MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

IDEALES DE OPERADORES E IDEALES DE CONJUNTOS EN ESPACIOS DE BANACH

ANTONIO MARTINÓN Y KISHIN B. SADARANGANI

En memoria del Profesor José Javier Guadalupe,
ejemplo para los canarios que estudiamos matemáticas en Zaragoza

Abstract. We introduce the set ideals in Banach spaces as families of subsets which satisfy certain properties. We relate this concept with the operator ideals and with the Hausdorff distance to a family of subsets.

1. Introducción

Dado un ideal de operadores $\mathcal{A}$, K. Astala [1] definió la $\mathcal{A}$-variación $h_{\mathcal{A}}(D)$ de un subconjunto acotado D de un espacio de Banach X. Si $\mathcal{A}$ es el ideal de los operadores compactos, entonces $h_{\mathcal{A}}$ es la medida de no compacidad de Hausdorff [2] y si $\mathcal{A}$ es el ideal de los operadores débilmente compactos, se tiene que $h_{\mathcal{A}}$ is la medida de no compacidad débil de De Blasi [6]. La función $h_{\mathcal{A}}$ es un ejemplo especial de las llamadas *cantidades conjuntista* [4] o *medidas* (de no pertenencia) [7]. En efecto, $h_{\mathcal{A}}(D)$ es la distancia de Hausdorff de $D \subset X$ a la clase $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ de los subconjuntos de X con $\mathcal{A}$-variación nula [4, Theorem 5], que constituye un ejemplo de ideal de conjuntos. Es decir, a partir de un ideal de operadores $\mathcal{A}$ se define un ideal de conjuntos $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ de tal manera que la $\mathcal{A}$-variación $h_{\mathcal{A}}$ es la distancia a $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$

En este artículo procedemos a la inversa. Introducimos la noción de *ideal de conjuntos* como una clase de subconjuntos acotados que satisfacen ciertas propiedades naturales. Los principales ejemplos son las clases de los subconjuntos relativamente compactos rc, la de los relativamente débilmente compactos rwc y, más generalmente, los conjuntos de $\mathcal{A}$-variación nula. Dado un ideal de conjuntos $\mathcal{N}$ se define el ideal de operadores $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ del siguiente modo: $T : X \to Y$ pertenece a $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ si la imagen de la bola unidad cerrada de X pertenece a $\mathcal{N}$. Entonces resulta que cualquier ideal de conjuntos $\mathcal{N}$ es la clase de los conjuntos de $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$-variación nula. Además, probamos que $h_{\mathcal{N}} = h_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}}$, donde $h_{\mathcal{N}}$ es la distancia de Hausdorff al ideal de conjuntos $\mathcal{N}$.

Notación. Los espacios de Banach serán denotados por X, Y, Z y la bola unidad cerrada de X por $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. La clausura del subconjunto C de X se denotará por $\overline{C}$, la envolvente convexa por $\operatorname{conv} C$ y la envolvente convexa cerrada por $\overline{\operatorname{conv}}\, C$. La clase de los subconjuntos acotados no vacíos de X es

$$b(X) := \{D \subset X : D \neq \emptyset \text{ y } D \text{ acotado}\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47L20.
Key words and phrases. Set ideal, operator ideal, Hausdorff distance.

El espacio de todos los operadores (lineales y continuos) de X en Y se denotará por $L(X, Y)$.

2. Ideales de conjuntos

Recordemos algunas nociones y hechos sobre la distancia de Hausdorff. Para $C, D \in b(X)$ consideramos

$$h'(C, D) := \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : C \subset D + \varepsilon B_X\}.$$

La *distancia de Hausdorff* entre C y D se define por

$$h(C, D) := \text{máx}\{h'(C, D), h'(D, C)\}.$$

La función h es una seudométrica en $b(X)$ que verifica $h(C, D) = 0 \iff \overline{C} = \overline{D}$. Es decir, h es una métrica sobre la clase

$$bc(X) := \{D \in b(X) : D \text{ cerrado}\},$$

llamada la *métrica de Hausdorff*. En los conjuntos $b(X)$ y $bc(X)$ consideraremos siempre la topología generada por h.

En la próxima proposición damos algunas propiedades de h que necesitamos más adelante. Omitimos las sencillas demostraciones. Para $C \in b(X)$ ponemos

$$\|C\| := \sup\{\|x\| : x \in C\} = h(C, \{0\}).$$

Proposición 1. *Sean $T, S \in L(X, Y)$ y $C, D \in b(X)$. Entonces:*

(1) $h(TC, TD) \leq \|T\| h(C, D)$
(2) $h(TC, SC) \leq \|T - S\| \|C\|$
(3) $h(\operatorname{conv} C, \operatorname{conv} D) \leq h(C, D)$

Ahora introducimos la noción central de este artículo.

Definición 2. Un ideal de conjuntos $\mathcal{N}$ es una clase no vacía de subconjuntos no vacíos de espacios de Banach tales que sus componentes

$$\mathcal{N}(X) := \mathcal{N} \cap b(X),$$

para todo espacio de Banach X, satisfacen las siguientes propiedades:

(1) Existe $D \neq \{0\}$ tal que $D \in \mathcal{N}(X)$, si $X \neq \{0\}$
(2) $\emptyset \neq M \subset P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow M \in \mathcal{N}(X)$
(3) $M, P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow M \cup P \in \mathcal{N}(X)$
(4) $P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow \operatorname{conv} P \in \mathcal{N}(X)$
(5) $\mathcal{N}(X)$ es cerrado en $b(X)$
(6) $P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow TP \in \mathcal{N}(Y)$, para todo $T \in L(X, Y)$

El *ideal de conjuntos trivial* es la clase b de los subconjuntos acotados: $\mathcal{N}(X) = b(X)$, para cualquier espacio de Banach X. La clase rc de los conjuntos relativamente compactos es otro ideal de conjuntos. También lo es la clase rwc formada por los subconjuntos relativamente débilmente compactos.

Observación 3. La condición (5) en la Definición 2 no es esencial. De hecho, si una clase $\mathcal{N}$ verifica las otras condiciones, entonces podemos definir $\overline{\mathcal{N}}$ por

$$\overline{\mathcal{N}}(X) := \overline{\mathcal{N}(X)},$$

tomando la clausura en $b(X)$ con la distancia de Hausdorff h. Se obtiene así que la clase $\overline{\mathcal{N}}$ es un ideal de conjuntos.

Ahora damos varias propiedades simples de los ideales de conjuntos.

Proposición 4. *Sea $\mathcal{N}$ un ideal de conjuntos. Entonces*

(1) $P \in \mathcal{N}(X)$ *y* λ *escalar* $\Rightarrow \lambda P \in \mathcal{N}(X)$
(2) $M, P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow M + P \in \mathcal{N}(X)$
(3) $R \subset X$ *relativamente compacto* $\Rightarrow R \in \mathcal{N}(X)$
(4) $P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow \overline{P} \in \mathcal{N}(X)$

Demostración. (1) El operador λI_X, siendo I_X la identidad sobre X, aplica $P \in \mathcal{N}$ en λP, luego $\lambda P \in \mathcal{N}$.

(2) Es suficiente notar que

$$M + P = 2(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}P) \subset 2\,\mathrm{conv}(M \cup P) \in \mathcal{N}.$$

(3) Tomamos $P \in \mathcal{N}$ tal que $P \neq \{0\}$, luego podemos elegir $p \in P$, $p \neq 0$, luego $\{p\} \in \mathcal{N}$. Dado $x \in X$, sea $T : X \to X$ lineal y continuo tal que $Tp = x$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$. Consecuentemente, todo subconjunto finito de X pertenece a $\mathcal{N}(X)$. Además, si $R \subset X$ es relativamente compacto y $\varepsilon > 0$, entonces existe un subconjunto finito $F \subset X$ tal que $h(R, F) < \varepsilon$, luego $R \in \mathcal{N}$ ya que $\mathcal{N}(X)$ es cerrado.

(4) Como $h(P, \overline{P}) = 0$, resulta que $\overline{P} \in \overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$. □

3. La distancia a un ideal de conjuntos

Dado un ideal de conjuntos $\mathcal{N}$ consideramos la función distancia a $\mathcal{N}$:

$$h(D) = h_{\mathcal{N}}(D) := \text{ínf}\{h(D, P) : P \in \mathcal{N}\},$$

para $D \in b(X)$. Si $\mathcal{N} = rc$, los subconjuntos relativamente compactos, entonces la función h es la *medida de no compacidad de Hausdorff* [2] y si $\mathcal{N} = rwc$, los subconjuntos relativamente débilmente compactos, entonces h es la *medida de no compacidad débil de De Blasi* [6].

En la siguiente proposición resumimos las principales propiedades de la función distancia h.

Proposición 5. *Sea $\mathcal{N}$ un ideal de conjuntos y h la distancia a $\mathcal{N}$. Entonces*

(1) $h(D) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : D \subset P + \varepsilon B_X,$ *para algún* $P \in \mathcal{N}\}$
(2) $h(C \cup D) = \text{máx}\{h(C), h(D)\}$, *y de aquí,* $C \subset D \Rightarrow h(C) \leq h(D)$
(3) $h(\alpha D) = |\alpha| h(D)$ *para cualquier escalar* α
(4) $h(C + D) \leq h(C) + h(D)$
(5) $h(C + P) = h(C)$, *para cualquier* $P \in \mathcal{N}$
(6) $h(D) = h(\mathrm{conv}\, D)$

(7) $h(D) = h(\overline{D})$
(8) $h(B_X) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}(X) = b(X)$
(9) $h(B_X) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{N}(X) \neq b(X)$
(10) $h(TD) \leq h(TB_X)h(D) \leq \|T\|h(D)$

Demostración. (1) y (2) se corresponden con Theorems 1 y 2 of [3]; (3), (4), (6) son Theorem 1 (i), (ii), (iii) de [4]; (7) es Proposition 2 (iv) de [4]; (8) y (9) coinciden con Theorem 2 (iii) y (iv) de [4].

(5) Es claro que $h(C+P) \leq h(C)$. Por otra parte, sea $\varepsilon > h(C+P)$; existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $C + P \subset M + \varepsilon B_X$, luego $C \subset M + (-P) + \varepsilon B_X$ con $M + (-P) \in \mathcal{N}$; es decir, $h(C) \leq \varepsilon$, luego $h(C) \leq h(C + P)$.

(10) Dado $\varepsilon_1 > h(TB_X)$ y $\varepsilon_2 > h(D)$, existe $P_1, P_2 \in \mathcal{N}$ tal que $TB_X \subset P_1 + \varepsilon_1 B_X$ y $D \subset P_2 + \varepsilon_2 B_X$, luego $TD \subset P + \varepsilon B_X$, donde $P = TP_2 + \varepsilon P_1 \in \mathcal{N}$ y $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 > h(TB_X)h(D)$. Consecuentemente $h(TD) \leq \varepsilon$. La otra desigualdad es inmediata teniendo en cuenta que $h(TB_X) \leq \|T\|$. □

El siguiente lema, debido a H. Rådström (1953), resulta de mucha utilidad en lo que sigue.

Lema 6 ([9, Lemma 1])**.** *Sean C, D y E subconjuntos no vacíos de un espacio de Banach X. Si D es cerrado convexo y E es acotado, entonces*

$$C + E \subset D + E \Rightarrow C \subset D.$$

Teorema 7. *Sea $\mathcal{N}$ un ideal de conjuntos no trivial y h la distancia a $\mathcal{N}$. Entonces*

$$h(D + \varepsilon B_X) = h(D) + \varepsilon,$$

para todo $D \in b(X)$ y $\varepsilon > 0$.

Demostración. Es obvio que $h(D + \varepsilon B_X) \leq h(D) + \varepsilon$. Con el fin de probar la otra desigualdad tomamos $\delta > h(D + \varepsilon B_X)$. Como

$$\varepsilon = h(\varepsilon B_X) = h(x + \varepsilon B_X) \leq h(D + \varepsilon B_X),$$

para todo $x \in D$, resulta que $\varepsilon < \delta$. Además, existe $P \in \mathcal{N}$ tal que

$$D + \varepsilon B_X \subset P + \delta B_X = P + (\delta - \varepsilon)B_X + \varepsilon B_X,$$

luego

$$D + \varepsilon B_X \subset \overline{\text{conv}}(P + (\delta - \varepsilon)B_X) + \varepsilon B_X.$$

Del lema de Rådström obtenemos $D \subset \overline{\text{conv}}(P+(\delta-\varepsilon)B_X$, luego $h(D) \leq h(P+(\delta-\varepsilon)B_X) = \delta-\varepsilon$, es decir $h(D)+\varepsilon \leq \delta$; consecuentemente, $h(D)+\varepsilon \leq h(D+\varepsilon B_X)$. □

4. Ideales de operadores

Recordemos que un *ideal de operadores* $\mathcal{A}$ es una clase de operadores (lineales y continuos) entre espacios de Banach que satisface las siguientes propiedades, siendo

$$\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{A} \cap L(X, Y),$$

para todo par de espacio de Banach X e Y:

(1) Si $T \in L(X, Y)$ tiene rango de dimensión finita, entonces $T \in \mathcal{A}(X, Y)$
(2) $S, T \in \mathcal{A} \Rightarrow S + T \in \mathcal{A}(X, Y)$

(3) $T \in L(X,Y), S \in \mathcal{A}(Y,Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{A}(X,Z)$
(4) $T \in \mathcal{A}(X,Y), S \in L(Y,Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{A}(X,Z)$

Un *ideal de operadores cerrado* es un ideal de operadores $\mathcal{A}$ tal que cada componente $\mathcal{A}(X,Y)$ es cerrada en $L(X,Y)$. El ideal de operadores $\mathcal{A}$ es *suprayectivo* si para cualquier operador exhaustivo $Q \in L(Z,X)$ y cualquier operador $T \in L(X,Y)$ se sigue de $TQ \in \mathcal{A}(Z,Y)$ que $T \in \mathcal{A}$ [8].

Dado el ideal de conjuntos $\mathcal{N}$ definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : TB_X \in \mathcal{N}\}.$$

Teorema 8. *Si $\mathcal{N}$ es un ideal de conjuntos, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ es un ideal de operadores cerrado y suprayectivo.*

Demostración. Ponemos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$.

(1) Si $T \in L(X,Y)$ tiene rango de dimensión finita, entonces TB_X es relativamente compacto. Por la Proposición 4.3 podemos afirmar que $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$, luego $T \in \mathcal{A}$.

(2) Si $S,T \in \mathcal{A}(X,Y)$, entonces SB_X y TB_X pertenecen a $\mathcal{N}(Y)$, luego $(S+T)B_X \subset SB_X + TB_X \in \mathcal{N}(Y)$ y $S+T \in \mathcal{A}$.

(3) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in \mathcal{A}(Y,Z)$, entonces $TB_X \subset \|T\|B_Y$ y $STB_X \subset \|T\|SB_Y \in \mathcal{N}(Z)$, luego $ST \in \mathcal{A}$.

(4) Si $T \in \mathcal{A}(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$ y $STB_X \in \mathcal{N}(Z)$, luego $ST \in \mathcal{A}$.

(5) $\mathcal{A}$ es cerrado. En efecto, sea una sucesión $(T_n) \subset \mathcal{A}(X,Y)$ tal que $T_n \to T \in L(X,Y)$ $(n \to \infty)$. De Proposition 1.2 obtenemos $h(T_nB_X, TB_X) \le \|T_n - T\|$, luego $T_nB_X \to TB_X$, siendo $T_nB_X \in \mathcal{N}(Y)$, y tenemos que $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$. Esto es, $T \in \mathcal{A}$.

(6) $\mathcal{A}$ es suprayectivo. En efecto, sea $Q \in L(Z,X)$ un operador exhaustivo y $T \in L(X,Y)$ tal que $TQ \in \mathcal{A}(Z,Y)$. Entonces $\delta B_X \subset QB_Z$, para cierto $\delta > 0$, luego $\delta TB_X \subset TQB_Z \in \mathcal{N}(Y)$, y obtenemos $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$, luego $T \in \mathcal{A}$. □

Dado un ideal de operadores $\mathcal{A}$, K. Astala [1] introdujo la $\mathcal{A}$-*variación* de $D \in b(X)$ mediante

$$h_{\mathcal{A}}(D) := \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : \exists Z, \exists K \in \mathcal{A}(Z,X), D \subset KB_Z + \varepsilon B_X\}.$$

Se dice que D es $\mathcal{A}$-compacto si $h_{\mathcal{A}}(D) = 0$. Si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores cerrado suprayectico y $D \in b(X)$, entonces $h_{\mathcal{A}}(D) = 0$ si y sólo si $D \subset KB_Z$ para cierto $K \in \mathcal{A}(Z,X)$ [1]. Se ha probado en [4] que la clase $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ de los subconjuntos $\mathcal{A}$-compactos es un ideal de conjuntos y, además,

$$h_{\mathcal{A}} = h_{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}}.$$

Ahora veremos que

$$h_{\mathcal{N}} = h_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}}.$$

Para demostrar esta igualdad es necesario el siguiente resultado.

Lema 9. *Sea $\mathcal{N}$ un ideal de conjuntos y h la distancia a $\mathcal{N}$. Para cualquier conjunto acotado D,*

$$h(D) = h(\operatorname{aco} D),$$

siendo $\operatorname{aco} D$ *la envolvente absolutamente convexa de* D*.*

Demostración. Es obvio que $h(D) \leq h(\operatorname{aco} D)$. Recordemos que

$$\operatorname{aco} D = \operatorname{conv} \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D$$

Ahora probamos la siguiente igualdad inspirándonos en [5].

$$h(\operatorname{aco} D) = h\Big(\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D\Big).$$

Sea $\varepsilon > h(D)$, luego $D \subset P + \varepsilon B_X$, para cierto $P \in \mathcal{N}$. Dado $\delta > 0$ existe α_1, α_2, $\ldots$, α_q, $|\alpha_i| \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ tales que

$$\{\alpha : |\alpha| \leq 1\} \subset \bigcup_{i=1}^{q} \{\alpha : |\alpha - \alpha_i| \leq \delta\}.$$

Si $|\alpha - \alpha_i| \leq \delta$, entonces $\alpha D \subset (\alpha - \alpha_i)D + \alpha_i D$ y, además, $(\alpha - \alpha_i)D \subset \delta \|D\| B_X$. También $\alpha_i D \subset \alpha_i P + \alpha_i \varepsilon B_X$. Luego

$$\alpha D \subset \delta \|D\| B_X + \alpha_i P + \alpha_i \varepsilon B_X.$$

Por consiguiente,

$$\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D \subset \bigcup_{i=1}^{q} (\delta \|D\| B_X + \alpha_i P + \alpha_i \varepsilon B_X)$$

$$\subset (\delta \|D\| B_X + \varepsilon B_X) + \bigcup_{i=1}^{q} \alpha_i P = (\delta \|D\| + \varepsilon) B_X + \bigcup_{i=1}^{q} \alpha_i P.$$

De $\bigcup_{i=1}^{q} \alpha_i P \in \mathcal{N}$, obtenemos

$$h\Big(\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D\Big) \leq \delta \|D\| + \varepsilon,$$

para todo $\delta > 0$, y, finalmente, $h(\operatorname{aco} D) \leq h(C)$. $\square$

Teorema 10. *Sea* $\mathcal{N}$ *un ideal de conjuntos. Para cualquier espacio de Banach* X*,*

$$\mathcal{N}(X) = \{P \in b(X) : P \text{ es } \mathcal{A}_{\mathcal{N}}\text{-compacto}\}$$

Demostración. Si P es $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$-compacto, entonces existe $K \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(Z, X)$ tal que $P \subset KB_Z \in \mathcal{N}(X)$. Por otro lado, sea $P \in \mathcal{N}(X)$. Tomamos $Z := \ell_1(P)$; esto es, Z es el espacio de las familias de escalares $(\xi_x)_{x \in P}$ que son absolutamente sumables con la norma dada por

$$\|(\xi_x)_{x \in P}\| := \sum_{x \in P} |\xi_x|$$

que lo convierte en espacio de Banach. Para $x \in P$ consideramos $e_x = (\varepsilon_y)_{y \in P} \in Z$, siendo $\varepsilon_y = 0$ si $y \neq x$ y $\varepsilon_y = 1$ si $y = x$. Entonces tenemos

$$B_Z = \overline{\operatorname{aco}} \{e_x : x \in P\}.$$

Definimos el operador $K : Z \to X$, $Ke_x := x$. Es claro que K es lineal y continuo. Además,

$$KB_Z = K\,\overline{\text{aco}}\{e_x : x \in P\} \subset \overline{\text{aco}}\{Ke_x : x \in P\} = \overline{\text{aco}}\,P \in \mathcal{N}(X).$$

Luego $K \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ y $P \subset KB_Z$. Es decir, $P \in \mathcal{N}(X)$. $\square$

Corolario 11. $h_{\mathcal{N}} = h_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}}$.

Referencias

[1] K. Astala, On measures of noncompactness and ideal variations in Banach spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Diss.* **29** (1980).

[2] J. Banaś y K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Marcel Dekker, 1980.

[3] J. Banaś y A. Martinón, Some properties of the Hausdorff distance in metric spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* **42** (1990), 511–516.

[4] J. Banaś, A. Martinón y K. B. Sadarangani, Set quantities related to the Hausdorff distance in Banach spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* **28** (1997), 1421–1433.

[5] M. Cichoń, On measures of weak noncompactness, *Publ. Math. Debrecen* **45** (1994), 93–102.

[6] F. S. De Blasi, On a property of the unit sphere in a Banach space, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)* **21(60)** (1977), 259–262.

[7] A. Martinón, A system of axioms for measures of noncompactness (en ruso), *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. Fiz.* **10** (1990), 133–143.

[8] A. Pietsch, *Operator ideals*, North Holland, 1980.

[9] H. Rådström, An embedding theorem for spaces of convex sets, *Proc. Amer. Math Soc.* **3** (1952), 165–169.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna (Tenerife), Spain

Correo electrónico: `anmarce@ull.es`

Departamento de Matemáticas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 35071 Las Palmas de Gran Canaria, Spain