,\varphi_0,\psi_0) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$. Se verifica:*

- (i) *$d^*(\xi,\varphi,\psi) \le d^*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0)$ y $d_*(\xi,\varphi,\psi) \ge d_*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0)$ para todo $(\xi,\varphi,\psi) \in \widetilde{K}$. En particular, d^* y d_* son constantes sobre los minimales de $L_{\mathbb{R}}$.*
- (ii) *Existen dos medidas ergódicas μ^* and μ_* concentradas en $\widetilde{K}$ tales que*

$$d^*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) = \int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi,\psi)\, d\mu^* \quad y \quad d_*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) = \int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi,\psi)\, d\mu_* \,.$$

Demostración: (i) La desigualdad para d^* se obtiene de forma inmediata a partir de su definición. Con respecto a d_*, basta tener en cuenta que $\liminf f = -\limsup(-f)$ y aplicar la desigualdad obtenida para d^*.

(ii) La representación de d^* en términos de una medida invariante se obtiene al aplicar el resultado de Millionscikov [5] para el valor probable de una función acotada y uniformemente continua a la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \Theta(\varphi(t,\xi_0,\varphi_0),\varphi(t,\xi_0,\psi_0)). \end{array}$$

La ergodicidad se deduce del teorema ergódico de Birkhoff, el apartado (i) y de que el

$$\sup\left\{\int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi,\psi)\, d\mu \,/\, \mu \text{ invariante}\right\} = \int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi,\psi)\, d\mu^*$$

se alcanza para una medida ergódica μ^*.

La expresión de d_* se deduce, de nuevo, de la relación entre lim sup y lim inf. En este caso μ_* es la medida ergódica que verifica:

$$\inf \left\{ \int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi, \psi)\, d\mu \,/\, \mu \text{ invariante} \right\} = \int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi, \psi)\, d\mu_* \,. \tag{7}$$

Obsérvese que μ^* y μ_* dependen del punto $(\xi_0, \varphi_0, \psi_0)$ considerado. □

Las expresiones de d^* y d_* en función de las medidas μ^* y μ_* pueden desarrollarse explícitamente, tanto en el caso absolutamente continuo como en el singular, en base a la descripción de las medidas ergódicas de $L_{\mathbb{R}}$. Sus posibles valores ponen de manifiesto la diferencia entre ambas dinámicas.

Manteniendo la notación utilizada en la Sección 2, obtenemos:

Caso absolutamente continuo:

(a.1) Sea $d\mu = p(\xi, \varphi)\, dm_1$ la única medida ergódica de $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$. Teniendo en cuenta que las medidas ergódicas de $L_{\mathbb{R}}$ están concentradas en láminas ergódicas no resulta dificil ver que

$$d^*(\xi_0, \varphi_0, \psi_0) = \sup_{(\xi, \varphi, \psi) \in \widetilde{K}} \Theta \left(\int_{\varphi}^{\psi} p(\xi, s)\, ds, 0 \right).$$

Obtenemos la misma expresión para d_* cambiando sup por inf. Cuando todas las soluciones de (1) están acotadas $d^* = d_* = d$ con $d(\xi_0, \varphi_0, \psi_0) = \Theta\left(\int_{\varphi_0}^{\psi_0} p(\xi_0, s)\, ds, 0\right)$.

(a.2) Supongamos que $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ descompone en las k-láminas ergódicas $M_\beta = \{(\xi, \varphi_i^\beta(\xi))\ i = 1, 2, \ldots k \,/\, \xi \in \Omega\}$ y el flujo extendido $(L_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Phi})$ descompone en las láminas ergódicas $\widetilde{M}_\alpha = \{(\xi, \varphi, \varphi_\alpha(\xi, \varphi)) \,/\, (\xi, \varphi) \in K_{\mathbb{R}}\}$. Denotemos por $\pi(\widetilde{K})$ la proyección de $\widetilde{K}$ en $K_{\mathbb{R}}$. Entonces

$$d^*(\xi_0, \varphi_0, \psi_0) = \sup_{\substack{\alpha \,/\, \widetilde{M}_\alpha \subset \widetilde{K} \\ \beta \,/\, M_\beta \subset \pi(\widetilde{K})}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega \Theta(\varphi_i^\beta(\xi), \varphi_\alpha(\xi, \varphi_i^\beta(\xi)))\, dm_0 \,,$$

y la misma expresión para d_* cambiando sup por inf.

En particular, en el caso acotado con descomposición de $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ en láminas ergódicas cerradas $M_\beta = \{(\xi, \varphi_\beta(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}$, tenemos que $d = d^* = d_*$ con $d(\xi_0, \varphi_0, \psi_0) = \int_\Omega \Theta(\varphi_{\beta_1}(\xi), \varphi_{\beta_2}(\xi))\, dm_0$ siendo β_1 y β_2 tales que $(\xi_0, \varphi_0) \in M_{\beta_1}$ y $(\xi_0, \psi_0) \in M_{\beta_2}$.

Caso singular:

(b.1) $d^* = d_* = d \equiv 0$ lo que significa que las trayectorias tienden unas a otras, en media, a lo largo del tiempo.

(b.2) d^* y d_* pueden tomar dos valores: 0 y $d_1 = \int_\Omega \Theta(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))\, dm_0 > 0$ dependiendo de si es $\widetilde{M}_1$ o $\widetilde{M}_2$ la lámina ergódica contenida en $\widetilde{K}$.

(b.3) d^* y d_* pueden tomar dos valores: 0 y $d_1 = \int_\Omega \Theta(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))\, dm_0 > 0$, dependiendo de qué láminas ergódicas $\widetilde{M}_i^1$, $\widetilde{M}_i^2$ $i = 1, 2$ estén contenidas en $\widetilde{K}$.

Por consiguiente, en el caso singular las aplicaciones d^* y d_* no pueden tomar más de dos valores; un tercer valor nos indicaría que estamos en el caso absolutamente continuo, si bien el recíproco no es cierto.

Obsérvese que en aquellos casos en los que se da la igualdad de las tres aplicaciones, las estructuras medible y topológica de $L_{\mathbb{R}}$ coinciden.

La siguiente proposición es un ejemplo de la relación de d^* con la estructura topológica.

Definición 3.1 *Se dice que* (ξ,φ), $(\xi,\psi) \in K_{\mathbb{R}}$ *forman un* par distal *si existe* $\delta > 0$ *tal que* $\Theta(\varphi(t,\xi,\varphi),\varphi(t,\xi,\psi)) > \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $(L_{\mathbb{R}},\widetilde{\Phi})$ *contiene dos minimales.*

(ii) *Existe* $(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) \in L_{\mathbb{R}}$ *tal que* $d_*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) > 0$.

Demostración: Sea $\widetilde{M} = \{(\xi,\varphi,\varphi)\,/\,(\xi,\varphi) \in K_{\mathbb{R}}\}$ la diagonal en $L_{\mathbb{R}}$ y denotemos por $\widetilde{\mu_0}$ la medida ergódica concentrada en $\widetilde{M}$.

(i)$\Rightarrow$(ii) La diagonal es un subconjunto minimal de $L_{\mathbb{R}}$. Si denotamos por $\widetilde{N}$ el otro minimal, basta considerar $(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) \in \widetilde{N}$. (ii)$\Rightarrow$(i) Dado (ξ_0,φ_0,ψ_0), denotemos por $\widetilde{K}$ la adherencia de su trayectotria. $\widetilde{K}$ contiene necesariamente un minimal distinto de $\widetilde{M}$; en efecto, supongamos que $\widetilde{M} \subset \widetilde{K}$ entonces $\int_{\widetilde{K}} \Theta(\varphi,\psi)\,d\widetilde{\mu}_0 = 0$ lo cual implica, según (7), que $d_*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) = 0$ en contradicción con la hipótesis. $\Box$

La noción de par distal queda caracterizada en términos de d_* en la siguiente proposición.

Proposición 3.3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (ξ_0,φ_0), $(\xi_0,\psi_0) \in K_{\mathbb{R}}$ *forman un par distal.*

(ii) $d_*(\xi_0,\varphi_0,\psi_0) > 0$.

Demostración: (i)$\Rightarrow$(ii) Se sigue de las definiciones de d_* y par distal. (ii)$\Rightarrow$(i) Por la Proposición (3.2) $L_{\mathbb{R}}$ admite dos minimales $\widetilde{M}$ y $\widetilde{N}$. Como $(\xi_0,\varphi_0,\varphi_0) \in \widetilde{M}$ y $(\xi_o,\varphi_0,\psi_0) \in \widetilde{N}$ se deduce fácilmente que (ξ_0,φ_0) y $(\xi_0,\psi_0) \in K_{\mathbb{R}}$ forman un par distal. $\Box$

La equivalencia entre la existencia de un par distal y dos minimales del flujo extendido ha sido probada con anterioridad por Johnson [3] usando otras técnicas.

4 Ejemplo

Consideramos los sistemas lineales bidimensionales de la forma

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a(\xi_t) & 0 \\ 0 & -a(\xi_t) \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{8}$$

Las ecuaciones de Riccati asociadas son

$$Z' = -a(\xi_t)Z$$

de donde se deduce que $M_0 = \{(\xi,0)\,/\,\xi \in \Omega\}$ y $M_\infty = \{(\xi,\infty)\,/\,\xi \in \Omega\}$ son siempre láminas ergódicas cerradas del flujo proyectivo.

En $(K_{\mathbb{R}}, \Phi)$ se observa dinámica absolutamente continua si y sólo si las ecuaciones de Riccati admiten una solución medible a lo largo del flujo. Dichas soluciones, en caso de existir, proporcionan las láminas ergódicas; en efecto, si R es una función medible y positiva verificando $R(\xi_t) = R(\xi)\exp(-\int_0^t a(\xi_s)\,ds)$, entonces los conjuntos

$$M_\beta = \{(\xi, \beta\, R(\xi)) \,/\, \xi \in \Omega\}, \quad \beta \in P^1(\mathbb{R})$$

proporcionan las láminas ergódicas del flujo proyectivo.

Calculamos d^* en todo punto de la forma $(\xi, 0, \varphi)$, $\xi \in \Omega$, $\varphi \in P^1(\mathbb{R})$. Debido a la simetría del flujo bastará con considerar $\varphi \in (0, \pi/2)$. Su valor viene dado por la expresión

$$d^*(\xi, 0, \varphi) = \int_\Omega \varphi_0(\xi)\, dm_0$$

donde $\varphi_0(\xi) = \sup\{\psi \in (0, \pi/2) \,/\, (\xi, \psi) \in cls\{\Phi(t, \xi, \varphi) \,/\, t \in \mathbb{R}\}\}$.

Denotemos por γ el exponente de Lyapunov del sistema, i.e. $\gamma = 1/2 \int_\Omega a(\xi)\, dm_0$.

Si $\gamma > 0$ entonces todas las trayectorias oscilan entre láminas, por lo tanto $d^*(\xi, 0, \varphi) = \pi/2$ y $d_*(\xi, 0, \varphi) = 0$ para todo $(\xi, \varphi) \in \Omega \times (0, \pi/2)$.

Si $\gamma = 0$, la Proposición 1.13 de [3] demuestra que existe un conjunto residual $\Omega^* \subset \Omega$, de modo que las trayectorias oscilan de una lámina a otra lo cual implica $d^*(\xi, 0, \varphi) = \pi/2$ para todo $\xi \in \Omega^*$, $\varphi \in (0, \pi/2)$. El Teorema 1. de Shneiberg [10] aplicado al caso singular nos garantiza la oscilación en un conjunto de medida uno, es decir, $m_0(\Omega^*) = 1$. En dinámica abolutamente continua d^* puede tomar todos los valores intermedios en un conjunto de medida uno en la base. Esto garantiza una sucesión expansiva de de compactos invariantes recubriendo $K_{\mathbb{R}}$.

Procedemos a continuación al cálculo de d en el caso absolutamente continuo.

Sea $(\xi, \varphi) \in M_\beta$, i.e. $\varphi = \cot^{-1}(\beta\, R(\xi))$. El valor de $d(\xi, 0, \varphi)$ viene dado por la expresión $d(\xi, 0, \varphi) = \int_0^\varphi p(\xi, s)\, ds$ donde

$$p(\xi, \varphi) = \lim_{T\to\infty} p_T(\xi, \varphi) = \operatorname{sen} 2\varphi \int_\Omega \frac{1 + \beta^2\, R^2(\xi)}{2\, R(\xi)}\, dm_0.$$

Véase Alonso &Obaya [1]. Tras varios cálculos se obtiene

$$d(\xi, 0, \varphi) = \frac{\pi}{2} - \int_\Omega \tan^{-1}(\beta\, R(\xi))\, dm_0.$$

Agradecimientos

La autora quiere agradecer a los profesores R. Obaya y S. Novo su colaboración y apoyo durante la realización de este trabajo.

References

[1] A. I. Alonso & R. Obaya: "Linear invariant measures for recurrent linear systems". Aceptado para su publicación en Israel J. of Math.

[2] H. Furstenberg, "Strict ergodicity and transformations of the torus". Amer. J. Math. **85** (1961), pp. 573–601.

[3] R. Johnson: "On a Floquet theory for almost-periodic, two dimensional linear systems". J. Differential Equations **37**, (1980), 184-205.

[4] R. Johnson, "Two-dimensional, almost periodic linear systems with proximal and recurrent behavior". Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), no. 3, pp. 417–422.

[5] V. M. Millionscikov: "Statistically regular systems". Math. USSR-Sbornik vol.4 No.1 (1968), pp. 125–135.

[6] S. Novo & R. Obaya: "An ergodic classification of bidimensional linear systems". Univ. Valladolid preprint 1994.

[7] S. Novo & R. Obaya, "Bidimensional linear systems with singular dynamics". To be published in Proc. Amer. Math. Soc.

[8] R. Obaya & M. Paramio, "Directional differentiability of the rotation number for the almost-periodic Schrödinger equation". Duke Math. J. **66** (1992), pp. 521–552.

[9] R. J. Sacker & G. R. Sell: "Lifting properties in skew-product flows with applications to differential equations". Memoirs of the American Math. Soc. vol.11, No.190 (1977).

[10] I. Ya. Shneiberg, "Zeros of integrals along trajectories of ergodic systems". Trans. Funk. Anal. Priloyhenia. **19** (1985), pp. 160–161.