MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

CONJUNTOS DOMINANTES EN ESPACIOS DE BERGMAN CON PESO

FERNANDO PÉREZ-GONZÁLEZ Y JULIO C. RAMOS

A la memoria del Profesor José Javier Guadalupe, compañero, amigo, maestro

Abstract. In this paper we give necessary and sufficient conditions in order to a subset of the open unit disc to be a dominating set for weighted Bergman spaces. A result of D. Luecking is generalized.

1. Introducción

Sea U el disco unidad abierto del plano complejo. Si $p > 0$ y $\alpha > -1$, denotemos por $A^p_\alpha(U)$ el espacio de todas las funciones f que son analíticas en U y tales que

$$\|f\|^p_{p,\alpha} := \int_U |f|^p (1-|z|^2)^\alpha \, dm(z) < \infty \,,$$

donde dm representa la medida de área de Lebesgue. $A^p_\alpha(U)$ es conocido como el espacio de Bergman pesado siendo $w(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ el peso usual. Supongamos que G es un subconjunto medible de U de medida positiva. Nuestro objetivo en este artículo es encontrar condiciones sobre el conjunto G que garanticen que sea un *conjunto dominante* para el espacio $A^p_\alpha(U)$, esto es, para que se verifique

$$\|f\|^p_{p,\alpha} \simeq \int_G |f|^p w(z) \, dm(z) \,,$$

para toda $f \in A^p_\alpha(U)$. Este tipo de problemas ha sido considerado para distintas clases de funciones (ver, por ejemplo, [1] y [2]). En [3], D. Luecking los estudió para los espacios de Bergman $A^p(U)$ clásicos, pero bajo otra perspectiva, a saber, tratando de dar respuesta a cuestiones como, por ejemplo, qué propiedades ha de tener el conjunto para que el operador $f \mapsto f|_G$ de $A^p(U)$ en $L^p(G)$ tenga rango cerrado. En este trabajo, siguiendo la línea de [3], presentamos una generalización del resultado principal de Luecking pero haciendo énfasis en la distribución uniforme de la masa de G tanto cerca del círculo unidad como en discos pseudohiperbólicos. Si $a \in U$ y $\eta \in (0,1)$, denotamos por $D(a,\eta)$ al disco euclídeo abierto centrado en a y de radio

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30H05, 46J15.

Key words and phrases. Dominating set, Bergman spaces, pseudo-hyperbolic disks.

La investigación del primer autor ha sido parcialmente soportada por la DGESIC, Proyecto de Investigación PB98-0444 y por la DGUI-Gobierno de Canarias, proyecto PI-1999/105.

El segundo autor agradece a la Universidad de Oriente, Venezuela, la financiación recibida de esta institución para cubrir en parte su estancia en La Laguna.

$(1-|a|)\eta$. Obsérvese que $D(a,\eta)\subset U$. El disco pseudohiperbólico de centro en a y radio r es, por definición, el conjunto

$$\Delta(a,r)=\left\{z:\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<r\right\}.$$

Nuestro resultado principal lo podemos formular como sigue.

Teorema 1.1. *Supongamos que G es un subconjunto medible de U, $p>0$ y consideremos el peso $w(z)=(1-|z|^2)^\alpha$ con $\alpha>-1$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Existe una constante $C>0$ tal que*

$$\int_U w(z)\,|f(z)|^p\,dm\leq C\int_G w(z)\,|f(z)|^p\,dm,$$

para toda $f\in A^p_\alpha(U)$.

(2) *Existe una constante $\delta>0$ tal que*

$$m(G\cap D)>\delta m(U\cap D),$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z|=1$.

(3) *Existen constantes $\delta_0>0$ y $\eta\in(0,1)$ tal que*

$$m(G\cap D(a,\eta))>\delta_0 m(D(a,\eta)),$$

para todo $a\in U$.

(4) *Existen constantes $\delta_1>0$ y $\eta_1\in(0,1)$ tal que*

$$m(G\cap\Delta(a,\eta_1))>\delta_1 m(\Delta(a,\eta_1)),$$

para todo $a\in U$.

La demostración del Teorema 1.1 se reparte a lo largo del trabajo, ocupándonos en la Sección 2 de las equivalencias entre (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4), las cuales tienen un marcado carácter geométrico y pueden tener interés por sí mismas, mientras que en la Sección 3 se completa la prueba haciendo intervenir la condición analítica (1), propia de los conjuntos dominantes.

2. Distribución de la masa en discos

Como ya apuntamos, en esta sección nos centraremos en probar que las condiciones (2), (3) y (4) en el Teorema 1.1 son equivalentes.

(2) $\Rightarrow$ (3): Supongamos que el conjunto G satisface la condición en (2) y sea $a\in U$. Denotemos por b al punto de la frontera que es extremo del radio que pasa por a. Afirmamos que existen constantes $C>0$ y $0<\eta<1$, que dependen sólo de δ, verificando

$$\left\{\begin{array}{l}1-|a|\leq Cr,\quad \text{y}\\ m(D\cap U\setminus D(a,\eta))<\frac{\delta}{2}m(D\cap U),\end{array}\right.\tag{2.1}$$

donde D es el disco con centro b y un radio r que más adelante fijaremos.

En efecto, notemos, en primer lugar, que la segunda condición en (2.1) es equivalente a $m(D\cap D(a,\eta)) > \left(1-\frac{\delta}{2}\right) m(D\cap U)$ ya que

$$m(D\cap U\setminus D(a,\eta)) = m(D\cap U) - m(D\cap D(a,\eta)).$$

Además, $m(D\cap U)$ es una función creciente de r que satisface

$$m(D\cap U) = \begin{cases} 0, & r=0, \\ \pi, & r\geq 2; \end{cases}$$

y dado que el centro de D está en la circunferencia unidad, no es difícil comprobar que

$$\frac{1}{4} m(D) \leq m(D\cap U) \leq \frac{1}{2} m(D) \tag{2.2}$$

para todo $0\leq r\leq 2$. Luego, dado $\delta\in(0,1)$, podemos tomar

$$r = \frac{\delta}{4\pi}(1-|a|),$$

y en consecuencia

$$m(D\cap U) \leq \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{\delta^2}{32\pi}(1-|a|)^2, \tag{2.3}$$

con lo cual, haciendo $C=\frac{4}{\delta}\pi$, se obtiene que $1-|a|\leq Cr$. Nos interesa ahora elegir η de modo que

$$m(D\cap D(a,\eta)) > \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta^2}{32\pi}(1-|a|)^2.$$

Con este fin, consideremos el disco D_2 contenido en D, tangente a $D(a,\eta)$ en un punto de U y cuyo centro está en la intersección de la frontera de $D(a,\eta)$ con el radio que pasa por a. Nótese que el radio de D_2 es $r-(1-|a|)(1-\eta) = (1-|a|)\left(\frac{\delta}{4\pi}+\eta-1\right)$, y, por su construcción, se tiene que

$$m(D\cap D(a,\eta)) > m(D_2\cap D(a,\eta)) > \frac{1}{4} m(D_2) = \frac{\pi}{4}(1-|a|)^2\left(\frac{\delta}{4\pi}+\eta-1\right)^2.$$

Haciendo

$$\eta = 1-\frac{3\delta}{4\pi},$$

tenemos que

$$m(D\cap D(a,\eta)) > \frac{\pi}{4}(1-|a|)^2\frac{\delta^2}{4\pi^2},$$

y como $\delta\in(0,1)$, vale la desigualdad $\frac{\delta^2}{16\pi} > \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta^2}{32\pi}$ y por tanto,

$$m(D\cap D(a,\eta)) > \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta^2}{32\pi}(1-|a|)^2,$$

la cual, con (2.3), establece la validez de la segunda de las acotaciones en (2.1).

En lo que resta de la prueba de esta implicación, supondremos que D y $D(a,\eta)$ están fijos. Como $m(G\cap D) = m(G\cap D\cap D(a,\eta)) + m(G\cap D\setminus D(a,\eta))$, $G\cap D\cap D(a,\eta)\subset G\cap D(a,\eta)$ y $G\subset U$, podemos escribir que

$$m(G\cap D) \leq m(G\cap D(a,\eta)) + m(G\cap D\setminus D(a,\eta)),$$

y como $m\left(G\cap D\setminus D\left(a,\eta\right)\right)<\frac{\delta}{2}m\left(D\cap U\right)$, queda que

$$m\left(G\cap D\right)\leq m\left(G\cap D\left(a,\eta\right)\right)+\frac{\delta}{2}m\left(D\cap U\right).$$

Por tanto

$$m\left(G\cap D\left(a,\eta\right)\right)\geq m\left(G\cap D\right)-\frac{\delta}{2}m\left(D\cap U\right),$$

y dado que G satisface (2), se concluye que

$$\begin{aligned} m\left(G\cap D\left(a,\eta\right)\right)&>\frac{\delta}{2}m\left(D\cap U\right)\geq\frac{\delta}{8}\pi r^2\\ &=\frac{\delta}{8}\pi\left(\frac{\delta}{4\pi}\right)^2\left(1-|a|\right)^2\frac{\eta^2}{\eta^2}=\frac{\delta^3}{8\left(4\pi-3\delta\right)^2}m\left(D\left(a,\eta\right)\right),\end{aligned}$$

lo que prueba que G satisface (3) con $\delta_0=\frac{\delta^3}{8(4\pi-3\delta)^2}$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Supongamos ahora que G satisface (3) y sea D un disco con centro b sobre $|z|=1$ y radio r (≤ 2). En esta situación, para $\eta\in(0,1)$ dado, existe un único a en el segmento que une el origen con b tal que $r=\left(1+\eta\right)\left(1-|a|\right)$ y D contiene tangencialmente a $D\left(a,\eta\right)$.

Para tal $a\in U$, por (3), se tiene que

$$\begin{aligned} m\left(G\cap D\right)>m\left(G\cap D\left(a,\eta\right)\right)&>\delta_0 m\left(D\left(a,\eta\right)\right)\\ &=\delta_0\pi\eta^2\left(1-|a|\right)^2=\delta_0\pi\eta^2\frac{r^2}{\left(1+\eta\right)^2}\\ &=\delta_0\frac{\eta^2}{\left(1+\eta\right)^2}m\left(D\right)\geq\frac{\delta_0\eta^2}{\left(1+\eta\right)^2}m\left(D\cap U\right),\end{aligned}$$

es decir, (2) se satisface con $\delta=\delta_0\eta^2/\left(1+\eta\right)^2$.

Para probar la equivalencia con (4) es conveniente utilizar algunos sencillos lemas técnicos que por completitud incluimos.

Lema 2.1. *Si $z\in D\left(a,\eta\right)$ y $2\eta/\left(1+\eta^2\right)\leq r<1$, entonces*

$$D\left(a,\eta\right)\subset\Delta\left(z,r\right).$$

Demostración. Para $w,z\in D\left(a,\eta\right)$, la expresión

$$\frac{|z-w|}{|1-\overline{w}z|}$$

alcanza el máximo cuando $|z|=|a|+\left(1-|a|\right)\eta$ y $|w|=|a|-\left(1-|a|\right)\eta$. Así resulta que

$$\begin{aligned} |z-w|&\leq 2\left(1-|a|\right)\eta,\\ |1-\overline{w}z|&\leq 1-\left(|a|+\left(1-|a|\right)\eta\right)\left(|a|-\left(1-|a|\right)\eta\right)\leq\left(1-|a|\right)\left(1+\eta^2\right);\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{|z-w|}{|1-\overline{w}z|}\leq\frac{2\eta}{1+\eta^2}\leq r,$$

lo que significa que $w \in \Delta(z, r)$. □

Lema 2.2. *Dado $r \in (0,1)$, existen una constante C_r que sólo depende de r tal que para todo $a \in U$ se verifica que*

$$\frac{1}{C_r}(1-|a|)^2 \leq m(\Delta(a,r)) \leq C_r(1-|a|)^2.$$

Demostración. Primero notemos que $\Delta(a, \eta)$ es un disco euclídeo con centro C y radio R dados por

$$C = \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a, \qquad R = \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r.$$

Luego

$$m(\Delta(a,r)) = \pi \frac{\left(1-|a|^2\right)^2}{\left(1-r^2|a|^2\right)^2} r^2,$$

y como $|a| \in (0,1)$, $1-|a|^2 \leq 2(1-|a|)$ entonces

$$m(\Delta(a,r)) \leq \frac{4\pi r^2}{(1-r^2)^2}(1-|a|)^2 = C_1(r)(1-|a|)^2. \tag{2.4}$$

Por otra parte, como

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^2}{\left(1-r^2|a|^2\right)^2} \geq \left(1-|a|^2\right)^2,$$

entonces

$$m(\Delta(a,r)) \geq \pi r^2\left(1-|a|^2\right)^2 \geq \pi r^2(1-|a|)^2 = C_2(r)(1-|a|)^2. \tag{2.5}$$

Luego de (2.4) y (2.5) se concluye que existe una constante $C_r > 1$ tal que

$$\frac{1}{C_r}(1-|a|)^2 \leq m(\Delta(a,r)) \leq C_r(1-|a|)^2.$$

□

Ahora estamos en disposición de probar las equivalencias relativas a la condición (4) del Teorema 1.1.

(3) ⇒ (4): Sea $a \in U$ y supongamos que existe $\eta \in (0,1)$ y $G \subset U$ tal que se cumple (3). Seleccionemos $\eta_1 \in (0,1)$ tal que $\frac{2\eta}{1+\eta^2} \leq \eta_1$, entonces por (3), y los Lemas 2.1 y 2.2 podemos escribir

$$\begin{aligned} m(G \cap \Delta(a,\eta_1)) &\geq m(G \cap D(a,\eta)) \geq \delta_0 m(D(a,\eta)) \\ &= \delta_0 \pi (1-|a|)^2 \eta^2 > \frac{\delta_0 \pi \eta^2}{C(\eta_1)} m(\Delta(a,\eta_1)), \end{aligned}$$

de modo que (4) se cumple con $\delta_1 = \delta_0 \pi \eta^2 / C(\eta_1)$.

(4) ⇒ (2): Supongamos que existe $\eta_1 \in (0,1)$ tal que (4) se cumple. Sea D un disco con radio r, centro en $|z| = 1$ y consideremos $a \in U$ tal que $\Delta(a, \eta_1)$ está contenido

tangencialmente en D. Obsérvese que D tiene radio $r = 1 - |C| + R$, donde C es el centro euclídeo de $\Delta(a, \eta_1)$ y R es el radio euclídeo. Por hipótesis podemos escribir

$$\begin{aligned} m(G \cap D) &> m(G \cap \Delta(a, \eta_1)) > \delta_1 m(\Delta(a, \eta_1)) \\ &= \delta_1 \pi R^2 = \delta_1 \pi \eta_1^2 \left[\frac{1 - |a|^2}{1 - \eta_1^2 |a|^2} \right]^2 \\ &= \delta_1 \pi \eta_1^2 r^2 \left[\frac{1 - |a|^2}{1 - \eta_1^2 |a|^2 - (1 - \eta_1^2)|a| + \left(1 - |a|^2\right)\eta_1} \right]^2 . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otra parte, dado que $\eta_1 \in (0, 1)$, entonces $\left(\eta_1^2 + 1\right) + (\eta_1 - 3) \leq 0$, luego

$$\begin{aligned} &(1 - |a|)\left(\eta_1^2 |a| + 1\right) + \left(1 - |a|^2\right)(\eta_1 - 3) \\ &\qquad \leq \left(1 - |a|^2\right)\left(\eta_1^2 + 1\right) + \left(1 - |a|^2\right)(\eta_1 - 3) \leq 0, \end{aligned}$$

y por tanto

$$3\left(1 - |a|^2\right) \geq 1 - \eta_1^2 |a|^2 - \left(1 - \eta_1^2\right)|a| + \left(1 - |a|^2\right)\eta_1 .$$

Sustituyendo en (2.6) encontramos

$$m(G \cap D) > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \delta_1 \pi \eta_1^2 r^2 = \frac{1}{9}\delta_1 \eta_1^2 m(D) > \frac{1}{9}\delta_1 \eta_1^2 m(D \cap U)$$

y (2) es cierto con $\delta = \frac{1}{9}\delta_1 \eta_1^2$.

3. Demostración del Teorema 1.1: Parte analítica

Probaremos en primer lugar que (1) $\Rightarrow$ (4). Para ello, fijemos un $0 < \eta_1 < 1$ tal que

$$\frac{1}{\pi}\int_{|z|<\eta_1} w(z)\, dm > \frac{1}{\alpha + 1}\left(1 - \frac{1}{2C}\right). \tag{3.7}$$

Con el cambio de variables $z \to \frac{z-a}{1-\overline{a}z} = \varphi_a(z)$ cuyo jacobiano satisface:

$$\left|\varphi_a'(z)\right|^2 = \frac{\left(1 - |a|^2\right)^2}{|1 - \overline{a}z|^4},$$

la desigualdad en (3.7) queda

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Delta(a,\eta_1)} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha \frac{\left(1 - |a|^2\right)^{2+\alpha}}{|1 - \overline{a}z|^{4+2\alpha}}\, dm > \frac{1}{\alpha + 1}\left(1 - \frac{1}{2C}\right),$$

donde se ha usado la identidad

$$w\left(\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right) = \left(1 - |z|^2\right)^\alpha \frac{\left(1 - |a|^2\right)^\alpha}{|1 - \overline{a}z|^{2\alpha}}.$$

Pero como

$$\frac{1}{\pi}\int_U \left(1-|z|^2\right)^\alpha \frac{\left(1-|a|^2\right)^{2+\alpha}}{(1-\overline{a}z)^{4+2\alpha}}\,dm = \frac{1}{\alpha+1}$$

(veáse [4, pág. 53]) resulta que

$$\frac{1}{\pi}\int_{U\setminus\Delta(a,\eta_1)} \left(1-|z|^2\right)^\alpha \frac{\left(1-|a|^2\right)^{2+\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{4+2\alpha}}\,dm < \frac{1}{2\,(\alpha+1)\,C}.$$

Ahora, aplicando la hipótesis de (1) a la función

$$f(z) = \frac{\left(1-|a|^2\right)^{(2+\alpha)/p}}{(1-\overline{a}z)^{(4+2\alpha)/p}},$$

podemos escribir

$$\frac{1}{\pi}\int_G \left(1-|z|^2\right)^\alpha \frac{\left(1-|a|^2\right)^{2+\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{4+2\alpha}}\,dm \geq \frac{1}{(\alpha+1)\,C},$$

de aquí que

$$\frac{1}{\pi}\int_{G\cap\Delta(a,\eta_1)} \left(1-|z|^2\right)^\alpha \frac{\left(1-|a|^2\right)^{2+\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{4+2\alpha}}\,dm \geq \frac{1}{2\,(\alpha+1)\,C}. \tag{3.8}$$

Afirmamos que existe una constante $C = C(\alpha,\eta_1)$ tal que, para todo $z \in G \cap \Delta(a,\eta_1)$, se verifica que

$$\left[\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2}\right]^\alpha \leq C(\alpha,\eta_1). \tag{3.9}$$

En efecto, usando la útil identidad

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2},$$

observamos que, si $\alpha > 0$ y como $|\varphi_a(z)| < 1$, se tiene $\left[1-|\varphi_a(z)|^2\right]^\alpha < 1$ y (3.9) vale trivialmente. Si $-1 < \alpha < 0$, entonces $|\varphi_a(z)| < \eta_1$ para todo $z \in \Delta(a,\eta_1)$ y consecuentemente

$$\left[1-|\varphi_a(z)|^2\right]^\alpha < \left(1-\eta_1^2\right)^\alpha,$$

de modo que (3.9) también es cierta para este caso.

Combinando (3.9) con (3.8) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^2}{|1-\overline{a}z|^4} \leq \frac{4}{(1-|a|)^2},$$

resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(\alpha+1)C} &\leq \frac{1}{\pi}\int_{G\cap\Delta(a,\eta_1)} \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} \frac{\left(1-|a|^2\right)^{2+\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{4+2\alpha}}\,dm \\ &\leq C(\alpha,\eta_1)\frac{4}{(1-|a|)^2} m\left(G\cap\Delta(a,\eta_1)\right),\end{aligned}$$

es decir,

$$m\left(G\cap\Delta(a,\eta_1)\right) \geq \frac{C(\alpha,\eta_1)}{8C}(1-|a|)^2 .$$

Por esta desigualdad y la estimación en (3.9) podemos asegurar que existe una constante δ_1 (dependiente de α y η_1) tal que

$$m\left(G\cap\Delta(a,\eta_1)\right) > \delta_1 m\left(\Delta(a,\eta_1)\right).$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Para probar esta implicación requeriremos varios lemas. Supondremos que δ_0 y η están fijados por hipótesis y C representará una constante que sólo depende de los parámetros η, α y p cuyo valor puede cambiar de una línea a otra. Para simplificar, escribiremos $D(a)$ en lugar de $D(a,\eta)$.

Lema 3.1. *Existe una constante $C = C(\alpha,\eta) > 0$ tal que, para todo $a \in U$,*

$$w(a) \leq C \operatorname{ínf}\{w(z) : z \in D(a)\}. \tag{3.10}$$

Demostración. Notemos en primer lugar que para todo $z \in D(a)$, se tiene

$$|a| - (1-|a|)\eta < |z| < |a| + (1-|a|)\eta. \tag{3.11}$$

Así,

$$\begin{aligned}1-|z|^2 &< 1-\left[|a|-(1-|a|)\eta\right]^2 \\ &= 1-|a|^2 + 2|a|(1-|a|)\eta - (1-|a|)^2\eta^2 \\ &< \left(1-|a|^2\right) + 2\left(1-|a|^2\right)\eta + \left(1-|a|^2\right)\eta^2 \\ &= (1+\eta)^2\left(1-|a|^2\right),\end{aligned}$$

con lo cual, para $-1 < \alpha < 0$ y $z \in D(a)$, resulta que

$$w(z) = \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} > (1+\eta)^{2\alpha}\left(1-|a|^2\right)^{\alpha} = (1+\eta)^{2\alpha} w(a),$$

lo que prueba que existe una constante $C = C(\alpha,\eta) > 0$ tal que (3.10) vale.

De manera similar, de (3.11) también se infiere que

$$\begin{aligned}1-|z|^2 &> 1-\left[|a|+(1-|a|)\eta\right]^2 \\ &> 1-\left[|a|+(1-|a|)\eta\right] \\ &> (1-|a|)(1-\eta) > \frac{1}{2}(1-\eta)\left(1-|a|^2\right),\end{aligned}$$

luego, para $\alpha > 0$ y $z \in D(a)$ queda

$$w(z) = \left(1 - |z|^2\right)^\alpha > \left[\frac{1}{2}(1-\eta)\right]^\alpha \left(1 - |a|^2\right)^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1-\eta)\right]^\alpha w(a),$$

así que también en este caso podemos asegurar la existencia de una constante $C = C(\alpha, \eta) > 0$ tal que (3.10) vale. □

Dada una función analítica f y $0 < \lambda < 1$, definimos el conjunto

$$E_\lambda(a) = E_\lambda(f, a) = \{z \in D(a, \eta) : |f(z)| > \lambda |f(a)|\},$$

y el operador

$$B_\lambda f(a) = \frac{1}{m(E_\lambda(a))} \int_{E_\lambda(a)} |f|^p \, dm.$$

Por simplicidad asumiremos $p = 1$, advirtiendo que la prueba del caso general se puede obtener con pequeñas modificaciones reemplazando $|f|$ por $|f|^p$.

Lema 3.2. *Sea f analítica en U y $a \in U$. Entonces*

$$\frac{m(E_\lambda(a))}{m(D(a))} \geq \frac{\log \frac{1}{\lambda}}{\log \frac{B_\lambda f(a)}{|f(a)|} + \log \frac{1}{\lambda}}. \tag{3.12}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$ y $D = D(a)$ tiene área $m(D) = 1$. Aplicando la desigualdad de Jensen y estimaciones elementales tenemos

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &\leq \int_D \log|f| \, dm = \int_{D \setminus E_\lambda(0)} \log|f| \, dm + \int_{E_\lambda(0)} \log|f| \, dm \\
&\leq \log(\lambda |f(0)|) \int_{D \setminus E_\lambda(0)} dm + m(E_\lambda(0)) \frac{1}{m(E_\lambda(0))} \int_{E_\lambda(0)} \log|f| \, dm \\
&\leq \log(\lambda |f(0)|) [1 - m(E_\lambda(0))] + m(E_\lambda(0)) \log B_\lambda f(0),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la concavidad de la función logaritmo en la última desigualdad. Restando $\log|f(0)|$ en ambos lados obtenemos

$$0 \leq [1 - m(E_\lambda(0))] \log \lambda + m(E_\lambda(0)) \log\left[\frac{B_\lambda f(0)}{|f(0)|}\right].$$

Como quiera que $\log \lambda < 0$ y $\log\left[\frac{B_\lambda f(0)}{|f(0)|}\right] > 0$, resolviendo para $m(E_\lambda(0))$ obtenemos

$$m(E_\lambda(0)) \geq \frac{\log \frac{1}{\lambda}}{\log\left[\frac{B_\lambda f(0)}{|f(0)|}\right] + \log \frac{1}{\lambda}}$$

que era lo que se quería probar. □

Lema 3.3. *Sea $\varepsilon > 0$ y f analítica en U. Definamos el conjunto*

$$A = \left\{a \in U : |f(a)| < \frac{\varepsilon}{m(D(a))} \int_{D(a)} |f| \, dm\right\}.$$

Entonces, existe una constante C que depende sólo de η tal que

$$\int_A |f(z)|\, w(z)\, dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)|\, w(z)\, dm.$$

Demostración. Por el Lema 3.1 y la definición de A, para $a \in A$ tenemos

$$|f(a)|\, w(a) \leq C\varepsilon \int_U |f(z)| \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z)\, w(z)\, dm(z).$$

Integrando sobre A y usando el teorema de Fubini queda que

$$\int_A w(a)\, |f(a)|\, dm(a)$$
$$\leq C\varepsilon \int_U w(z)\, |f(z)| \left[\int_A \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z)\, dm(a)\right] dm(z).$$

Afirmamos que existe una constante C independiente de z tal que

$$\int_A \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z)\, dm(a) \leq C. \tag{3.13}$$

En efecto, usando (2.6) con $r = 2\eta/\left(1+\eta^2\right)$ podemos escribir

$$\chi_{D(a)}(z) \leq \chi_{\Delta(a,r)}(z) = \chi_{\Delta(z,r)}(a),$$

donde la primera desigualdad se debe a que $D(a) \subset \Delta(a,r)$ y la segunda a que $z \in \Delta(a,r)$ precisamente cuando $a \in \Delta(z,r)$. Luego la integral en (3.13) está dominada por

$$\int_{\Delta(z,r)} \frac{1}{m(D(a))}\, dm(a). \tag{3.14}$$

Puesto que para $a \in \Delta(z,r)$, se tiene que

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq \frac{2\eta}{1+\eta^2},$$

sigue que

$$\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2} = 1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 \geq 1 - \left(\frac{2\eta}{1+\eta^2}\right)^2 = C(\eta).$$

De aquí que

$$1-|a| > \frac{1}{2}\left(1-|a|^2\right) \geq C(\eta) \frac{|1-\overline{a}z|^2}{\left(1-|z|^2\right)^2}\left(1-|z|^2\right)$$
$$\geq C(\eta)\left(1-|z|^2\right) \geq C(\eta)(1-|z|),$$

y por tanto

$$m(D(a)) = \pi\eta^2 (1-|a|)^2 \geq C(\eta)(1-|z|)^2.$$

Sustituyendo en (3.14) y aplicando el Lema 3.13 vemos que

$$\int_{\Delta(z,r)} \frac{1}{m(D(a))}\, dm(a) \leq \frac{C}{(1-|z|)^2} \int_{\Delta(z,r)} dm(a) \leq \frac{C}{(1-|z|)^2} m(\Delta(z,r))$$
$$\leq \frac{C}{(1-|z|)^2} C_r (1-|z|)^2 = C,$$

es decir, (3.14) está acotada por una constante independiente de z; por tanto

$$\int_A w(a)\, |f(a)|\, dm \leq C\varepsilon \int_U w(z)\, |f(z)|\, dm.$$

y en consecuencia

$$\int_A |f(a)|\, w(a)\, dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)|\, w(z)\, dm$$

que era lo que se quería demostrar. □

En el siguiente lema supondremos que $\lambda < 1/2$.

Lema 3.4. *Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $f \in A^1_\alpha(U)$. Definamos el conjunto*

$$B = \left\{a \in U : |f(a)| < \varepsilon^3 B_\lambda f(a)\right\}.$$

Entonces existe una constante C que depende sólo de η (y p) tal que

$$\int_B |f(z)|\, w(z)\, dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)|\, w(z)\, dm.$$

Demostración. Descomponiendo la integral como se indica

$$\int_B w\, |f|\, dm = \int_{B\cap A} w\, |f|\, dm + \int_{B\setminus A} w\, |f|\, dm,$$

observamos que la primera integral se puede acotar de acuerdo con el Lema 3.3 por lo que

$$\int_{B\cap A} w\, |f|\, dm \leq \int_A w\, |f|\, dm \leq C\varepsilon \int_U w\, |f|\, dm,$$

para una cierta constante $C > 0$. Para acotar la segunda integral, usemos el Lema 3.1 (lo cual es posible porque $E_\lambda(a) \subset D(a,\eta)$) y el teorema de Fubini como en el lema anterior, obteniéndose que

$$\int_{B\setminus A} w(a)\, |f(a)|\, dm(a)$$
$$\leq \varepsilon^3 \int_U w(z)\, |f(z)| \int_{B\setminus A} \frac{1}{m(E_\lambda(a))}\, \chi_\lambda(a,z)\, dm(a)\, dm(z).$$

Mas, como ya se vio que existe una constante $C > 0$ independiente de z tal que

$$\int_{B\setminus A} \frac{1}{m(E_\lambda(a))}\, \chi_\lambda(a,z)\, dm(a) \leq \frac{C}{\varepsilon^2},$$

queda

$$\int_{B\setminus A} |f(a)|\, w(a)\, dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)|\, w(z)\, dm$$

y la demostración está completa. □

Continuando ahora con la prueba del Teorema 1.1, hagamos

$$F := U \setminus B = \left\{a \in U : |f(a)| \geq \varepsilon^3 B_\lambda f(a)\right\},$$

y eligiendo ε suficientemente pequeño para que $\varepsilon C < 1/2$ (tal elección depende solamente de η y p^2) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_U w\,|f|\,dm &= \int_{U\setminus B} w\,|f|\,dm + \int_B w\,|f|\,dm \leq \int_F w\,|f|\,dm + \varepsilon C \int_U w\,|f|\,dm\\ &< \int_F w\,|f|\,dm + \frac{1}{2}\int_U w\,|f|\,dm,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_U w\,|f|\,dm < 2\int_F w\,|f|\,dm. \tag{3.15}$$

Como $\dfrac{B_\lambda f(a)}{|f(a)|} \leq \dfrac{1}{\varepsilon^3}$ para $a \in F$, si seleccionamos λ menor que ε^{6/δ_0}, por el Lema 3.2, podemos escribir

$$\frac{m(E_\lambda(a))}{m(D(a))} > \frac{\frac{2}{\delta_0}\log\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right) + \frac{2}{\delta_0}\log\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)} > 1 - \frac{\delta_0}{2}.$$

En particular esto implica que

$$m(D(a)) - m(E_\lambda(a)) < \frac{\delta_0}{2}\, m(D(a)).$$

Por otra parte, dado que $E_\lambda(a) \subset D(a)$, sigue de las hipótesis en (3) que para $a \in F$,

$$\begin{aligned}m(G \cap E_\lambda(a)) &= m(G \cap D(a)) - m(G \cap D(a) - E_\lambda(a))\\ &> \delta_0 m(D(a)) - m(D(a) - E_\lambda(a))\\ &= \delta_0 m(D(a)) + m(E_\lambda(a)) - m(D(a))\\ &> \delta_0 m(D(a)) - \frac{\delta_0}{2}\, m(D(a)) = \frac{1}{2}\,\delta_0 m(D(a)),\end{aligned} \tag{3.16}$$

con λ dependiendo sólo de η, δ_0 y p.

Por el Lema 3.4 y para $a \in F$ se tiene que

$$\frac{1}{m(D(a))}\int_G \chi_{D(a)}(z)\, w(z)\, |f(z)|\, dm \geq \frac{1}{2}\,\delta_0 \lambda w(a)\, |f(a)|,$$

e integrando sobre F, y usando nuevamente el teorema de Fubini obtenemos

$$\int_G w(z)\,|f(z)| \left[\int_F \frac{1}{m(D(a))}\,\chi_{D(a)}(z)\, dm(a)\right] dm(z) \geq \frac{1}{2}\,\delta_0\lambda \int_F w\,|f|\,dm.$$

La integral entre corchetes se puede acotar como en el Lema 3.2 mientras que el segundo miembro puede estimarse usando el Lema 3.3. Por consiguiente,

$$C\int_G w(z)\,|f(z)|\,dm(z) \geq \frac{1}{4}\,\delta_0\lambda \int_U w(z)\,|f|\,dm$$

lo que completa la demostración.

Referencias

[1] F. F. Bonsall, Domination of the supremum of a bounded harmonic function by its supremum over a countable subset, *Proc. Edinburgh Math. Soc.(2)* **30** (1987), 471–477.
[2] S. J. Gardiner, Sets of determination for harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **338** (1993), 233–242.
[3] D. H. Luecking, Inequalities in Bergman spaces, *Illinois J. Math.* **25** (1981), 1–11.
[4] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Marcel Dekker, Nueva York, 1980.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna, Tenerife, Spain
Correo electrónico: `fernando.perez.gonzalez@ull.es`

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, Estado Sucre, Venezuela
Correo electrónico: `jramos@sucre.udo.edu.ve`