MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

FUNCIONES DE HERMITE, DERIVACIÓN FRACCIONARIA Y CIERTAS FAMILIAS DE OPERADORES

PEDRO J. MIANA

En homenaje al Prof. José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

ABSTRACT. In this paper, we study the connection between Weyl fractional calculus of the gaussian function and Hermite functions. This relationship appears in a natural way to treat integrated families. Some particular cases are considered.

Es bien conocido ([Go], pág. 121) que el operador Laplaciano en $\mathbb{R}$, $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, es el generador infinitesimal en $L^1(\mathbb{R})$ de una función coseno $(C(t))_{t\geq 0}$ uniformemente acotada:

$$C(t)f(s) = \frac{1}{2}(f(s+t) + f(s-t))$$

con $f \in L^1(\mathbb{R})$, y de un semigrupo holomorfo $(T(z))_{\Re z>0}$ de operadores acotados, el semigrupo gaussiano,

$$T(z)f(s) = g^z * f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{4z}} f(s-t)\, dt$$

con $f \in L^1(\mathbb{R})$.

La relación entre estas dos familias de operadores viene expresada a través de la fórmula abstracta de Weierstrass, (ver por ejemplo, pág. 120 de [Go] o [KV]):

$$T(z)f = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{4z}} C(t)f\, dt$$

con $\Re z > 0$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Este planteamiento es fácilmente ampliado al contexto de espacios de Banach X y operadores lineales y acotados, $\mathcal{B}(X)$ (ver [Go], [Vi]).

En 1997, V. Keyantuo [Ke] probó que si A es el generador infinitesimal de una función coseno n-veces integrada, $(C_n(t))_{t\geq 0}$, en un espacio de Banach X, con $n \in \mathbb{N}$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo holomorfo $(T(z))_{\Re z>0}$ cuya expresión explícita es:

$$T(z)x = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} z^{\frac{(n+1)}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\Big(\frac{t}{2\sqrt{z}}\Big) e^{\frac{-t^2}{4z}} C_n(t)x\, dt$$

con $\Re z > 0$, $x \in X$, y H_n es el polinomio de Hermite de grado n.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47D62; Secondary 33E30, 26A33.
Key words and phrases. Integrated families, Hermite functions, Weyl fractional calculus.
Esta investigación ha sido subvencionada por el proyecto PB97-0094 de la DGES.

Además V. Keyantuo comenta en su trabajo [Ke], pág. 146, «el resultado puede tomar una forma más precisa en este contexto si uno encuentra un análogo al Lema 2.3 que relacione el semigrupo $T(t)$ con la función coseno α-veces integrada $C_\alpha(s) = 1/\Gamma(\alpha)\int_o^t (t-s)^{\alpha-1}C(s)\,ds$ generada por A».

En particular, el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ es el generador infinitesimal de una función coseno α-veces integrada en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, con

$$\alpha > (n-1)\Big|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big|.$$

El cálculo fraccionario se ha revelado como una de las mejores herramientas analíticas para tratar las familias α-veces integradas, [Mi]. En especial la fórmula de integración por partes (6) permite utilizar a las familias α-veces integradas como núcleos de expresiones integrales.

En el contexto particular de este trabajo, se hace necesario poder calcular derivadas de Weyl de orden $\alpha > 0$ de la función e^{-t^2} y relacionarlas con funciones especiales conocidas en la literatura matemática dando lugar a *fórmulas de Rodrigues* generalizadas.

Esta idea de unir el cálculo fraccionario de funciones elementales y familias de funciones especiales se ha desarrollado trabajando o bien en el contexto de cálculo fraccionario de Riemann-Liouville ([LTO], [LOT]) o bien en el contexto de cálculo fraccionario complejo ([Ca], [GR]) y algunas veces en el contexto del cálculo fraccionario de Weyl ([Sr]).

En la primera sección de este trabajo consideramos las ecuaciones clásicas de Hermite y de Weber y señalamos propiedades conocidas de sus soluciones: las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas respectivamente.

Una vez introducidas la integral y derivación fraccionaria de Weyl, se calculan explícitamente las integrales y derivadas de las funciones e^{-t^2} y $e^{-t^2/2}$ y se establece la relación con las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas respectivamente.

En la segunda sección, extendemos el resultado obtenido por V. Keyantuo a generadores infinitesimales, A, de funciones coseno α-veces integradas con $\alpha > 0$. Obtenemos una nueva versión de la fórmula abstracta de Weierstrass que relaciona estas familias de operadores con los semigrupos holomorfos generados por A.

Para terminar consideramos el caso del Laplaciano en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$, y relacionamos los resultados conocidos con los hallados en la segunda sección.

Sé que a Chicho este trabajo le habría gustado y sé que habría tenido valiosas oportaciones que hacer a este humilde nota.

1. Funciones de Hermite, funciones cilíndricas parabólicas y derivación fraccionaria de Weyl

En esta sección introduciremos las dos familias de funciones mencionadas: las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas y expresaremos las relaciones entre ellas. El cálculo fraccionario de Weyl es utilizado para probar nuevos resultados y algunos ya conocidos.

1.1. Funciones de Hermite y funciones cilíndricas parabólicas.

En los textos tradicionales (ver por ejemplo [Da], pág. 344, o [Vi], pág. 554) de ecuaciones diferenciales, la ecuación diferencial de Hermite es la siguiente:

$$w''(z) - 2zw'(z) + 2\nu w(z) = 0$$

con $\nu \in \mathbb{C}$. Se dicen *funciones de Hermite* de orden ν a la soluciones de esta ecuación diferencial. Trivialmente, si $H_\nu(z)$ es una solución de la ecuación anterior entonces $H_\nu(-z)$ es también solución, y como

$$W(H_\nu(z), H_\nu(-z)) = \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2},$$

esto es, el wronskiano es no nulo, entonces $H_\nu(z)$ y $H_\nu(-z)$ son soluciones linealmente independientes siempre y cuando $\nu \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Entre las representaciones que admite la función de Hermite consideramos la representación integral

$$H_\nu(z) = A \int_\gamma \frac{e^{-w^2+2zw}}{w^{\nu+1}}\, dw,$$

donde A es una constante arbitraria y γ es el camino en el plano complejo que consta de las semirrectas $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$ y la semicircunferencia $|w| = a > 0$, $\Im w \geq 0$. Además $H_\nu(z)$ es una función entera en las variables z y ν.

En el caso $\nu = n \in \mathbb{N}$, entonces H_n es el llamado *polinomio de Hermite* y es tomado $A = \frac{n!}{2\pi i}$ para seguir el convenio de normalizar el polinomio de Hermite de forma que el coeficiente de z^n sea 2^n. Así, se tiene la fórmula de Rodrigues

$$(1)\quad H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-w^2+2zw}}{w^{n+1}}\, dw = \frac{n! e^{z^2}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-u^2}}{(u+z)^{n+1}}\, du = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}.$$

Son conocidas otras representaciones integrales; entre ellas destacamos

$$(2)\qquad H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2-2zt}}{t^{\nu+1}}\, dt$$

con $\Re\nu < 0$. También es conocido el desarrollo asintótico de las funciones de Hermite ([Da], pág. 350). Así, se tiene para $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ que

$$H_\alpha(z) \sim (2z)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)(2z)^{2k}}, \qquad z \to \infty,$$

con $-\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\pi$. Por tanto $|H_\alpha(z)| \leq C(1 + |z|^\alpha)$ con $C > 0$ y $\Re z > 0$. Por último, dos relaciones conocidas de las funciones de Hermite son, la llamada relación de recurrencia a tres términos

$$H_{\nu+1}(z) - 2zH_\nu(z) + 2\nu H_{\nu-1}(z) = 0$$

y la igualdad de la derivada $H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z)$.

Si en la ecuación de Hermite, realizamos la sustitución de la función incógnita $w(z) = e^{\frac{z^2}{2}} u(z)$, obtenemos la igualdad

$$u''(z) + (1 + 2\nu - z^2)u(z) = 0.$$

Y si ahora cambiamos la variable $\sqrt{2}z = v$, obtenemos la llamada *ecuación de Weber*

$$u''(v) + \Big(\frac{1}{2} + \nu - \frac{v^2}{4}\Big)u(v) = 0$$

con $\nu \in \mathbb{C}$. Esta ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden también se obtiene ([MOS], pág. 489) separando las variables en la ecuación de ondas $\Delta u = k^2 u$ en coordenadas cilíndricas parabólicas. Las soluciones de esta ecuación diferencial se denominan *funciones de un cilindro parabólico* o *funciones de Weber-Hermite.* También es claro que si $D_\nu(v)$ es solución de la ecuación de Weber $D_\nu(-v)$ también es solución.

Estas funciones han sido objeto de un estudio más profundo que las funciones de Hermite, ver por ejemplo [WW], [AS]. Se conocen diversas representaciones de estas funciones. Tal vez la más conocida es

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} z^{\frac{-1}{2}} W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4},\frac{-1}{4}}\Big(\frac{1}{2}z^2\Big),$$

donde W es la función de Whitakker, ver [WW], pág. 347, y por tanto $D_\nu(z)$ es expresada a partir de las funciones hipergeométricas degeneradas, ver [Vi], pág. 560. $D_\nu(z)$ es un función entera en z y real si z y ν son reales.

En el caso $\nu = n \in \mathbb{N}$, se prueba la fórmula de Rodrigues

$$D_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} e^{\frac{-z^2}{2}} = 2^{-n/2} e^{\frac{-z^2}{4}} H_n\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big). \tag{3}$$

En el caso $n = 0$ entonces $D_0(z) = e^{\frac{-z^2}{4}}$. Otras fórmulas de diferenciación conocidas ([MOS], pág. 327) son

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n}(e^{\frac{z^2}{4}} D_\nu)(z) &= (-1)^n (-\nu)_n e^{\frac{z^2}{4}} D_{\nu-n}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n}(e^{\frac{-z^2}{4}} D_\nu)(z) &= (-1)^n e^{\frac{-z^2}{4}} D_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

donde $(-\nu)_n = (-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+n-1)$.

El desarrollo asintótico de las funciones cilíndricas parabólicas ([WW], pág. 347) para $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ es

$$D_\alpha(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha) 2^k z^{2k}}, \qquad z \to \infty,$$

con $-\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\pi$. Por tanto $|D_\alpha(z)| \leq M|e^{-\frac{z^2}{4}}|(1+|z|^\alpha)$ con $M > 0$ y $\Re z > 0$. Las relaciones de recurrencia siguientes son conocidas:

$$\begin{aligned} D_{\nu+1}(z) - zD_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ D'_\nu(z) + \frac{z}{2} D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ D'_\nu(z) - \frac{z}{2} D_\nu(z) + D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ 2D'_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) + D_{\nu+1}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Además, en [GrR] se tabulan varias representaciones integrales de estas funciones. Entre ellas señalamos la enumerada con 3.642, (1), pág. 337,

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2-\gamma x}\,dx = (2\beta)^{\frac{-\nu}{2}}\Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu}\Big(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\Big) \tag{4}$$

con $\Re\beta > 0$ y $\Re\nu > 0$. De entre las que son combinaciones de funciones cilíndricas parabólicas y funciones exponenciales, (pág. 885 y ss.) necesitaremos la enumerada con 7.728, pág. 887,

$$\int_0^{+\infty} (2t)^{\frac{-\nu}{2}} e^{-pt} e^{\frac{-q^2}{8t}} D_{\nu-1}\Big(\frac{q}{\sqrt{2t}}\Big)\,dt = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-q\sqrt{p}}. \tag{5}$$

1.2. Derivación fraccionaria de Weyl.

Con ayuda de la derivación fraccionaria en sentido Weyl vamos a conseguir establecer relaciones entre las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas de igual orden extendiendo la igualdad (3) a cualquier orden $\nu \in \mathbb{C}$.

El factor $(-1)^n$ y la derivada de orden n que aparecen en las fórmulas (1) y (3) hace pensar que para considerar una extensión de estas igualdades a órdenes $\nu \in \mathbb{C}$, deberemos trabajar con la derivada fraccionaria de Weyl.

Recordemos que dada $f \in \mathcal{D} = \mathcal{C}_c^{(\infty)}(\mathbb{R})$, o más generalmente $f \in \mathcal{S}$ (funciones de la clase de Schwartz sobre $\mathbb{R}$) se define ([MR], [SKM]) la integral fraccionaria de Weyl de orden α con $\alpha > 0$ mediante la expresión

$$W^{-\alpha} f(u) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^{+\infty} (t-u)^{\alpha-1} f(t)\,dt$$

con $u \in \mathbb{R}$. Para definir la derivada de Weyl de orden α con $\alpha > 0$ se toma $n = [\alpha]+1$ y se considera

$$W^{\alpha} f(u) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{du^n} \int_u^{+\infty} (t-u)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt.$$

Notar que si $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces $W^\alpha f = (-1)^\alpha f^{(\alpha)}$, $W^{\alpha+\beta} = W^\alpha W^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $W^0 = \mathrm{Id}$, el operador identidad.

Fácilmente se prueba que dadas $f, g \in \mathcal{S}$ y $\alpha > 0$ entonces

$$\int_0^{+\infty} f(t) g(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} W^\alpha f(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds\,dt. \tag{6}$$

En [SKM], pág. 96, se encuentran formulaciones equivalentes de esta igualdad. Otra propiedad del cálculo fraccionario de Weyl es la siguiente.

Proposición 1.1. *Dada $f \in \mathcal{S}$ y $a > 0$, consideramos $f_a(t) := f(at)$. Entonces*

$$W^\alpha f_a(t) = a^\alpha W^\alpha f(at)$$

con $\alpha, t \in \mathbb{R}$.

En esta sección estamos interesados en estudiar la función

$$G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha (e^{-t^2})(t)$$

con $\alpha, t \in \mathbb{R}$. A posteriori probaremos, Teorema 1.4, que $G_\alpha(t) = H_\alpha(t)$.

Proposición 1.2. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$ *entonces se cumple:*

- $G'_\alpha(t) = 2tG_\alpha(t) - G_{\alpha+1}(t)$, *con* $t \in \mathbb{R}$, *y*
- $G''_\alpha(t) = G_{\alpha+2}(t) - 4tG_{\alpha+1}(t) + (2+4t^2)G_\alpha(t)$, *con* $t \in \mathbb{R}$.

Por tanto es inmediato que

$$G''_\alpha(t) - 2tG'_\alpha(t) + 2\alpha G_\alpha(t) = G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha+1)G_\alpha(t)$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Aplicar la definición de G_α, $\frac{d}{dt}W^\alpha(e^{-t^2}) = -W^{\alpha+1}(e^{-t^2})$ y obtenemos la primera igualdad. Para la segunda, utilizar la primera igualdad y agrupar. $\square$

Lema 1.3. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$. *Si se cumple que*

$$G_{\alpha+1}(t) - 2tG_\alpha(t) + 2\alpha G_{\alpha-1}(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha+1)G_\alpha(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Basta aplicar derivación y la primera igualdad de la Proposición 1.2. $\square$

En el siguiente teorema se da la fórmula de Rodrigues para el cálculo fraccionario de Weyl de la función gaussiana.

Teorema 1.4. *Dada* $\alpha \in \mathbb{R}$, *se cumple* $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = e^{-t^2} H_\alpha(t)$.

Demostración. Si $\alpha < 0$ entonces

$$\begin{aligned} W^\alpha(e^{-t^2})(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_t^{+\infty} (u-t)^{-\alpha-1} e^{-u^2}\, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+t)^2}}{s^{\alpha+1}}\, ds = \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2-2ts}}{s^{\alpha+1}}\, ds. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la fórmula (2) y obtenemos $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = e^{-t^2}H_\alpha(t)$. Si $\alpha = 0$, sabemos $H_0(t) = 1$ y por tanto se cumple la igualdad. En el caso en que $\alpha > 0$, tomar $n \in \mathbb{N}$ y tal que $n - \alpha > 0$, y $\beta = \alpha - n < 0$. Entonces se cumple que $G_\beta(t) = H_\beta(t)$, y por tanto

$$G_{\beta+2}(t) - 2tG_{\beta+1}(t) + 2(\beta+1)G_\beta(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Reiterando el Lema 1.3, n veces, y aplicando la Proposición 1.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= G_{\beta+n+2}(t) - 2tG_{\beta+n+1}(t) + 2(\beta+n+1)G_{\beta+n}(t) \\ &= G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha+1)G_\alpha(t) = G''_\alpha(t) - 2tG'_\alpha(t) + 2\alpha G_\alpha(t). \end{aligned}$$

Y por tanto se concluye que $G_\alpha(t) = H_\alpha(t)$ con $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Notas. Otro planteamiento que se puede seguir en esta sección a la vista del Teorema 1.4 es trabajar con el concepto de derivación fraccionaria holomorfa de Weyl (ver por ejemplo [Ca], [GaR]).

El teorema anterior tiene una inmediata aplicación: estimar el módulo de H_α sin necesidad de desarrollos asintóticos. Así, obtenemos

Teorema 1.5. *Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple*

- $|H_\alpha(t)| \leq (2t)^\alpha$ *con* $\alpha < 0$ *y* $t > 0$, *y*
- $|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha(1 + t^\alpha)$ *con* $\alpha > 0$ *y* $t \geq 0$.

Demostración. Si $\alpha < 0$, sabemos por el Teorema 1.4 que

$$e^{-t^2} H_\alpha(t) = W^\alpha(e^{-t^2})(t) = \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{-\alpha-1} e^{-s^2-2st}\, ds \leq e^{-t^2}(2t)^\alpha.$$

Si $\alpha > 0$, tomamos $n > \alpha$; entonces

$$\begin{aligned} e^{-t^2}|H_\alpha(t)| &= |W^\alpha(e^{-t^2})(t)| = |W^{-(n-\alpha)} W^n(e^{-t^2})(t)| \\ &\leq \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} |H_n(t+u) e^{-u^2-2ut}|\, du. \end{aligned}$$

Por tanto, sabiendo H_n es un polinomio de grado n, se tiene que

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1}(1 + (t+u)^n) e^{-u^2-2ut}\, du$$

$$\leq C_\alpha \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} e^{-u^2-2ut}\, du + C_\alpha \sum_{j=0}^{n} t^{n-j} \int_0^{+\infty} u^{n+j-\alpha-1} e^{-u^2-2ut}\, du.$$

Aplicamos la fórmula (2) a cada una de las integrales y obtenemos

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha H_{-(n-\alpha)}(t) + C_\alpha \sum_{j=0}^{n} t^{n-j} H_{-(n+j-\alpha)}(t).$$

Por el primer apartado, deducimos que

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha t^{\alpha-n} + C_\alpha \sum_{j=0}^{n} t^{\alpha-2j}.$$

Como H_α es una función continua en 0, es claro que $|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha(1 + t^\alpha)$ con $t \geq 0$. □

1.3. De nuevo, funciones cilíndricas parabólicas.

De igual forma que se ha trabajado con las funciones de Hermite, las funciones parabólicas cilíndricas admiten un tratamiento análogo. En el siguiente teorema presentamos los resultados obtenidos.

Teorema 1.6. *Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene*

- $W^\alpha(e^{\frac{-t^2}{2}})(t) = e^{\frac{-t^2}{4}} D_\alpha(t)$ *con* $t \in \mathbb{R}$,
- $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{-t^2}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}t)$ *con* $t \in \mathbb{R}$,
- $H_\alpha(z) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{z^2}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}z)$ *con* $z \in \mathbb{C}$,

- $|D_\alpha(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} t^\alpha$ *con* $\alpha < 0$ *y* $t > 0$,
- $|D_\alpha(t)| \leq M_\alpha e^{-\frac{t^2}{4}}(1 + t^\alpha)$ *con* $\alpha > 0$ *y* $t \geq 0$.

2. Funciones coseno α-veces integradas y semigrupos holomorfos

En esta sección queremos probar directamente que los generadores de funciones coseno α-veces integradas con $\alpha > 0$ generan semigrupos holomorfos de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Una función coseno $(C(t))_{t\geq 0}$ está formada por operadores lineales y acotados, fuertemente continuous sobre un espacio de Banach X que satisfacen la ecuación funcional

$$2C(s)C(t) = C(s+t) + C(s-t)$$

para $s, t > 0$ y $C(0) = I$, ver [Go], pág. 120. Se define el *generador infinitesimal* (posiblemente un operador no acotado) de $(C(t))_{t\geq 0}$ como la derivada de segundo orden de esta función en el cero para aquellos $x \in X$ que exista, esto es, $A(x) := C''(0)x$ para $x \in D(A)$.

Un C_0-semigrupo de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ está formado por operadores lineales y acotados, fuertemente continuos sobre un espacio de Banach X que satisfacen la ecuación funcional

$$T(s+t) = T(t)T(s)$$

para $s, t > 0$ y $T(0) = I$, ver [Go]. También se define el *generador infinitesimal* (posiblemente un operador no acotado) de $(T(t))_{t\geq 0}$ como la derivada, en este caso, de primer orden de esta familia en el cero para aquellos $x \in X$ que exista, esto es, $A(x) := T'(0)x$ para $x \in D(A)$.

Impropiamente hablado, los C_0-semigrupos son las «funciones exponenciales» y las funciones coseno son los «cosenos trigonométricos» de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach X. Y de igual forma que en variable real, se cumple que si A genera una función coseno entonces la expresión conocida como fórmula abstracta de Weierstrass o de Poisson

$$T(t)x := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-s^2}{4t}} C(s)x \, ds$$

con $x \in X$ y $t > 0$ define un C_0-semigrupo de operadores cuyo generador infinitesimal es A.

Esta línea de investigación ha sido tratada en varios artículos y se ha considerado su generalización, primero para funciones coseno 1-vez integradas, ver [AK], Theorem 5.2, y después para funciones coseno n-veces integradas, ver [Ke], Proposition 2.5.

Definición 2.1. *Dada* $\alpha > 0$, *una familia de operadores fuertemente continuos* $C_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{B}(X)$ *se dice que es una* función coseno α-veces integrada *generada por* A *si existe* $\omega, M > 0$ *tal que* $\|C_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}$, *para* $\lambda > \omega$, $\lambda^2 \in \rho(A)$ *y*

$$R(\lambda^2, A) = \lambda^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} C_\alpha(t) \, dt.$$

Es inmediato probar que si $(C_\alpha(t))_{t>0}$ es una función coseno α-veces integrada generada por A, entonces

$$C_\beta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta-\alpha-1} C_\alpha(s)\,ds, \tag{7}$$

con $\beta > \alpha$ y $t > 0$, define una función coseno β-veces integrada generada también por A, para más detalles ver [Ya].

Denotaremos por $\Sigma(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |\arg(z)| < \alpha\}$.

Definición 2.2. *Un operador cerrado y densamente definido A es el generador de un semigrupo holomorfo de ángulo α si existe $T : \Sigma(\alpha) \to \mathcal{B}(X)$ holomorfa tal que $T(z+z') = T(z)T(z')$ con $z, z' \in \Sigma(\alpha)$.*

Teorema 2.3 (Proposition 2.5 y Theorem 2.6 de [Ke])**.** *Sea A un operador lineal densamente definido y generador de una función coseno n-veces integrada $(C_n(t))_{t>0}$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces A genera un semigrupo holomorfo de ángulo $\pi/2$ dado por*

$$T(t)x := \frac{1}{2^n\sqrt{\pi}\,t^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{+\infty} H_n\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4t}} C_n(s)x\,ds,$$

con $t > 0$, y la integral existe en sentido de Bochner con $x \in X$. Además si $\|C_n(t)\| \leq Mt^n$, entonces

$$\|T(z)\| \leq C\Big(\frac{|z|}{\Re z}\Big)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Este resultado obtenido por V. Keyantuo es parcial ya que existen funciones coseno α-veces integradas con $\alpha > 0$ (ver ejemplos en el tercer párrafo) y no son consideradas directamente. Mediante las funciones de Hermite H_α podemos extender este resultado a tales valores encontrando la subyacente naturaleza de la fórmula abstracta de Weierstrass.

Teorema 2.4. *Sea A un operador lineal densamente definido y generador de una función coseno α-veces integrada $(C_\alpha(t))_{t>0}$. Entonces A genera un semigrupo holomorfo de ángulo $\pi/2$ dado por*

$$T(z)x := \frac{1}{2^\alpha\sqrt{\pi}\,z^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty} H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{z}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4z}} C_\alpha(s)x\,ds$$

con $z \in \Sigma(\pi/2)$, la integral existe en sentido de Bochner y $x \in X$. Además si $\|C_\alpha(t)\| \leq Mt^\alpha$, entonces

$$\|T(z)\| \leq C\Big(\frac{|z|}{\Re z}\Big)^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Tomemos $z \in \Sigma(\pi/2)$; sabemos que $\|C_\alpha(t)\| \leq Ce^{wt}$ con $C, \omega > 0$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\|T(z)x\| &\leq \frac{1}{2^\alpha\sqrt{\pi}|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty}\Big|H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{z}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4z}}\Big|\|C_\alpha(s)x\|\,ds\\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty}\Big(1+\frac{s^\alpha}{2^\alpha|z|^{\frac{\alpha}{2}}}\Big)e^{\frac{-s^2\Re z}{4|z|^2}}e^{\omega s}\,ds\end{aligned}$$

y $T(z)$ define un operador acotado en $\mathcal{B}(X)$ con $z \in \Sigma(\pi/2)$. Claramente $T : \Sigma(\pi/2) \to \mathcal{B}(X)$ es holomorfa.

Tomemos $n > \alpha$ con $n \in \mathbb{N}$, es inmediato que A genera una función coseno n-veces integrada $(C_n(t))_{t>0}$ definido por la igualdad (7). Por el Teorema 2.3, A genera un semigrupo holomorfo dado por

$$\tilde{T}(t)x := \frac{1}{2^n\sqrt{\pi}t^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{+\infty} H_n\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4t}}C_n(s)x\,ds$$

con $t > 0$. Como se cumple que

$$\frac{1}{2^\alpha\sqrt{\pi}t^{\frac{\alpha+1}{2}}}W^{n-\alpha}\Big(H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4t}}\Big)(s) = \frac{1}{2^n\sqrt{\pi}t^{\frac{n+1}{2}}}H_n\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4t}},$$

es inmediato que $\tilde{T}(t) = T(t)$ y por holomorfía $\tilde{T}(z) = T(z)$ con $z \in \Sigma(\pi/2)$. Así, $(T(z))_{\Re z>0}$ es un semigrupo holomorfo.

Si $\|C_\alpha(t)\| \leq Mt^\alpha$ entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(z)x\| &\leq \frac{1}{2^\alpha\sqrt{\pi}|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty}\Big|H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{z}}\Big)\Big|e^{\frac{-s^2\Re z}{4|z|^2}}s^\alpha\,ds \\
&\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty}\Big(1+\frac{s^\alpha}{2^\alpha z^{\frac{\alpha}{2}}}\Big)e^{\frac{-s^2\Re z}{4|z|^2}}s^\alpha\,ds \\
&\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty}e^{\frac{-s^2\Re z}{4|z|^2}}s^\alpha\,ds + \frac{C}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty}e^{\frac{-s^2\Re z}{4|z|^2}}s^{2\alpha}\,ds \\
&\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}}\Big(\frac{\Re z}{4|z|^2}\Big)^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} + \frac{C}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\Re z}{4|z|^2}\Big)^{\frac{-(2\alpha+1)}{2}} \leq C\Big(\frac{|z|}{\Re z}\Big)^{\alpha+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Notar que en este caso $(T(z))_{\Re z>0}$ es un C_0-semigrupo holomorfo, ver Corollary 2.7 de [Ke]. □

Notas. La demostración del anterior teorema puede hacerse directamente sin necesidad de utilizar los resultados de V. Keyantuo. Es más, a través de este camino más largo se aprecia el papel que desempeñan las funciones de Hermite como puente entre los funciones coseno α-veces integradas y los semigrupos holomorfos. Un ejemplo de este hecho se aprecia al calcular directamente la transformada de Laplace del semigrupo holomorfo. Así, tomando $x \in D(A^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > \omega^2$, se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\|T(t)x\|\,dt < +\infty;$$

y por el Teorema de Fubini, con $\lambda > \omega^2$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt &= \frac{1}{2^\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty}H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4t}}C_\alpha(s)x\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{2^\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}C_\alpha(s)x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big)e^{\frac{-s^2}{4t}}\,dt\,ds.
\end{aligned}$$

Aplicando que $H_\alpha(z) = e^{\frac{z^2}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}z)$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} H_\alpha\Big(\frac{s}{2\sqrt{t}}\Big) e^{\frac{-s^2}{4t}}\, dt = 2^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} D_\alpha\Big(\frac{s}{\sqrt{2t}}\Big) e^{\frac{-s^2}{8t}}\, dt.$$

Por la ecuación (5), se sigue que

$$2^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} D_\alpha\Big(\frac{s}{\sqrt{2t}}\Big) e^{\frac{-s^2}{8t}}\, dt = 2^\alpha \sqrt{\pi} \lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-s\sqrt{\lambda}}$$

y por tanto

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt = (\sqrt{\lambda})^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} C_\alpha(s) x e^{-s\sqrt{\lambda}}\, ds = R(\lambda, A)x$$

para todo $x \in D(A^n)$.

En el caso $0 < \alpha \leq 1$, la suposición de que A sea densamente definido no es necesaria debido al hecho de que $H_1(s) = 2s$ y se puede aplicar Fubini directamente (ver la demostración de Theorem 5.2 en [AK]).

Otra conexión entre polinomios de Hermite y semigrupos holomorfos puede ser encontrado en [TO].

3. Un ejemplo

En este último párrafo consideraremos los espacios $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$ y el operador laplaciano $A = \Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ con dominio distribucional máximo.

A priori, sabemos que Δ_1 genera en $L^1(\mathbb{R}^n)$ un C_0-semigrupo holomorfo $(g^z)_{\Re z > 0}$ llamado *gaussiano* o de *Weierstrass*:

$$g^z(s) = \frac{1}{(4\pi z)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|s|^2}{4z}}$$

con $s \in \mathbb{R}^n$ y $\Re z > 0$. Además $\|g^z\|_1 = \big(\frac{|z|}{\Re z}\big)^{\frac{n}{2}}$, ver [Si], pág. 25. Este semigrupo holomorfo actúa en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ por convolución. Y así, es conocido (ver por ejemplo [dLP])

$$\|g^z\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \Big(\frac{|z|}{\Re z}\Big)^{n|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|}$$

y $\|g^z\|_{\mathcal{B}(C_0(\mathbb{R}^n))} \leq \big(\frac{|z|}{\Re z}\big)^{\frac{n}{2}}$.

Por otro lado es conocido en la literatura matemática que Δ_p genera en algunos casos funciones cosenos acotadas o funciones coseno α-veces integradas.

Buscamos en este párrafo señalar primero las estimaciones conocidas para las funciones coseno α-veces integradas generadas por Δ_p en los espacios X ya mencionados. Aplicamos el Teorema 2.4 probado en el párrafo anterior y calculamos la norma del semigrupo holomorfo generado por Δ_p en X y lo comparamos con el valor conocido a priori.

3.1. $X = L^p(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R})$ **con** $1 \leq p < +\infty$**.**

Δ_p genera una función coseno uniformemente acotada $(C(t))_{t>0}$ definida mediante la igualdad

$$C(t)f(x) = \frac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t))$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $f \in X$. Por el Teorema 2.3, su generador infinitesimal $\Delta_p = \frac{d^2}{dx^2}$ genera un semigrupo holomorfo que verifica la estimación

$$\|g^z\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notar en este caso que

$$\frac{1}{2} \geq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

y se da la igualdad en el caso $p = 1$ y en $C_0(\mathbb{R})$.

3.2. $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ **con** $1 \leq p < +\infty$**.**

Por la Proposition 3.2 de [EK], Δ_p genera una función coseno α-veces integrada para $\alpha > (n-1)|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|$. Por tanto, el Teorema 2.4 implica que Δ_p genera un semigrupo holomorfo para $\alpha + \frac{1}{2}$ con $\alpha > (n-1)|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|$.

Es inmediato probar que

$$(n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \frac{1}{2} \geq n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

y se da la igualdad si y solo si $p = 1$. Por tanto la estimación obtenida a través del Teorema 2.4 es siempre peor que la conocida a priori.

3.3. $X = C_0(\mathbb{R}^n)$**.**

De igual manera que la Proposition 3.2 de [EK], se prueba que Δ_0 genera una función coseno α-veces integrada para $\alpha > \frac{(n-1)}{2}$. El Teorema 2.4 implica que Δ_0 genera un semigrupo holomorfo para $\beta > \frac{n}{2}$ y por tanto la obtenida es peor que la conocida a priori.

Nota. El hecho de no obtener mediante el Teorema 2.4 la cota predicha intuimos que es debido a las acotaciones conocidas para las funciones coseno α-veces integradas (que son obtenidas como valores fronteras de semigrupos holomorfos).

Referencias

[AS] M. Abramowitz y I. A. Segun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Nueva York, 1968.

[AK] W. Arendt y H. Kellermann, Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications, en *Integrodifferential equations* (Proc. Conf. Trento, 1987), *Pitman Res. Notes in Math. Series* **190**, Longman Sci. Tech., Harlow (1987), 21–51.

[Ca] L. M. B. C. Campos, On a concept of derivative of complex order with applications to special functions, *IMA J. Appl. Math.* **33** (1984),

[Da] B. Davies, *Integral transforms and their applications*, 2.ª edición, Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[dLP] R. deLaubenfels y S. Piskarev, The growth rate of cosine families, *Journal Math. Anal. Appl.* **196** (1995), 442–451.

[EK] O. El-Mennaoui y V. Keyantuo, Trace theorems for holomorphic semigroups and the second order Cauchy problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 1445–1458.

[GaR] M. C. Gaer y L. A. Rubel, The fractional derivative and entire functions, en *Fractional calculus and its applications* (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), *Lecture Notes in Math.* **457**, Springer-Verlag, Berlín (1975), 171–206.

[Go] J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford Mathematical Monographs, Nueva York, 1985.

[GrR] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, Nueva York, 1980.

[Ke] V. Keyantuo, Integrated semigroups and related partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **212** (1997), 135–153.

[KV] V. Keyantuo y P. Vieten, On analytic semigroups and cosine functions, *Studia Math.* **129** (1998), 137–156.

[LOT] J. L. Lavoie, T. J. Osler y R. Tremblay, Fractional derivatives and special functions, *SIAM Review* **18** (1976), 240–268.

[LTO] J. L. Lavoie, R. Tremblay y T. J. Osler, Fundamental properties of fractional derivatives via Pochhammer integrals, en *Fractional calculus and its applications* (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), *Lecture Notes in Math.* **457**, Springer-Verlag, Berlín (1975), 323–356.

[MOS] W. Magnus, F. Oberhettinger y R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlín, 1966.

[Mi] P. J. Miana, α-times integrated semigroups and fractional derivation, *Forum Math.*, en prensa.

[MR] K. S. Miller y B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, Nueva York, 1993.

[SKM] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[Si] A. M. Sinclair, *Continuous semigroups in Banach algebras*, Cambridge Univeristy Press, *Lecture Note Series* **63**, Cambridge, 1982.

[Sr] H. M. Srivastava, The Weyl fractional integral of a general class of polynomials, *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)* **2** (1983), 219–228.

[TO] T. Takenaka y N. Okazawa, Wellposedness of abstract Cauchy problems for second order differential equations, *Israel J. Math.* **69** (1990), 257–288.

[Vi] I. M. Vinográdov, *Enciclopedia de las matemáticas*, Editorial MIR, Rubiños-1860, Moscú-Madrid, 1993/94.

[WW] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

[Ya] G. Yang, α-times integrated cosine function, en *Recent advances in differential equations* (Kunming, 1997), *Pitman Res. Notes in Math. Series* **386**, Addison Wesley Longman, Harlow (1998), 199–212.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria s/n, 50009 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: pjmiana@posta.unizar.es