**Quaternionic Structures**
**in Mathematics and Physics**
SISSA - Trieste, 5-9 September 1994

# ISOMORPHISMES SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE HERMITIENNE QUATERNIONIQUE

**Edmond BONAN**

**Abstract.** We expose a new proof of my theorem of 1982: wedging with the fundamental 4-form gives an isomorphism at the highest degree.

Donnons d'abord un résultat concernant la multiplication extérieure par une forme $\Psi$ de *puissance maximum* $m$, soit $\Psi^m \neq 0$.

LEMME 1.-*Pour toute forme* $\zeta$ *de degré* $k < r$, $\Psi^{r-k} \wedge \zeta = 0 \Rightarrow \zeta = 0$.

Ce qui est déjà vrai pour 0, supposons le pour l'entier $k < r-1$. Soit $\zeta$ une $(k+1)$-forme vérifiant $\Psi^{r-k-1} \wedge \zeta = 0$. Effectuons le produit intérieur par une 1-forme $\xi$, nous obtenons

$(r-k-1)\imath(\xi)\Psi \wedge \Psi^{r-k-2} \wedge \zeta + \Psi^{r-k-1} \wedge \imath(\xi)\zeta = 0$. La multiplication extérieure par $\Psi$ donne $\Psi^{r-k} \wedge \imath(\xi)\zeta = 0$, soit $\zeta = 0$ car $\imath(\xi)\zeta$ est de degré $(r-k)$ et $\xi$ est arbitraire.

Ce résultat est le meilleur possible. Par exemple supposons que $\Psi$ soit une 4-forme dont l'expression dans une base particulière soit $\Psi = \sum_{\alpha=1}^{m} \omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \omega^{\alpha_3}$.

La $m$-forme $\lambda = \omega^{1_0} \wedge \omega^{2_1} ... \wedge \omega^{m_0}$ s'oppose à une amélioration car $\Psi \wedge \lambda = 0$ et $\Psi^m \neq 0$.

L'application de ce lemme au cas d'une variété presque hermitienne de dimension réelle $2n$ est un raccourci pour obtenir le théorème de Lefschetz. La 2-forme fondamentale $F$, est de rang maximum donc $F^n \neq 0$. Nous le rappelons

THÉORÈME 2.-*Sur une variété presque hermitienne de dimension* $2n$ *l'application*

$$e(F)^h : \Lambda^{n-h}(T^*) \longrightarrow \Lambda^{n+h}(T^*)$$

*est un isomorphisme pour toutes les valeurs* $0 < h \leq n$.

L'application du lemme au cas d'une variété presque hermitienne quaternionique de dimension réelle $4n$ permet d'obtenir pour la 4-forme fondamentale $\Omega$, de puissance maximum soit $\Omega^n \neq 0$

PROPOSITION 3.-*Sur une variété presque hermitienne quaternionique de dimension* $4n$

*l'application*

$$e(\Omega) : \Lambda^r(T^*) \longrightarrow \Lambda^{r+4}(T^*)$$

*est injective pour toutes les valeurs $r < n$.*

Ce résultat interessant est cependant très insuffisant.

Soient $F_1, F_2, F_3$ trois 2-formes locales compatibles avec la structure presque hermitienne quaternionique de la variété $V_{4n}$. Elles s'écrivent dans des corepères *adaptés réels*

$$F_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} \wedge \omega^{\alpha_3}), \qquad F_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_2} + \omega^{\alpha_3} \wedge \omega^{\alpha_1}),$$
$$F_3 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_3} + \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2}).$$

Pour chacune de ces 2-formes nous introduisons les opérateurs de Lichnérowicz

$$e(F_1) = \sum_{\alpha=1}^{n} \big(e(\omega^{\alpha_0})e(\omega^{\alpha_1}) + e(\omega^{\alpha_2})e(\omega^{\alpha_3})\big), \qquad \imath(F_1) = \sum_{\alpha=1}^{n} \big(\imath(\omega^{\alpha_1})\imath(\omega^{\alpha_0}) + \imath(\omega^{\alpha_3})\imath(\omega^{\alpha_2})\big),$$
$$m(F_1) = \sum_{\alpha=1}^{n} \big(e(\omega^{\alpha_1})\imath(\omega^{\alpha_0}) - e(\omega^{\alpha_0})\imath(\omega^{\alpha_1}) + e(\omega^{\alpha_3})\imath(\omega^{\alpha_2}) - e(\omega^{\alpha_2})\imath(\omega^{\alpha_3})\big).$$

`PROPOSITION 4`.- *Pour toute permutation circulaire $(\alpha, \beta, \gamma)$ de $(1, 2, 3)$ nous avons les formules*

$$m(F_\alpha) = \big[e(F_\gamma), \imath(F_\beta)\big] = \big[\imath(F_\gamma), e(F_\beta)\big],$$
$$\big[m(F_\alpha), e(F_\alpha)\big] = 0, \qquad \big[m(F_\alpha), \imath(F_\alpha)\big] = 0, \qquad \big[\imath(F_\alpha), e(F_\alpha)\big] = \sum_{r=0}^{4n} (2n - r)E_r,$$
$$\big[m(F_\alpha), e(F_\beta)\big] = 2e(F_\gamma), \qquad \big[m(F_\alpha), m(F_\beta)\big] = 2m(F_\gamma), \qquad \big[m(F_\alpha), \imath(F_\beta)\big] = 2\imath(F_\gamma).$$

La 4-forme fondamentale globale s'écrit localement

$$\Omega = F_1 \wedge F_1 + F_2 \wedge F_2 + F_3 \wedge F_3.$$

Le calcul par récurrence sur la dimension $n$ des puissances de $\Omega$ fournit en particulier

$$\Omega^n = (2n + 1)! \bigwedge_{\alpha=1}^{n} \big(\omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \omega^{\alpha_3}\big). \qquad \Omega^{n-1} = \tfrac{1}{6}(2n - 1)! * \Omega.$$

`PROPOSITION 5`.-*Pour $\alpha = 1, 2, 3$, nous avons*

$$\big[e(F_\alpha), e(\Omega)\big] = 0, \qquad \big[m(F_\alpha), e(\Omega)\big] = 0,$$
$$\big[m(F_\alpha), e(F_\beta)^2\big] = +2e(F_\beta)e(F_\gamma), \qquad \big[m(F_\alpha), e(F_\gamma)^2\big] = -2e(F_\beta)e(F_\gamma).$$

En vue d' évaluer $\left[\imath(F_\alpha), e(\Omega)\right]$, nous avons successivement

$$\left[\imath(F_\alpha), e(F_\alpha)^2\right] = 2\sum_{r=0}^{4n}(2n-r-1)e(F_\alpha)E_r,$$

$$\left[\imath(F_\alpha), e(F_\beta)^2\right] = -m(F_\gamma)e(F_\beta) - e(\beta)m(F_\gamma), \quad \left[\imath(F_\alpha), e(F_\gamma)^2\right] = +e(F_\gamma)m(F_\beta) + m(\beta)e(F_\gamma),$$

et puisque ces deux dernières expressions commutent avec $e(\Omega)$, nous énoncerons

PROPOSITION 6.-*Pour* $\alpha = 1, 2, 3$, *nous avons*

$$\Big[e(\Omega), \left[\imath(F_\alpha), e(\Omega)\right]\Big] = 8e(F_\alpha)e(\Omega).$$

Nous appelons $r$-forme *hypereffective* une forme $\lambda$ satisfaisant aux relations $\imath(F_\alpha)\lambda = 0$ pour $\alpha = 1, 2, 3$.

THÉORÈME 8.-*Pour toutes les valeurs de* $k$, $0 < k \leq n$, *l'application*

$$e(\Omega)^k : \Lambda^{2(n-k)}(T^*) \longrightarrow \Lambda^{2(n+k)}(T^*)$$

*est bijective.*

Une conséquence immédiate est le

COROLLAIRE 9.-*L'application*

$$e(\Omega) \ : \Lambda^r(T^*) \longrightarrow \Lambda^{r+4}(T^*)$$

*est injective pour toutes les valeurs de* $r$, $0 \leq r \leq 2n-2$.

LEMME 1.-*Une* $(2n-2k)$*-forme hypereffective* $\zeta$ *vérifiant* $e(\Omega)^k\zeta = 0$ *est nulle.*

Définissons les corepères *adaptés complexes*

$$\theta^{\alpha_0} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\alpha_0} + \sqrt{-1}\omega^{\alpha_1}), \qquad \theta^{\alpha_2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\alpha_2} + \sqrt{-1}\omega^{\alpha_3}),$$
$$\theta^{\alpha_1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\alpha_0} - \sqrt{-1}\omega^{\alpha_1}), \qquad \theta^{\alpha_3} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\alpha_2} - \sqrt{-1}\omega^{\alpha_3}),$$

A l'aide des formes locales complexes

$$\mu = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\theta^{\alpha_0}\wedge\theta^{\alpha_2}, \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\theta^{\alpha_0}\wedge\theta^{\alpha_1} + \theta^{\alpha_2}\wedge\theta^{\alpha_3}\right), \qquad \bar{\mu} = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\theta^{\alpha_1}\wedge\theta^{\alpha_3},$$

La 4-forme fondamentale s'écrit

$$\Omega = 4\mu\wedge\bar{\mu} - \sigma\wedge\sigma.$$

Nous appelons $r$-forme *primitive* une forme $\zeta$ satisfaisant aux relations $\imath(\bar{\mu})\zeta = 0$ et $m(\mu)\zeta = 0$.

Nous pouvons supposer que $\zeta \neq 0$ est une *primitive paire* de bidegré disons $(\imath, \jmath)$, $0 \leq \jmath \leq \imath \leq n$, contenue dans le $sp(n)$-module irréductible de signature $(2^\jmath, 1^{\imath-\jmath}, 0^{n-\imath})$ et en vertu du lemme de Schur, nous la choisissons telle que dans un corepère adapté complexe, elle s'écrive

$$\zeta = \bigwedge_{\alpha=1}^{\jmath} \bigwedge_{\beta=\jmath+1}^{\imath} \theta^{\alpha_0} \wedge \theta^{\alpha_3} \wedge \theta^{\beta_0}.$$

Si on écrit

$$\Omega = 4\Big(\sum_{\sigma=1}^{n} \theta^{\sigma_0} \wedge \theta^{\sigma_2}\Big) \bigwedge \Big(\sum_{\rho=1}^{n} \theta^{\rho_1} \wedge \theta^{\rho_3}\Big) - \bigwedge^{2} \Big(\sum_{\tau=1}^{n} \big(\theta^{\tau_0} \wedge \theta^{\tau_1} + \theta^{\tau_2} \wedge \theta^{\tau_3}\big)\Big),$$

nous observons que le produit extérieur $\Omega^{n-\frac{1}{2}(\imath+\jmath)} \wedge \zeta$ possède alors une composante non nulle sur la $(4n - \imath - \jmath)$-forme

$$\bigwedge_{\alpha=1}^{\jmath} \bigwedge_{\beta=\jmath+1}^{\imath} \bigwedge_{\gamma=\imath+1}^{n} \theta^{\alpha_0} \wedge \theta^{\alpha_3} \wedge \theta^{\beta_0} \wedge \theta^{\beta_2} \wedge \theta^{\beta_3} \wedge \theta^{\gamma_0} \wedge \theta^{\gamma_1} \wedge \theta^{\gamma_2} \wedge \theta^{\gamma_3}.$$

Le théorème 8 est déjà vrai pour l'entier $k = n$, puisque la 4-forme $\Omega$ est de puissance maximum $n$. Supposons le pour $k = n-p$, où $p < n-1$. Soit $\zeta$ une $(2p+2)$-forme satisfaisant $\Omega^{n-p-1} \wedge \zeta = 0$. Appliquons l'un des opérateurs $\imath(F_\alpha)$ à l' égalité obtenue par multiplication extérieure par $\Omega$, il vient

$$\sum_{h=1}^{k+1} \Omega^{h-1} \wedge \big[\imath(F_\alpha), \Omega\big] \wedge \Omega^{n-p-h} \wedge \zeta + \Omega^{n-p} \wedge \imath(F_\alpha)\zeta = 0.$$

Puisque nous disposons des relations

$$\Omega \wedge \imath(F_\alpha)\Omega = \imath(F_\alpha)\Omega \wedge \Omega + 8F_\alpha \wedge \Omega, \qquad \Omega \wedge F_\alpha = F_\alpha \wedge \Omega,$$

nous pouvons, de proche en proche, amener le facteur $\Omega^{n-p-1}$ juste devant $\zeta$ dans tous les termes du premier membre, qui s'évanouissent sauf le dernier. Nous trouvons $\Omega^{n-p} \wedge \imath(F)\zeta = 0$. Le degré de la forme $\imath(F_\alpha)\zeta$ est $2p$, donc $\imath(F_\alpha)\zeta = 0$, ceci pour chacun des $\alpha$ : $\zeta$ est donc *hypereffective* et même nul d'après le lemme 1.

Nous appelons $r$-forme *effective* une forme $\lambda_r$ satisfaisant $\imath(\Omega)\lambda_r = 0$.

THÉORÈME 10.-*Toute r-forme $\varphi_r$ admet la décomposition unique en somme directe du type :*

$$\varphi_r = \sum_{h=[\frac{r+1-2n}{2}]_+}^{[\frac{r}{4}]} \Omega^h \lambda_{r-4h},$$

*où les $\lambda_{r-4h}$ sont des forme effectives.*

Le théorème est trivial pour $r = 0, 1, 2$ ou $3$. Admettons le pour l' entier $r \leq 2n-4$. Toute $(r+4)$-forme se décompose d' une manière unique $\varphi_{r+4} = \psi_{r+4} + \lambda_{p+4}$ où $\psi_{r+4} = \Omega \wedge \varphi_r$ et

$\imath(\Omega)\lambda_{r+4} = 0$ pour une certaine $r$-forme $\varphi_r$ à laquelle nous appliquons l' hypothèse de récurrence : $e(\Omega)$ étant injectif, la décomposition en résulte, cette fois pour les $r+4$-formes.

Utilisons maintenant le théorème des isomorphismes pour achever la démonstration : une $r$-forme de degré $r > 2n$ est divisible par $\Omega^{[\frac{r+1-2n}{2}]}$ avec un quotient unique, grâce au théorème des isomorphismes.

Pour toutes les valeurs de $h,\ 0 \leq h \leq n$, l'application

$$e(\Omega)^h : \Lambda^{2(n-h)-1}(T^*) \longrightarrow \Lambda^{2(n+h)-1}(T^*)$$

est injective, par suite en composant avec l' opérateur $*$ de Hodge, nous obtenons le

COROLLAIRE 11.-*Pour toutes les valeurs de $k,\ 0 < k < n$, l'application*

$$*e(\Omega)^{n-k} : \Lambda^{2k-1}(T^*) \longrightarrow \Lambda^{2k+1}(T^*)$$

*est injective.*

COROLLAIRE 12.-*Si la 4-forme fondamentale d' une variété presque hermitienne quaternionique est cofermée, la différentielle $d\Omega$ est effective.*

Comme $6 * \Omega = (2n-1)!\Omega^{n-1}$, nous obtenons $\Omega^{n-2} \wedge d\Omega = 0$.

Sur une variété riemannienne à groupe d' holonomie $Sp(n).Sp(1)$, la 4-forme fondamentale $\Omega$ est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne et les opérateurs $e(\Omega)$ et $\imath(\Omega)$ commutent avec le laplacien : les décompositions d' une forme harmonique ne fait intervenir que des formes effectives elles même harmoniques.

L' utilisation de l' injection $e(\Omega)$ pour $r = 2k$ et $*e(\Omega)^{n-k}$ pour $r = 2k-1$, nous avons enfin

THÉORÈME 13.-*Entre les nombres de Betti d' une variété kähler quaternionique compacte, nous avons les inégalités*

$$b_{2p} \leq b_{2p+4}, \qquad b_{2p-1} \leq b_{2p+1} \qquad \text{pour} \quad p < n.$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E.BONAN, *Structure presque quaternale sur une variété différentiable*, C.R.Acad.Sci.Paris, 261, (1965) p. 5445-5448.

[2] E.BONAN, *Sur les G-structures de type quaternionien*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, IX, 4, (1967) p.389-463.

[3] E.BONAN, *Sur l'algèbre extérieure d'une variété presque hermitienne quaternionique*, C.R.-Acad.Sci.Paris, 295, A, (1982) p.115-118 et 296, A, 1983, p.601-602.

[4] E.BONAN, *Décomposition de l'algèbre extérieure d'une variété hyperkählérienne*, C.R.Acad.-Sci.Paris, 320, I, (1995) p.457-462.

[5] A.FUJIKI, *On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold in Algebraic Geometry*, Sendaï, (1985) Advanced Studies in Pure Matthematics, 10.

[6] V.KRAINES, *Topology of quaternionic manifolds*, Trans.Amer.Math.Soc.122, (1965) p.356-367.

[7] E.MARTINELLI,*Variétés à structure quaternionienne généralisée*, Rev.Roum.Math.Pures et Appl. X, 7, (1965) p.915-922.

[8] T.NAGANO, M.TAKEUCHI, *Signature of quaternionic Kaehler manifolds*, Proc.Japan Acad. 59 (1983), p.384-386.

[9] V.OPROIU, *Almost quaternal structures*, An.st.Univ. Iazi. 23, (1977) p.287-298.

[10] S.SALAMON, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent.Math. 67, (1982) p.143-171.

[11] A.SWANN,*Aspects symplectiques de la Géométrie quaternioniques*, C.R.Acad.Sci.Paris, 308, I, (1989) p.115-118.

[12] A. WEIL, *Introduction à l'étude des variétés Kählériennes*, Hermann, Paris, (1958).

---

UFR de Mathématiques et d'Informatique,
Université Picardie Jules Verne,
33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France,
bonan@u-picardie.fr

5.11.1997.