MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

CEROS DE POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV

MANUEL ALFARO Y M. LUISA REZOLA

En recuerdo a Chicho

Abstract. In this expository paper, zeros of Sobolev orthogonal polynomials are considered. Properties like location, interlacing or asymptotic distribution of zeros are presented.

1. Introducción

Los ceros de los polinomios ortogonales desempeñan un papel importante en teoría de interpolación, fórmulas de cuadratura, teoría espectral de algunos operadores lineales, diseño de filtros digitales, ... por lo que su estudio posee gran interés.

Dada una medida de Borel finita y positiva μ con soporte S_μ contenido en $\mathbb{R}$, la expresión

$$(p,q)=\int_{S_\mu} pq\,d\mu, \quad p,q\in\mathcal{P},$$

define un producto escalar en el espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios con coeficientes reales, que tiene asociada una sucesión de polinomios ortogonales (única salvo un factor multiplicativo). En lo sucesivo, llamaremos estándar tanto a estos productos como a sus correspondientes polinomios ortogonales.

Nótese que el operador multiplicación por x es simétrico respecto a este producto, es decir, $(xp,q)=(p,xq)$, $\forall p,q\in\mathcal{P}$.

Los ceros de los polinomios ortogonales estándar tienen buenas propiedades. Así, están situados en el interior de la envoltura convexa de S_μ (luego son reales), son simples y los de cada dos polinomios consecutivos se entrelazan. (Para las propiedades generales de los polinomios ortogonales ver, por ejemplo, [10] y [31].)

En la década de los sesenta, motivados por un artículo de Lewis [16] en el que mediante mínimos cuadrados se estudiaba la aproximación simultánea de una función y sus derivadas, varios matemáticos alemanes estudiaron productos escalares del tipo

$$(p,q)_S=\int_{S_{\mu_0}} p\,q\,d\mu_0+\lambda\int_{S_{\mu_1}} p'q'\,d\mu_1 \tag{1.1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33C45, 42C05.
Key words and phrases. Sobolev orthogonal polynomials, zeros.
La investigación de ambos autores está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

siendo μ_0 y μ_1 medidas con $S_{\mu_0} = S_{\mu_1}$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\lambda \geq 0$. Si $\lambda > 0$, el producto no es estándar (obsérvese que el operador multiplicación no es simétrico) y los correspondientes polinomios ortogonales poseen propiedades distintas de las usuales en los polinomios estándar, entre ellas el comportamiento de los ceros.

Los primeros resultados sobre ceros fueron dados por Althammer [6], Brenner [7] y Cohen [11] para casos particulares de (1.1): $\mu_0 = \mu_1$ clásicas, obteniendo sobre localización de ceros situaciones similares a las de los polinomios estándar, si bien en [6] se da el primer ejemplo de un producto escalar Sobolev para el que un polinomio tiene un cero fuera del intervalo de ortogonalidad. Además, en [11], se plantean cuestiones tales como entrelazamiento de ceros de polinomios consecutivos o dependencia monótona de los ceros del parámetro λ, que se dejan abiertas.

El producto (1.1) es un caso particular de los llamados productos escalares Sobolev, denominación que suele emplearse para aquéllos en que aparecen derivadas. Más concretamente, un producto escalar Sobolev es de la forma

$$(p, q)_S = \sum_{i=0}^{m} M_i \int_{S_{\mu_i}} p^{(i)}\, q^{(i)}\, d\mu_i \tag{1.2}$$

donde μ_i son de Borel, finitas y positivas, con $S_{\mu_i} \subset \mathbb{R}$, $M_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m-1$ y $M_0, M_m > 0$. Para garantizar la existencia de sucesión de polinomios ortogonales respecto de (1.2), hay que imponer que al menos uno de los soportes S_{μ_i} sea un conjunto infinito.

Nos encontramos ahora con dos situaciones generales. Si las medidas μ_i, $i = 1, \ldots, m$, son discretas, los polinomios ortogonales asociados reciben el nombre de polinomios ortogonales tipo Sobolev o Sobolev discretos. Cuando todas las medidas en (1.2) poseen parte absolutamente continua, tenemos los llamados polinomios ortogonales Sobolev continuos que corresponden a ortogonalidad en espacios de Sobolev.

Es de señalar que en la literatura sobre polinomios ortogonales se consideran también formas bilineales definidas a partir de funcionales lineales que en el caso de ser positivos, por el teorema de Riesz, poseen una representación integral. Esta situación puede aplicarse para definir también productos Sobolev, sin embargo en este artículo, por razones de simplicidad, nos limitaremos a los casos de productos definidos mediante medidas. Por los mismos motivos nos centraremos principalmente en el estudio de productos escalares reales.

El propósito de este trabajo es presentar una exposición no exhaustiva sobre el comportamiento de los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev contemplando las dos situaciones citadas. Uno de los puntos de interés de este tema es que las propiedades de tales ceros difieren notablemente de las de los ceros de los polinomios estándar.

2. Productos Sobolev discretos

Durante los últimos años varios autores han estudiado polinomios ortogonales respecto de productos escalares tipo Sobolev de la forma

$$(p, q)_S = \int_I p\, q\, d\mu + \sum_{i=0}^{m} M_i\, p^{(i)}(c)\, q^{(i)}(c), \tag{2.1}$$

donde μ es una medida de Borel positiva y finita soportada en un intervalo I de $\mathbb{R}$, $c \notin I^\circ$ (el interior de I), $m \geq 1$, $M_i \geq 0$ para $i = 0, \ldots, m-1$ y $M_m > 0$. La localización de los ceros de los polinomios Q_n ortogonales respecto del producto (2.1) ha sido considerada por ejemplo en [4], [14], [15], [20], [23], destacando la existencia de ceros fuera de la envoltura convexa de $I \cup \{c\}$, que pueden ser incluso complejos ([2], [24]).

Uno de los primeros resultados sobre ceros de los polinomios Q_n es que éstos tienen al menos $n-(m+1)$ cambios de signo o ceros de multiplicidad impar en I° siempre que $n \geq m+1$. Esta propiedad es debida a que los polinomios Q_n son cuasi-ortogonales de orden $m+1$ con respecto de la medida $(x-c)^{m+1}\,d\mu$, esto es, $\int_I pQ_n(x-c)^{m+1}\,d\mu = 0$ para todo polinomio p con $\operatorname{gr} p \leq n-(m+1)-1$.

Analizando dos casos particulares de producto Sobolev, se tiene:

(i) Si $M_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m-1$ y $M_0 > 0$ entonces, siempre que $n \geq m+1$, Q_n tiene al menos $n-2$ ceros de multiplicidad impar en I°. Además, si c pertenece a la frontera de I, Q_n tiene al menos $n-1$ ceros de multiplicidad impar en I° (ver [4], [28]).

(ii) Cuando el producto (2.1) es

$$(p,q)_S = \int_I p\,q\,d\mu + M_r p^{(r)}(c)\,q^{(r)}(c) + M_s p^{(s)}(c)\,q^{(s)}(c)$$

donde $1 \leq r < s$ y $M_r, M_s > 0$ entonces, para cada $n \geq s+1$, Q_n tiene al menos $n-2$ ceros de multiplicidad impar en I° (ver [8]).

Estos dos resultados parecen sugerir que el número de ceros de Q_n en I° no depende del orden de las derivadas en el producto (2.1) sino del número de términos en la parte discreta del producto escalar. Esta conjetura fue resuelta afirmativamente en [1] incluso cuando los coeficientes M_i en el producto son negativos, no siendo en este caso el producto definido positivo.

Consideremos el producto

$$(p,q)_S = \int_{S_\mu} p\,q\,d\mu + \sum_{i=1}^{m} M_i\,p^{(\nu_i)}(c)\,q^{(\nu_i)}(c), \tag{2.2}$$

donde μ es una medida de Borel positiva y finita con soporte conteniendo un conjunto infinito de puntos, $S_\mu \subset \mathbb{R}$, $0 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_m$ y $M_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los enteros positivos y Q_n el n-ésimo polinomio mónico de menor grado, no idénticamente cero, tal que $(p, Q_n)_S = 0$, $p \in \mathcal{P}_{n-1}$. La existencia de Q_n se deduce de resolver un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con $n+1$ incógnitas. La unicidad se sigue de imponer que sea la solución polinómica de menor grado. Si el producto es definido positivo entonces el grado de Q_n es n y todos los Q_n son distintos. En general, esto no es así y para distintos valores de n podemos tener el mismo Q_n. Para los polinomios Q_n, ortogonales respecto de (2.2), tenemos el siguiente resultado sobre localización de sus ceros:

Teorema 1 ([1]). *Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, Q_n tiene al menos $n - \overline{n}$ cambios de signo en el interior de la envoltura convexa de S_μ, donde $\overline{n}$ denota el número de términos en la parte discreta del producto (2.2) cuyo orden de derivación es menor que n.*

Como consecuencia de este teorema y del teorema 4 en [17], se tiene que para n suficientemente grande y cierto tipo de medidas μ para las que exista la llamada asintótica relativa de la sucesión (Q_n) (por ejemplo, medidas tales que la derivada de Radon-Nikodym, μ', respecto de la medida de Lebesgue es mayor que cero en casi todo punto de S_μ), los polinomios Q_n ortogonales con respecto a (2.2) con $M_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, m$, tienen exactamente $n - m$ ceros simples en el interior de S_μ y los m ceros restantes son atraídos por el punto c.

En [3], [5], [14], por ejemplo, pueden verse resultados sobre acotación y aceleración de los ceros que están fuera del soporte de la medida en términos de las masas M_i cuando S_μ es un intervalo I y c pertenece a la frontera de I.

Otra propiedad interesante es el entrelazamiento de los ceros de estos polinomios ortogonales. Si no hay parte discreta tenemos la definición clásica de ortogonalidad y todos los ceros de Q_{n+1} entrelazan con los de Q_n. Para productos tipo Sobolev con $M_i \geq 0$, los polinomios Q_n y Q_{n+1} pueden tener ceros comunes (ver [2]). Si algunos coeficientes M_i son negativos, sabemos que puede ocurrir que $Q_n \equiv Q_{n+1}$. La propiedad de separación de los ceros de los polinomios ortogonales estándar se puede deducir de la fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi (ver por ejemplo teorema 6.2, p. 34 de [10]). Usando la cuasi-ortogonalidad de Q_n respecto de la medida $(x - c)^{\nu_m + 1}\, d\mu$, en [1] se obtiene una fórmula de cuadratura tipo Gauss-Jacobi y a partir de ella, información sobre el entrelazamiento entre los ceros de Q_n y Q_{n+1}. Más concretamente, si designamos por $x_{n1} < x_{n2} < \dots < x_{nN_n}$ los puntos del interior de la envoltura convexa de S_μ, $(\mathrm{co}(S_\mu))^\circ$, donde Q_n cambia de signo y por κ_n el número de intervalos $I_{nh} = (x_{nh}, x_{n,h+1})$, $h = 1, \dots, N_n - 1$ que contienen al menos un punto donde Q_{n+1} cambia de signo, entonces se tiene:

Teorema 2 ([1]). *Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2\nu_j + 3 \leq n < \nu_{j+1}$ $(j = 0, \dots, m)$ se cumple uno de los dos casos siguientes:*

(i) *$\kappa_n \geq n - 2\nu_j - 3$, o*

(ii) *los polinomios Q_n y Q_{n+1} tienen al menos $[\frac{1}{2}(n + 1 - \nu_j + N_{n+1})]$ ceros comunes en $(\mathrm{co}(S_\mu))^\circ$, donde $[x]$ designa la parte entera de x.*

En consecuencia, una situación interesante aparece cuando consideramos el producto

$$(p, q)_S = \int_{S_\mu} p\, q\, d\mu + \sum_{i=0}^{m-1} M_i\, p^{(i)}(c)\, q^{(i)}(c)$$

donde $c \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{co}(S_\mu)$, $M_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto de $\mathrm{co}(S_\mu)$. Hemos señalado antes que, en este caso y para n suficientemente grande, Q_n tiene $n - m$ ceros en $(\mathrm{co}(S_\mu))^\circ$ y el resto fuera de $\mathrm{co}(S_\mu)$. Por lo tanto no se da el caso (*ii*) del teorema anterior y se tiene que $\kappa_n \geq n - 2m - 1$ para n grande.

Permanece abierto el estudio anterior cuando en la parte discreta del producto (2.2) consideramos puntos distintos $(c_i)_{i=1}^m$.

3. Productos Sobolev continuos

Para polinomios ortogonales de Sobolev continuos, a diferencia de lo que ocurre en el caso discreto, en general, no se conocen propiedades de cuasi-ortogonalidad de estos polinomios respecto de alguna medida. Esto lleva consigo que la técnica de localización de ceros citada en el caso discreto no puede aplicarse ahora.

En la última década, se han obtenido bastantes resultados para productos (1.1) con medidas μ_0 y μ_1 particulares, generalmente, clásicas o modificaciones de las clásicas (pares coherentes). Se trata de resultados de localización, en los que es bastante habitual que haya un cero (dos, en los casos simétricos) fuera del soporte de la medida, como ocurría en el ejemplo de Althammer, y de entrelazamiento de los ceros de los polinomios Sobolev con los ceros de los polinomios ortogonales respecto de μ_0 (véase, por ejemplo, [21], [25], [27]). También se ha probado para determinados productos la existencia de ceros complejos ([9], [26]).

Por otra parte, propiedades sobre acumulación de ceros pueden deducirse a partir de propiedades asintóticas de los polinomios. En efecto, si (P_n) es una sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto de una medida μ con soporte en un intervalo I y probamos que Q_n/P_n converge a una función no nula, uniformemente sobre compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$, el teorema de Hurwitz nos permite afirmar que los ceros de los polinomios Q_n se acumulan en I. Resultados de este tipo pueden verse en [22], entre otros.

La distribución asintótica de ceros de polinomios ortogonales y de sus derivadas puede deducirse a partir de resultados de convergencia débil de medidas. A cada polinomio p de grado n, se le puede asociar su medida de contar ceros normalizada:

$$\nu(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son los ceros de p, contados tantas veces como indica su multiplicidad y δ_{x_j} es la medida de Dirac en x_j. Se dice que una sucesión de polinomios (p_n) con $\operatorname{gr} p_n = n$, tiene distribución asintótica de ceros μ, si μ es una medida de probabilidad y la sucesión de sus medidas de contar normalizadas $(\nu(p_n))$ converge débilmente a μ

$$\nu(p_n) \xrightarrow{*} \mu,$$

es decir, para toda función continua f se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int f\, d\nu(p_n) = \int f\, d\mu.$$

La distribución asintótica de ceros para polinomios estándar ha sido ampliamente estudiada. Una referencia obligada es [30], donde se introduce la clase **Reg** de medidas regulares. Uno de los motivos de interés de esta clase es que si una medida $\mu \in \mathbf{Reg}$ y con (P_n) denotamos sus correspondientes polinomios ortogonales mónicos, entonces

$$\nu(P_n) \xrightarrow{*} \omega_{S_\mu},$$

donde ω_{S_μ} es la medida de equilibrio de S_μ.

En esta dirección, en [13] se ha probado:

Teorema 3. *Sea Q_n la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto de (1.1), donde μ_0 y μ_1 son medidas sobre $\mathbb{R}$ de la clase* **Reg**, *con soportes compactos* *que verifican ciertas condiciones de regularidad. Entonces,*

$$\nu(Q'_n) \xrightarrow{\ *\ } \omega_{S_{\mu_0}\cup S_{\mu_1}}.$$

Además, si $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_0}$ *entonces*

$$\nu(Q_n) \xrightarrow{\ *\ } \omega_{S_{\mu_0}}.$$

4. Productos Sobolev generales

El problema de la localización de los ceros de los polinomios Q_n ortogonales respecto de productos más generales como

$$(p,q)_S = \sum_{k=0}^{m} \int p^{(k)}(x)\,\overline{q^{(k)}(x)}\,d\mu_k, \tag{4.1}$$

donde $(\mu_k)_{k=0}^m$ son medidas de Borel positivas y finitas con soporte compacto contenido en $\mathbb{C}$, no es trivial. Como antes hemos citado, tanto en el caso discreto como en el continuo, ejemplos sencillos muestran que los ceros no están necesariamente en la envoltura convexa de la unión de los soportes de las medidas μ_k y que incluso cuando todas las medidas μ_k están soportadas en $\mathbb{R}$ puede haber ceros complejos. En [13], se presentan algunos resultados numéricos en esta línea.

Los primeros resultados para estos productos aparecen en [18], donde bajo condiciones bastante generales sobre las medidas μ_k con $S_{\mu_k} \subset \mathbb{R}$ se obtiene que los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev están contenidos en un subconjunto compacto del plano complejo. Éste y otros resultados han sido generalizados en [19] para medidas con soporte compacto en $\mathbb{C}$. Más concretamente, sea M el operador multiplicación definido en $\mathcal{P}$, $Mp(z) = zp(z)$, entonces se tiene:

Teorema 4 ([19])**.** *Si el operador multiplicación M está acotado entonces los ceros de los polinomios Q_n, ortogonales respecto de (4.1), están contenidos en el disco $\{z : |z| \le \|M\|\}$.*

Por su elegancia y sencillez exponemos a continuación la demostración de este hecho:

Sea z_0 un cero de Q_n entonces $zp(z) = z_0p(z) + Q_n(z)$ con $p \in \mathcal{P}_{n-1}$. Como p y Q_n son ortogonales se tiene

$$|z_0|^2\|p\|_S^2 = \|zp\|_S^2 - \|Q_n\|_S^2 \le \|zp\|_S^2 = \|Mp\|_S^2 \le \|M\|^2\|p\|_S^2.$$

Se dice que el producto (4.1) es **secuencialmente dominado** si cumple las siguientes condiciones:

(i) $S_{\mu_k} \subset S_{\mu_{k-1}}, \quad k = 1,\ldots,m.$

(ii) $d\mu_k = f_{k-1}\,d\mu_{k-1},\ f_{k-1} \in L_\infty(\mu_{k-1}), \quad k = 1,\ldots,m.$

Por ejemplo, es secuencialmente dominado cuando todas las medidas μ_k son iguales.

Este concepto fue introducido en [18] demostrándose que es una condición suficiente para que el operador multiplicación sea acotado. En un principio pareció que ésta era una condición demasiado restrictiva, sin embargo en un reciente trabajo (ver [29]) se ve que para una amplia clase de productos escalares Sobolev soportados en $\mathbb{R}$ la acotación del operador multiplicación implica que la norma asociada al producto es equivalente a la norma de un producto secuencialmente dominado.

Puede ocurrir que el producto no sea secuencialmente dominado y sin embargo que los ceros de los polinomios Q_n estén uniformemente acotados, como muestra el siguiente teorema para el producto (4.1) con $m = 1$.

Teorema 5 ([18])**.** *Si* $\mathrm{co}(S_{\mu_0}) \cap \mathrm{co}(S_{\mu_1}) = \emptyset$*, entonces los ceros de* Q_n' *son simples y están contenidos en el interior de* $\mathrm{co}(S_{\mu_0}) \cup \mathrm{co}(S_{\mu_1})$*, y los ceros de* Q_n *están contenidos en el disco centrado en el punto de* $\mathrm{co}(S_{\mu_1})$ *más alejado de* $\mathrm{co}(S_{\mu_0})$ *y radio el diámetro de* $\mathrm{co}(S_{\mu_0}) \cup \mathrm{co}(S_{\mu_1})$*.*

Recientemente, en [12] se ha extendido el resultado del teorema 4 a productos del tipo (4.1) sin imponer que los soportes S_{μ_k} sean compactos, mejorando la cota que allí aparece. El nuevo método empleado para la localización de los ceros no hace uso de la acotación del operador multiplicación.

El resultado a que nos referimos es el siguiente:

Teorema 6 ([12])**.** *Sea el producto (4.1) donde* $d\mu_k = w_k\, d\mu$ *con* $\frac{w_k}{w_{k-1}} \in L_\infty(\mu)$*,* $k = 1, \dots, m$*. Si* z_0 *es un cero de* Q_n *entonces*

$$d(z_0, co(S_\mu)) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} k^2\, \|w_k/w_{k-1}\|_\infty}$$

Permanece abierta la cuestión de si los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev están uniformemente acotados incluso cuando los soportes de las medidas sean compactos.

Referencias

[1] M. Alfaro, G. López y M. L. Rezola, Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **69** (1996), 171–179.

[2] M. Alfaro, F. Marcellán, H. G. Meijer y M. L. Rezola, Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products, *J. Math. Anal. Appl.* **184** (1994), 360–381.

[3] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, *Appl. Anal.* **67** (1997), 157–174.

[4] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 737–757.

[5] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, Sobolev-type orthogonal polynomials: the nondiagonal case, *J. Approx. Theory* **83** (1995), 266–287.

[6] P. Althammer, Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation, *J. Reine Angew. Math.* **211** (1962), 192–204.

[7] J. Brenner, Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen, en *Constructive theory of functions* (Budapest, 1969), Akadémiai Kiadó, Budapest (1972), 77–83.

[8] M. G. de Bruin, A tool for locating zeros of orthogonal polynomials in Sobolev inner product spaces, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 27–35.

[9] M. G. de Bruin y H. G. Meijer, Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev spaces, *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), 233–246.

[10] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, Nueva York, 1978.

[11] E. A. Cohen, Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space $W^{1,2}[-1,1]$, *SIAM J. Math. Anal.* **6** (1975), 105–116.
[12] A. J. Durán y E. B. Saff, Zero location for nonstandard orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* (por aparecer).
[13] W. Gautschi y A. B. J. Kuijlaars, Zeros and critical points of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **91** (1997), 117–137.
[14] R. Koekoek, *Generalizations of classical Laguerre polynomials and some q-analogues*, Doctoral Dissertation, Techn. Univ. of Delft, Holanda, 1990.
[15] R. Koekoek y H. G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 768–773.
[16] D. C. Lewis, Polynomial least square approximation, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 273–278.
[17] G. López, F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product, *Constr. Approx.* **11** (1995), 107–137.
[18] G. López Lagomasino y H. Pijeira Cabrera, Zero Location and nth Root Asymptotics of Sobolev Orthogonal Polynomials, *J. Approx. Theory* **99** (1999), 30–43.
[19] G. López Lagomasino, H. Pijeira Cabrera y I. Pérez Izquierdo, Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane, *J. Comput. Appl. Math.* **127** (2001), 219–230.
[20] F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar, On zeros of Sobolev type orthogonal polynomials, *Rend. Mat. Appl.* **12** (1992), 455–473.
[21] F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar, Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials, en *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II* (Wilrijk, 1993), *Math. Appl.* **296**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1994), 71–82.
[22] A. Martínez-Finkelshtein y J. J. Moreno-Balcázar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for a Jacobi weight, *Methods Appl. Anal.* **4** (1997), 430–437.
[23] H. G. Meijer, Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space, *J. Math. Anal. Appl.* **172** (1993), 520–532.
[24] H. G. Meijer, On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 179–191.
[25] H. G. Meijer, Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *Indag. Math. (N.S.)* **4** (1993), 163–176.
[26] H. G. Meijer, Sobolev orthogonal polynomials with a small number of real zeros, *J. Approx. Theory* **77** (1994), 305–313.
[27] H. G. Meijer y M. G. de Bruin, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs, *J. Comput. Appl. Math.* (por aparecer).
[28] T. E. Pérez y M. A. Piñar, Global properties of the zeros for Sobolev-type orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 225–232.
[29] J. M. Rodríguez, Multiplication operator in Sobolev spaces with respect to measures, *J. Approx. Theory* **109** (2001), 157–197.
[30] H. Stahl y V. Totik, *General orthogonal polynomials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
[31] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Calle Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: `alfaro@posta.unizar.es, rezola@posta.unizar.es`