Curvas críticas y saltos en optimización no lineal.

por:

W. Gómez , Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Alemania

J. Guddat , Humboldt Universität Berlin, Alemania

H. Th. Jongen , Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Alemania

J.-J. Rückmann , Technische Universität Ilmenau, Alemania

C. Solano , Universidad de Costa Rica, Costa Rica

Contenido

PREFACIO

La idea de escribir este libro de texto surgió en septiembre de 1994, durante una estadía conjunta en la Universidad de La Habana, de los profesores J.Guddat (Humboldt-Universität, Berlin, R.F.A.) y H.Th.Jongen (Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen, R.F.A.).

El libro contiene una selección de tópicos que se ha ofrecido a estudiantes de matemática, en cursos magistrales de optimización no lineal, en las universidades mencionadas.

Los autores hemos renunciado conscientemente a temas clásicos como la optimización lineal y la teoría de dualidad. Han sido colocadas en el centro de nuestra atención las condiciones de optimalidad, la teoría del punto crítico (mínimos locales, puntos de ensilladura y sus respectivas relaciones), las singularidades para problemas paramétricos no lineales y los métodos de continuación y saltos, así como su utilización en métodos de resolución de la optimización no lineal.

Hemos escrito este libro pensando, en primer lugar, en los estudiantes de matemática, de economía y de investigación de operaciones. Con esto deseamos contribuir a la unificación de la elaboración conceptual y al desarrollo de la optimización matemática en el ámbito hispano.

Aachen, Berlín, Erlangen-Nürnberg, Habana, San José

Los Autores

Capítulo 1

Introducción

1.1 Análisis de contenidos

Para comenzar, consideremos el problema de optimización no lineal, cuya estructura standard está dada por:

$$(P) \quad \min\{f(x)|x \in M\}, \tag{1.1}$$

donde

$$M := \{x \in I\!R^n | h_i(x) = 0, i \in I,\ g_j(x) \geq 0, j \in J\}$$

$I := \{1, \ldots, m\}$, $m < n$, $J := \{1, \ldots, s\}$ y $f, h_i, g_j \in C^k(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$. La magnitud de k será precisada en cada capítulo.

Tal y como se ha mencionado en el prefacio, nos hemos concentrado en ciertos temas que mencionaremos a continuación:

El Capítulo 2 contiene condiciones de optimalidad de 1er. y 2do. orden para problemas con restricciones sencillas. Un ejemplo lo proporciona el problema (1.1) cuando el conjunto factible M posee la forma

$$M := I\!R^p \times I\!H^q \tag{1.2}$$

donde $I\!H^q := \{x \in I\!R^q \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, q\}$ y $n = p + q$.

En el Capítulo 3 serán deducidos, de un modo no tradicional, algunos criterios de optimalidad para problemas generales de la forma (1.1). En tal deducción jugará un papel decisivo el llamado difeomorfismo standard. Este servirá, por ejemplo, para describir la estructura local del conjunto factible, en una vecindad de un mínimo local, a través del problema descrito por (1.2).

Para tal construcción necesitaremos contar con la condición de regularidad de independencia lineal (en breve LICQ de la expresión en inglés: Linear Independence Constraint Qualification). En los dos primeros capítulos serán introducidos también los conceptos de mínimo global, mínimo local, mínimo local estricto, punto crítico y punto estacionario. Además, una generalización del concepto de punto crítico (punto crítico generalizado) se introducirá en el Capítulo 5.

El Capítulo 4 es uno de los capítulos centrales del libro. En el se considerará el conocido Lema de Morse, el cual permite describir la estructura local de una función (dos veces diferenciable) en un punto crítico no degenerado. Para ello se ha escogido un enfoque homotópico, el cual, por lo demás, resulta esencial en el estudio de las singularidades: la función que está en la base del análisis será conectada, mediante una familia uniparamétrica, con su desarrollo de Taylor (aquí hasta el segundo orden) en el punto crítico. Luego será esquematizada la relación global entre los puntos críticos. También se considerará la modificación de la estructura topológica de los conjuntos de nivel inferior, especialmente al traspasarse niveles que contienen puntos críticos. En esto resulta decisiva la distribución de los valores propios de la matriz hessiana de la función en los puntos críticos. Posteriormente se mostrará de qué modo las citadas consideraciones se pueden trasladar a problemas con restricciones. Por último, se mostrará gráficamente como se modifica la función objetivo y el conjunto factible (para casos simples) en una familia uniparamétrica. En realidad, tales familias uniparamétricas (deformaciones contínuas) y las respectivas aplicaciones constituyen la base conceptual del presente libro.

En el Capítulo 5 serán abordadas conocidas proposiciones sobre sistemas de desigualdades lineales, las cuales serán utilizadas con posterioridad. Mencionaremos aquí el Lema de Farkas, teoremas de alternativa, condiciones necesarias de optimalidad para un mínimo local (sin LICQ), la llamada condición de Fritz-John, etc.

También se introducirá una condición de regularidad más débil que la condición LICQ, la llamada Condición de regularidad de Mangasarian-Fromowitz MFCQ(Del idioma inglés: Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification). Tal condición es suficiente para garantizar que un mínimo local sea también un punto estacionario. La condición MFCQ es también condición necesaria y suficiente para que el conjunto de los multiplicadores de Lagrange, pertenecientes a un punto estacionario, sea acotado (Teorema de Gauvin). Ambas propiedades se mostrarán en el Capítulo 5.

En los capítulos 6 y 7 nos ocuparemos de problemas de optimización paramétricos con la estructura standard siguiente

$$P(t) \quad \min\{f(x,t)|x \in M(t)\}, \quad t \in I\!R \; (t \in [0,1])$$

donde

$$M(t) := \{x \in I\!R^n | h_i(x,t) = 0, i \in I, \; g_j(x,t) \geq 0, j \in J\}$$

$I := \{1, \ldots, m\}$, $m < n$, $J := \{1, \ldots, s\}$ y $f, h_i, g_j \in C^k(I\!R^n \times I\!R, I\!R)$, $k \geq 2$.

Para algunos de los resultados dados en los capítulos 6 y 7 necesitaremos un grado mayor de diferenciabilidad.

En el Capítulo 6 serán introducidas inicialmente las clases de funciones $\mathcal{F}$ de Jongen,Jonker y Twilt y la de Kojima y Hirabayashi. Ahí consideramos los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{gc} &:= \{(x,t) \in I\!R^n \times I\!R \mid x \text{ es punto crítico generalizado de } P(t)\} \\
\Sigma_{stat} &:= \{(x,t) \in I\!R^n \times I\!R \mid x \text{ es punto estacionario de } P(t)\} \\
\Sigma_{loc} &:= \{(x,t) \in I\!R^n \times I\!R \mid x \text{ es punto de mínimo local de } P(t)\}
\end{aligned}$$

En el mismo capítulo se describe detalladamente la estructura local del conjunto Σ_{gc} cuando la tripleta (f, H, G) pertenece a la subfamilia (C^3_S-densa y abierta) de funciones $\mathcal{F} \subset C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)^{1+m+s}$, donde C^3_S designa la topología fuerte o topología de Whitney y $H := (h_1, \ldots, h_m)^\top$, $G := (g_1, \ldots, g_s)^\top$.

La clase $\mathcal{F}$ se define de manera tal que si $(f, H, G) \in \mathcal{F}$, entonces Σ_{gc} puede caracterizarse según cinco tipos de puntos. La Figura 1.1 ilustra, para cada uno de los cinco tipos de puntos críticos generalizados, la estructura local del conjunto Σ_{gc}.

El lector puede encontrar en el presente capítulo pruebas detalladas, tanto del teorema sobre la genericidad de la clase $\mathcal{F}$ como del teorema

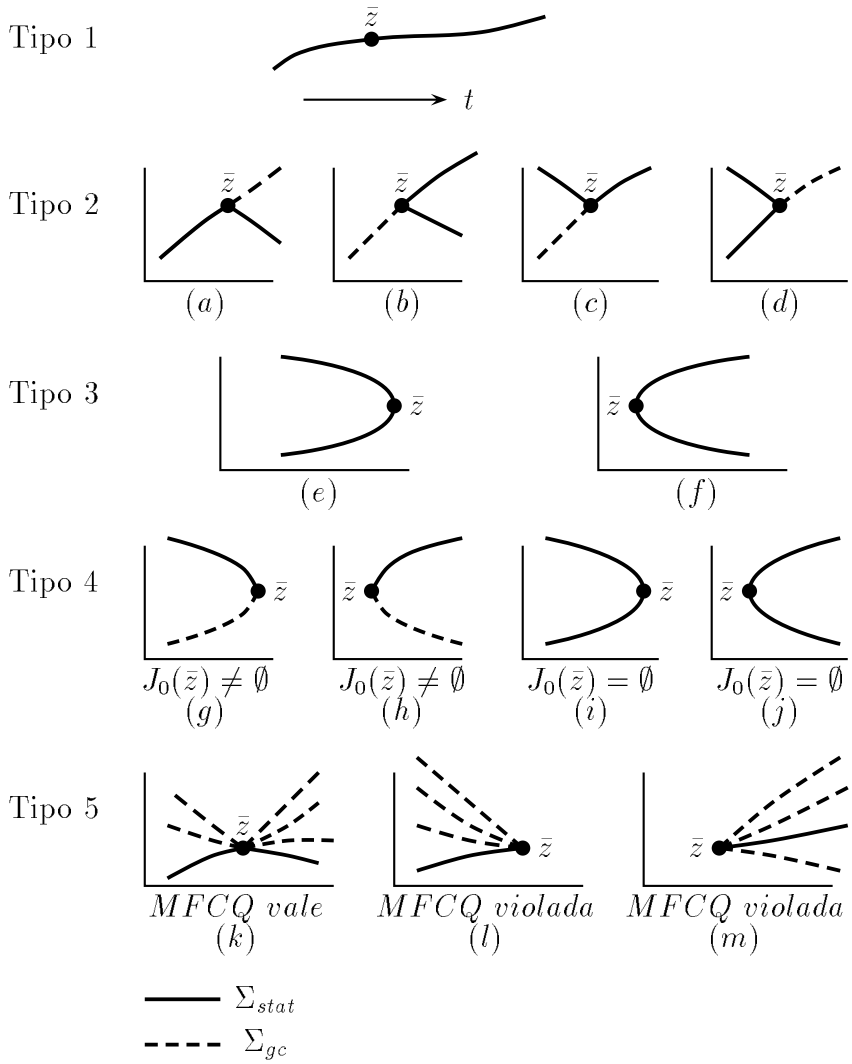


Figura 1.1: Estructura de Σ_{gc}

sobre perturbaciones. Este último nos indica de qué modo es posible instalarse en la clase $\mathcal{F}$ a partir de cualquier problema paramétrico y es por ende importante desde el punto de vista de las aplicaciones.

La clase de funciones denominada de Kojima-Hirabayashi (Ver [110]) fue introducida como una generalización de la definición clásica de un valor regular de una función contínuamente diferenciable. En efecto, mediante la denominada aplicación de Kojima, la cual es contínuamente diferenciable a trozos, se puede lograr una descripción del sistema de Karush-Kuhn-Tucker y caracterizar sus soluciones.

El sistema de Karush-Kuhn-Tucker, para un problema dado $P(t)$ (con restricciones de desigualdad en la forma "$\geq$"), tiene solución en un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ si existe, a su vez, un punto $\bar{y} \in R^{m+s}$ tal que $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0$, donde $\mathcal{H} : R^{n+m+s+1} \to R^{n+m+s}$ está definida por

$$\mathcal{H}(x, y, t) = \left[\begin{array}{l} D_x f(x,t) + \sum\limits_{i \in I} y_i D_x h_i(x,t) + \sum\limits_{j \in J} y^+_{m+j} D_x g_j(x,t) \\ -h_i(x,t), \ i \in I \\ y^-_{m+j} - g_j(x,t), \ j \in J \end{array} \right] \tag{1.3}$$

(para $\alpha \in I\!R$ sea $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$ y $\alpha^- = \min\{\alpha, 0\}$).

Obviamente la aplicación $\mathcal{H}$ en (1.3) es contínuamente diferenciable a trozos. Se puede mostrar que, si $0 \in R^{n+m+s}$ es un valor regular de $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H}^{-1}(0)$ es una C^1-variedad unidimensional. Haremos notar, en este mismo Capítulo 6, que la condición $(f, H, G) \in \mathcal{F}$ implica que cero es un valor regular de la aplicación $\mathcal{H}$ de Kojima.

El Capítulo 7 contiene una descripción de los métodos de continuación que se puede utilizar sobre los conjuntos Σ_{stat} y Σ_{gc} para las familias de funciones consideradas en el Capítulo 6. Este capítulo contiene además una discusión sobre el concepto de "salto", desde una componente conexa hacia otra ,tanto en el conjunto Σ_{loc} como en Σ_{gc}. El lector encontrará en este capítulo un tratamiento más detallado y más sencillo sobre esta temática que en el libro [61].

En el capítulo final serán utilizados los conceptos y algoritmos considerados en los capítulos 6 y 7 para analizar y mejorar métodos conocidos de la optimización no lineal (por ejemplo los métodos de penalización). Este análisis tendrá como base la idea de interpretar dichos métodos como métodos de continuación, usando inmersiones adecuadas.

Una inmersión del problema (1.1) se entiende como un problema de optimización uniparamétrico

$$\tilde{P}(t) \quad \min\{f(y,t)|y \in \widetilde{M}(t)\}, \quad t \in [0,1] \tag{1.4}$$

donde

$$\widetilde{M}(t) := \{y \in I\!R^{\bar{n}} | h_i(y,t) = 0, i \in I,\ g_j(y,t) \geq 0, j \in \bar{J}\}$$

$n \leq \bar{n}$ y $\bar{J}$ es un conjunto de índices finito con $J \subseteq \bar{J}$. Dicho problema $\tilde{P}(t)$ ha de ser tal que para $\tilde{P}(0)$ conozcamos un punto solución (punto de partida) y que $\tilde{P}(1)$ sea equivalente (en sentido general) con el problema original (1.1).

Un ejemplo de inmersión es el siguiente: definimos $\bar{n} = n$, $\bar{J} = J$ y

$$\begin{aligned} f(x,t) &:= tf(x) + (1-t)\|x - x^0\|^2 \\ h_i(x,t) &:= h_i(x) + (t-1)h_i(x^0), i \in I, \\ g_j(x,t) &:= g_j(x) + (1-t)|g_j(x^0)|, j \in J \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $x^0 \in I\!R^n$ se escoge arbitrariamente.

Esta es la llamada inmersión standard, considerada en la Sección 8.3 (Ver detalles en [34], [63]). Observamos que el punto x^0 es incluso un mínimo global de $\widetilde{P}(0)$ para la inmersión (1.5).

En un caso como el anterior, o inclusive más general, podemos plantearnos la problemática de encontrar una discretización del intervalo $[0,1]$:

$$0 = t_0 < \ldots < t_i < \ldots, t_N = 1$$

y, consecuentemente, mínimos locales (puntos estacionarios o puntos c.g.) de $\widetilde{P}(t_i)$, $i = 1, \ldots, N$. El anterior planteamiento tiene una relación natural con los métodos de continuación y puede utilizarse no solamente para replantear problemas de optimización a través de inmersiones sino también para reformular otros problemas como veremos más adelante.

En la Sección 8.2 se interpretará el método de penalización como un método de inmersión. Para los así llamados métodos de penalización exacta y de los multiplicadores de Lagrange se ha realizado investigaciones similares (Ver [63, 62, 23, 24]). El lector podrá encontrar en la Sección 8.3 un resumen de dichas publicaciones. Hacemos notar que también puede estudiarse con esta concepción de inmersión otros métodos, como por ejemplo los de punto interior (a los cuales pertenecen también los de barrera y los métodos centrales). Ver por ejemplo [57, 196, 138] y las publicaciones allí mencionadas.

Los análisis de tales métodos se centran en dar respuesta a algunas de las preguntas siguientes:

(i) ¿ Es la inmersión elegida apropiada para aplicarle una concepción de inmersión?

(ii) ¿ Cómo es posible instalarse en la clase $\mathcal{F}$?

(iii) ¿ Qué tipos de singularidades pueden aparecer?

(iv) ¿ Es posible saltar de una componente conexa a otra?

(v) ¿ Resulta razonable la hipótesis de pertenencia a la clase $\mathcal{F}$ para la inmersión elegida?

Tal análisis conduce a modificaciones de las inmersiones clásicas, mediante las cuales se aclara la posibilidad de encontrar, al menos, un punto crítico generalizado de (P). Debe hacerse incapié, sin embargo, que el análisis de las inmersiones modificadas muestra la necesidad de encontrar, en el peor de los casos, todas las componentes conexas del conjunto Σ_{gc}. Tal problema permanece abierto. Al lector le será posible reconocer el origen de las dificultades a lo largo de los capítulos 6 y 7.

En la siguiente sección de la Introducción consideraremos otras aplicaciones y se mostrará, entre otras cosas, que el problema de la optimización global estaría resuelto si la inmersión standard, considerando un punto arbitrario $x^0 \in I\!R^n$, fuera siempre exitosa. Si fuéramos capaces de encontrar tal algoritmo, tendríamos a nuestra disposición un algoritmo determinístico para resolver los problemas de la optimización global. Pero debemos decir que hasta el presente no existe una metodología determinística lo suficientemente poderosa como para resolver el mencionado problema (Ver la Sección 8.4).

Un último detalle general deseamos precisar antes de pasar a la siguiente sección. En el Capítulo 8 se calculan numerosos ejemplos. Dichos ejemplos fueron todos calculados mediante el uso de el programa

PAFO. Dicho paquete de programa ha sido desarrollado en la Universidad Humboldt de Berlin para la exploración numérica de métodos de continuación en la optimización. Las ilustraciones que ofrecen los resultados de dichos cálculos son las que ofrece el paquete de programas antes mencionado. Como consecuencia en las figuras que reflejan cálculos con PAFO se observan algunos términos en inglés como por ejemplo type, jumps y otros. Esperamos que dicha inconsistencia no constituya un obstáculo de mayor cuantía. En el Capítulo 7 se tiene con el mencionado detalle a la Figura 7.2. En el Capítulo 8 se tienen en total 20 figuras que representan cálculos de PAFO.

1.2 Otras aplicaciones de la optimización paramétrica

1.2.1 Optimización global

Introduzcamos el problema de la optimización global . Dada la función $F \in C^2(I\!R^n, I\!R)$ consideramos el problema que consiste en encontrar un mínimo global de $F \in C^2(I\!R^n, I\!R)$ restringida al conjunto K. El problema se puede expresar formalmente del siguiente modo:

$$\text{min glob } \{F(x) \mid x \in K\}. \tag{1.6}$$

El conjunto K se supone compacto y convexo, por ejemplo:

$$K := \left\{x \in I\!R^n \mid \|x\|^2 \leq q\right\} \text{ con } q > 0$$

Proponemos la estrategia simple siguiente (Ver Figura 1.2):

Paso 1. : Computar un punto estacionario $\hat{x}$ de $\min\{F(x) \mid x \in K\}$.

Paso 2. : Encontrar un punto que pertenezca al conjunto $\{x \in K \mid F(x) \leq F(\hat{x}) - \epsilon\}$,
donde ϵ es suficientemente pequeño, mediante la búsqueda de un punto crítico generalizado de

$$\min\{\|x - x^0\|^2 \mid x \in K, g(x) \geq 0\}. \tag{1.7}$$

donde $x^0 \in K$ es arbitrario y $g(x) = -F(x) + F(\hat{x}) - \epsilon$.

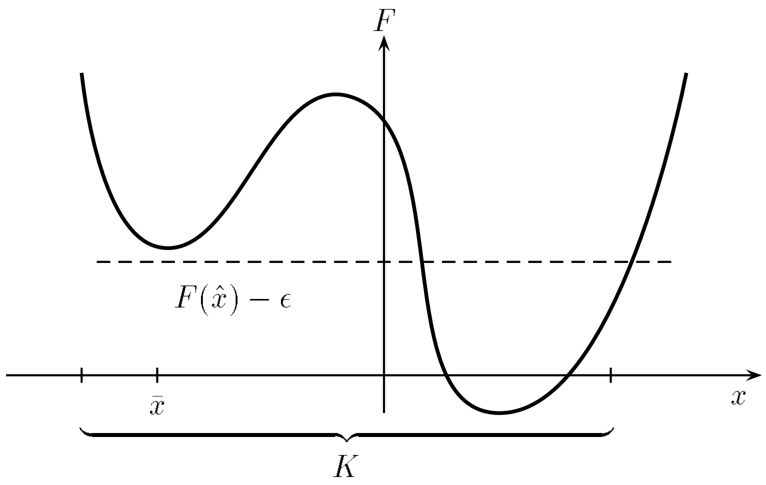


Figura 1.2:

Desde luego, el paso 2 es el más difícil . Y tal paso podría realizarse si dispusiéramos de un algoritmo convergente para el problema (1.7).

Hacemos notar, además, que $\hat{x}$ es un mínimo global para el problema $\min\{F(x) \mid x \in K\}$ si y solo si $\{x \in K \mid F(x) \leq F(\hat{x}) - \epsilon\} = \emptyset$. para todo $\epsilon > 0$.

Consideremos ahora la inmersión siguiente del problema (1.7):

$$P(t) \quad \min\left\{\|x - x^0\|^2 \mid x \in K, g(x) + (t-1)g(x^0) \geq 0\right\}.$$

Se trata de una forma de la inmersión standard. En la sección 8.4 se muestra, precisamente para tal inmersión, que aparecen puntos de Tipo 4 para los cuales no se dispone de un salto a otra componente conexa (Ver también [61, Section 6.3]).

1.2.2 Optimización vectorial

Consideremos el problema de optimización vectorial

$$(MO) \quad \min\{(f_1(x), \ldots, f_L(x) \mid x \in M\}$$

donde M es un subconjunto no vacío de $I\!R^n$ y $f_1, \ldots, f_L$ son funciones definidas en $I\!R^n$.

Aquí utilizaremos las nociones muy conocidas de punto eficiente (Ver p.e. [61]) (también llamado óptimo de Pareto, punto no dominado, punto admisible, etc.), de punto localmente eficiente y las menos conocidas nociones de punto propiamente eficiente con cota ϵ y de punto débilmente eficiente. Le recordamos al lector tales nociones.

Un punto $\bar{x} \in M$ se denomina *punto eficiente* si

$$(f(\bar{x}) + D) \bigcap f(M) = \emptyset$$

donde $D = -I\!R^L_+ \backslash \{0\}$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_L(x))$.

Un punto $\bar{x} \in M$ se denomina *punto propiamente eficiente* con cota ϵ si

$$(f(\bar{x}) + \tilde{D}_\epsilon) \bigcap f(M) = \emptyset$$

donde $\tilde{D} = D_\epsilon \backslash \{0\}$, $D_\epsilon = \left\{ y \in I\!R^L \mid \mathrm{dist}(y, -I\!R^L_+) \leq \epsilon \right\}$. Por dist entendemos la distancia usual entre un punto y un conjunto, definida como el valor ínfimo de la distancia euclideana entre el punto y todos los puntos del conjunto.

Un punto $\bar{x} \in M$ se denomina *punto débilmente eficiente* si

$$(f(\bar{x}) + \tilde{D}) \bigcap f(M) = \emptyset$$

donde $\tilde{D} = -\mathrm{int} I\!R^L_+$.

Denotaremos al conjunto de todos los puntos eficientes con M_{eff}, al conjunto de puntos localmente eficientes con M_{loceff}, al conjunto de puntos propiamente eficientes con cota ϵ lo designaremos con M^ϵ_{loceff}, al conjunto de puntos local y propiamente eficientes con cota ϵ con la notación M^ϵ_{loceff}, al conjunto de puntos débilmente eficientes con cota ϵ será M^ϵ_{weff} y, finalmente, al conjunto de puntos local y débilmente eficientes lo llamaremos $M^\epsilon_{locweff}$. Entonces se puede obtener las siguientes inclusiones:

$$M^\epsilon_{eff} \subset M_{eff} \subset M_{weff}$$

Ahora consideraremos las tres parametrizaciones siguientes ($\mu \in I\!R^L$ representará siempre al vector parámetro).

Primera parametrización

Consideremos la siguiente función objetivo:

$$s(f(x),\mu) = \max \lambda_i^0 (f_i(x) - \mu_i) + \delta \sum_{i=1}^{L} \lambda_i^0 (f_i(x) - \mu_i), \tag{1.8}$$

donde $\lambda \in \Lambda := \left\{ \lambda \in I\!R^L \,|\lambda_k > 0, k = 1,\ldots,L \right\}$ y $\delta \in (0,1)$ son fijas y $\delta < \epsilon$.

Sea $\psi_1(\mu)(\psi_{1,\mathrm{loc}}(\mu))$ el conjunto de todos los mínimos globales (locales) de

$$\min\{s(f(x),\mu) \mid x \in M\}, \quad \mu \in I\!R^L \tag{1.9}$$

Entonces (1.9) posee la propiedad

$$\bigcup_{\mu \in I\!R^L} \psi_1(\mu) \subset M_{eff}, \quad \left(\bigcup_{\mu \in I\!R^L} \psi_{1,\mathrm{loc}}(\mu) \subset M_{loceff} \right). \tag{1.10}$$

La clausura del primer miembro de la inclusión en (1.10) tiende a M_{eff} cuando $\epsilon \mapsto 0$:

$$M_{eff}^{\epsilon} \subset \bigcup_{\mu \in f(M_{eff})} \{x \in \psi_{1,\mathrm{loc}}(\mu) \mid s(f(x),\mu) = 0\} \subset \bigcup_{\mu \in I\!R^L} \psi_1(\mu), \tag{1.11}$$

$$\left(M_{loceff}^{\epsilon} \subset \bigcup_{\mu \in f(M_{loceff})} \{x \in \psi_{1,\mathrm{loc}}(\mu) \mid s(f(x),\mu) = 0\} \subset \bigcup_{\mu \in I\!R^L} \psi_1(\mu) \right) \tag{1.12}$$

Hacemos notar que $s(f(\cdot),\mu)$, definida por (1.8), no es diferenciable y, por lo tanto, no es adecuada para nuestras aplicaciones. Sin embargo, tomando una variable adicional v, es posible transformar (1.9) en un problema diferenciable de parámetro $\mu \in I\!R^L$:

$$P_1(\mu):\ \min \left\{ \delta \sum_{i=1}^{L} \lambda_i^0 (f_i(x) - \mu_i) + v \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in M, \lambda_i^0 (f_i(x) - \mu_i) - v \leq 0 \\ i = 1,\ldots,L \end{array} \right\} \tag{1.13}$$

siempre que las funciones de (MO) sean diferenciables.

Segunda parametrización

$$P_2(\mu):\ \min\left\{\sum_{k=1}^{L}\lambda_k^0 f_k(x)\,|x\in M,-f_k(x)\geq-\mu_k,k=1,\ldots,L\right\},\ \mu\in I\!R^L,$$

donde al igual que en la parametrización anterior $\lambda^0\in\Lambda$ es arbitrario pero fijo.

Si denotamos con $\psi_2(\mu)(\psi_{2,\mathrm{loc}}(\mu))$ al conjunto de todos los mínimos globales (locales) de $P_2(\mu)$, es conocida la relación siguiente:

$$M_{eff}=\bigcup_{\mu\in I\!R^L}\psi_2(\mu),\quad \left(M_{loceff}=\bigcup_{\mu\in I\!R^L}\psi_{2,\mathrm{loc}}(\mu)\right). \tag{1.14}$$

(cf. e.g. [64]).

<u>*Tercera parametrización*</u>

$$P_3(\mu):\qquad \min\left\{v\mid(x;v)\in M_3(\mu)\right\},\quad \mu\in I\!R^L,$$

donde

$$M_3(\mu):=\{(x,v)\in I\!R^n\times I\!R\mid x\in M,-f_k(x)+v\geq 0,\ k=1,\ldots,L\}$$

Denotamos con $\tilde{\psi}_3(\mu)(\tilde{\psi}_{3,\mathrm{loc}}(\mu))$ al conjunto de todos los mínimos globales (locales) de $P_3(\mu)$ y definimos

$$\begin{aligned}\psi_3(\mu)&:=\left\{x\in I\!R^n\mid\exists v\in I\!R:(x,v)\in\tilde{\psi}_3(\mu)\right\},\\ \Big(\psi_{3,loc}(\mu)&:=\left\{x\in I\!R^n\mid\exists v\in I\!R:(x,v)\in\tilde{\psi}_{3,loc}(\mu)\right\}\Big).\end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\bigcup_{\mu\in I\!R^L}\psi_3(\mu)=M_{weff}\qquad\left(\bigcup_{\mu\in I\!R^L}\psi_{3,\mathrm{loc}}(\mu)=M_{locweff}\right). \tag{1.15}$$

Las relaciones (1.10), (1.14) y (1.15) muestran que podemos utilizar los problemas de optimización paramétrica $P_i(\mu),i=1,2,3,$ para la computación de puntos de interés (por ejemplo puntos eficientes, etc.). Desde luego existe otro tipo de parametrizaciones.

Resaltamos el hecho de que las parametrizaciones $P_i(\mu),i=1,2,3$ representan problemas de tipo multiparamétrico. En nuestro enfoque

$\underline{f_1}$	$f_1(x^k)$	$\frac{f_1(x^k)-\underline{f_1}}{\lvert\underline{f_1}\rvert} \times 100$
$\underline{f_i}$	$f_i(x^k)$	$\frac{f_i(x^k)-\underline{f_i}}{\lvert\underline{f_i}\rvert} \times 100$
$\underline{f_L}$	$f_L(x^k)$	$\frac{f_L(x^k)-\underline{f_L}}{\lvert\underline{f_L}\rvert} \times 100$

Tabla 1.3:

[64] reducimos dichos problemas a una secuencia de problemas uniparamétricos, la cual es generada por un procedimiento interactivo. Eso se puede lograr tomando puntos adecuados μ^0 y μ^1 junto con el segmento que los conecta $\{\mu \in I\!R^L \mid \mu^0 + t(\mu^1 - \mu^0\}, t \in [0,1]$. Con esto obtenemos problemas uniparamétricos

$$P_i(t) := P_i(\mu^0 + t(\mu^1 - \mu^0)), \quad t \in [0,1],\ i = 1,2,3.$$

En lo que sigue trataremos de explicar con mayor precisión de qué modo obtenemos los puntos μ^0 y μ^1. Sea x^k un punto eficiente dado (resp. localmente eficiente, etc.). Consideremos una descripción tipo pantalla dada por la Tabla 1.3 . La información más importante está dada por los valores de la función objetivo, en los puntos x^k, en relación con los valores dados por $\underline{f_i} = \inf\{f_i(x) \mid x \in M\},\ i = 1, \ldots, L$.

La tercera columna contiene el porcentaje de desviación de los valores actuales de la función objetivo $f_i(x^k)$, en comparación con las cotas inferiores $\underline{f_i}$. Es claro que a tales cantidades debe asígnárseles valores adecuados en los casos $\underline{f_i} = 0$ y $\underline{f_i} = -\infty$. Cuando el problema $\inf\{f_i(x) \mid x \in M\}$ es soluble, solo es posible lograr una buena aproximación de los $\underline{f_i}$, en general, en el caso convexo. Para otros casos solamente se logra encontrar mínimos locales.

En la toma de decisiones se debe responder a las siguientes preguntas interactivamente:

(a) ¿ Cuáles $f_i,\ i = 1, \ldots, L$ se desea mejorar?. Denotemos con

$K \subset \{1, \ldots, L\}$ el correspondiente subconjunto de índices.

(b) ¿ Cuáles metas a_j son deseables para f_i, $i \in K$?

(c) ¿ Cuáles cotas superiores $\bar{a}_j$ son aceptables para f_j, $j \notin K$?

Al responder a las preguntas anteriores, el sujeto que toma las decisiones puede expresar sus deseos actuales. El control de la relación interactiva, en el sentido de realizar tales deseos, se puede lograr escogiendo $\mu_i^1 = a_i$ $(j = 1 \ldots, L)$. En el presente contexto $a_j = +\infty$ significa que la desigualdad correspondiente $f_j \leq \mu_j$ debe descartarse. El parámetro de partida μ^0 será escogido de modo que $f_i(x^k) \leq \mu_j^0$, $i = 1, \ldots, L$.

Desde luego, los problemas uniparamétricos no son otra cosa que los diferentes métodos de inmersión tratados en el Capítulo 7. Para ello debemos plantear las mismas interrogantes que ya hemos hecho antes. Para mayores detalles ver [64].

1.2.3 Un Problema de la Vida Real

A continuación describimos un ejemplo que ilustra un problema práctico: El despacho optimal de una estación termo-eléctrica en un período corto de tiempo.

El modelo (Ver [73]) puede utilizarse para la optimización de los costos de la generación de cargas en un sistema termo-eléctrico, en un período corto de tiempo (digamos, menos de una hora). El sistema global de generación puede, adicionalmente, integrar otros modos de generación, tales como energía hidro-eléctrica y plantas de almacenamiento. Pero aquí asumimos que la operación de los diversos modos son fijos de manera tal que el sistema, incluyendo desde luego las plantas térmicas, es capaz de satisfacer la demanda total de carga.

Asúmase que hay N unidades térmicas operando con capacidades limitadas superior e inferiormente. Denótese, con la variable x_i, la carga desconocida de la unidad i-ésima y, con $\underline{x}_i, \bar{x}_i$, las cotas de capacidad $(i = 1, \ldots, N)$. Se obtiene así

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.16}$$

Sea $a_i(x_i)$ la función (dada) de costo para la unidad i-ésima. Entonces el costo total para la generación de carga será

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x_i). \tag{1.17}$$

Definiendo $P_{min} := \sum_{i=1}^{N} \underline{x}_i$ y $P_{max} := \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i$ obtenemos que el supuesto de que las unidades en operación son capaces de satisfacer la demanda actual de carga equivale a la existencia de un $t \in [0,1]$ de modo tal que la demanda está dada por

$$P_{min} + t(P_{max} - P_{min}).$$

Las ecuaciones de balance entre la generación y la demanda son:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = P_{min} + t(P_{max} - P_{min}), \qquad t \in [0,1]. \tag{1.18}$$

Aquí $t \in [0,1]$ representa un parámetro que corresponde a los diferentes valores de la demanda actual. Las relaciones (1.16), (1.17) y (1.18) nos conducen al siguiente problema de optimización uniparamétrico.

$$P(t)\ \min \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i(x_i) \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{N} x_i = P_{min} + t(P_{max} - P_{min}), \\ \underline{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i, i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}, \ t \in [0,1].$$

Conviene observar que si la función objetivo $\sum_{i=1}^{N} a_i(x_i)$ es estrictamente convexa, entonces existe una solución única $x(t)$ para todo $t \in [0,1]$ y $x(\cdot)$ es una función lineal a trozos (Ver p.e. [7]). En tal caso, aprovechando la estructura especial del problema, podemos utilizar un procedimiento sencillo.

Para terminar, referimos al lector a otras áreas de la matemática aplicada:

- optimización estocástica (Ver p.e. [29, 30, 64, 105, 158, 161]).
- problemas de optimización multi-nivel, los cuales aparecen particularmente en conexión con métodos de descomposición (Ver p.e. [186, 187]).

- optimización semi-infinita, relacionada con optimización multi-paramétrica (finito dimensional) (Ver p.e. [79, 102, 103, 98, 86, 97]).
- optimización tipo input (Ver p.e. [197]).

Capítulo 2

Criterios de optimalidad sobre $I\!R^n$ y $I\!H^n$

En este capítulo presentaremos condiciones de optimalidad para los problemas que tengan como conjunto de factibilidad a $I\!R^n$, a $I\!H^n$ o a $I\!R^p \times I\!H^q$. Utilizaremos , naturalmente, los resultados obtenidos en estos problemas para obtener criterios análogos en problemas más complejos.

Definición 2.1
Sea $f : I\!R^n \mapsto R$, $M \subset I\!R^n$. Un punto $\bar{x} \in M$ se llama mínimo local de $f \mid_M$, si existe una vecindad abierta U de $\bar{x}$ tal que , $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in U \cap M$. Si dicha vecindad puede ser escogida tal que $f(x) > f(\bar{x})$ para todo $x \in U \cap M$, $x \neq \bar{x}$, entonces $\bar{x}$ será un mínimo local estricto para $f \mid_M$. Si U puede ser tomada como $I\!R^n$, entonces $\bar{x}$ es un mínimo global de $f \mid_M$.

Observación 2.2
Un punto $\bar{x}$ se llama máximo (local, global estricto, global) de $f \mid_M$, si $\bar{x}$ es un mínimo (local, global estricto, global) de $(-f) \mid_M$

Respecto a la existencia de mínimos ó máximos señalamos el conocido Teorema de Weierstrass.

Teorema 2.3 *(K. Weierstrass)*
Sea $M \subset I\!R^n$, no vacío y compacto. Sea $f : I\!R^n \mapsto R$ una función continua. Existe entonces un $\bar{x} \in M$, tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in M$.

Primeramente analizaremos una condición necesaria de optimalidad cuando $M = I\!R^n$. Para ello consideramos en $I\!R^n$ la norma euclideana ($\|x\|^2 = x^\top x$). Además de esto designaremos por $C^k(I\!R^n, I\!R)$ al espacio de todas las funciones , que son k-veces contínuamente diferenciables. Designaremos con $C^0(I\!R^n, I\!R)$ y $C(I\!R^n, I\!R)$ el espacio de las funciones continuas.

Si $f \in C^1(I\!R^n, I\!R)$ entonces $Df(x)$ denotará el vector fila de las derivadas parciales evaluadas en x. De forma análoga se define $C^k(U, V)$ si U y V son abiertos de $I\!R^n$, $I\!R^m$ respectivamente. En ocasiones escribiremos $f \in C^k$, si U y V están fuera de duda.

Teorema 2.4 *(Condiciones necesarias de 1er orden sobre $I\!R^n$)*
Sea $f \in C^1(I\!R^n, I\!R)$ y $\bar{x} \in I\!R^n$ un mínimo local de f. Se tiene entonces que $Df(\bar{x}) = 0$.

Demostración:
Supongamos que $Df(\bar{x}) \neq 0$. Existe entonces $\xi \in I\!R^n$ tal que $\xi \neq 0$ y $Df(\bar{x})\xi = \alpha < 0$. (Por ejemplo $\xi = -Df(\bar{x})^\top$).

Construyamos con un tal ξ la siguiente función auxiliar.

$$\Phi(t) = f(\bar{x} + t\xi) \tag{2.1}$$

Notemos que $\Phi'(t) = Df(\bar{x} + t\xi)\xi$. Mediante el desarrollo de Taylor de Φ obtenemos que si $t \neq 0$:

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \Phi'(0)t + o(|t|) = \Phi(0) + t[\,\Phi'(0) + \frac{o(|t|)}{t}\,] \tag{2.2}$$

Como $\frac{o(|t|)}{t} \to 0$ si $t \to 0$, y $\Phi'(0) = Df(\bar{x})\xi = \alpha < 0$, se obtiene que existe $\bar{t} > 0$ con $\Phi'(0) + \frac{o(|t|)}{t} \leq \frac{\alpha}{2}$ $\quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$. Ademas, $\Phi(t) \leq \Phi(0) + \frac{1}{2}\alpha t$ para $t \in (0, \bar{t})$, de (2.2). Finalmente:

$$\Phi(t) < \Phi(0) \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$$

dado que $\alpha < 0$, o, lo que es igual,

$$f(\bar{x} + t\xi) < f(\bar{x}) \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$$

Sin embargo, lo anterior contradice que $\bar{x}$ sea mínimo local para f. $\square$

Observación 2.5
En la demostración del Teorema 2.4 hemos probado realmente que si $\bar{x}$ es mínimo local de $f \in C^1(I\!\!R^n, I\!\!R)$, entonces $Df(\bar{x})\xi \geq 0 \,\forall\, \xi \in I\!\!R^n$. Mas aún, podemos notar que hemos probado la desigualdad para los ξ que son direcciones factibles. La misma idea será usada en el Teorema 2.6.

Denotaremos por $I\!\!H^n$ al siguiente conjunto

$$I\!\!H^n = \{\, x \in I\!\!R^n \mid x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n \,\}$$

Veamos a continuación una condición necesaria de optimalidad para el origen $x = 0$ en $I\!\!H^n$.

Teorema 2.6 *(Condiciones necesarias de 1er orden sobre $I\!\!H^n$)*
Sea $f \in C^1(I\!\!R^n, I\!\!R)$ y sea $0 \in I\!\!H^n$ un mínimo local de $f|_{I\!\!H^n}$. Se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) \geq 0,\; i = 1, \ldots, n, \quad (Df(0) \in I\!\!H^n)$$

<u>Demostración:</u>
Supongamos que exista un índice $j \in \{1, \ldots, n\}$, en el cual se cumpla que $Df(0)e_j = \alpha < 0$. Aquí e_j es el vector que tiene todas sus componentes iguales a 0, excepto la j-ésima que vale 1.

Esta claro que $\forall\, t \geq 0$ se cumple que $te_j \in I\!\!H^n$.

Consideremos la función $\phi(t) = f(0 + te_j)$. De nuevo el desarrollo de Taylor nos lleva a:

$$\phi(t) = \phi(0) + t[\,\phi'(0) + \frac{o(|t|)}{t}\,] \tag{2.3}$$

Como $\phi'(0) = Df(0)e_j = \alpha < 0$, existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$\phi(t) \leq \phi(0) + \frac{1}{2}\alpha t \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$$

usando lo anterior en (2.3) obtenemos $\phi(t) < \phi(0) \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$.

Lo cual indica que $f(te_j) < f(0), \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$

Lo anterior contradice que $x = 0$ sea mínimo local de $f|_{I\!\!H^n}$, pues $te_j \in I\!\!H^n$ si $t \geq 0$ y $te_j \to 0$ si $t \to 0$.

Por lo tanto $Df(0)e_j \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, o lo que es igual

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(0) \geq 0,\ j = 1, \ldots, n, \quad \square$$

Observación 2.7
Notemos que la misma demostración del Teorema 2.6 nos sirve para probar que si $x = 0$ es mínimo de $f|_{\mathbb{H}^n}$, entonces $\forall\, \xi \in \mathbb{H}^n$ $Df(0)\xi \geq 0$.

Teorema 2.8 *(Condiciones necesarias de 1er orden sobre $\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$)*
Sea $n = p + q$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $x = 0$ un mínimo local de $f|_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q}$. Se cumple entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) &= 0, \quad i = 1, \ldots, p \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f(0) &\geq 0, \quad j = p+1, \ldots, n \end{aligned}$$

Demostración:
Como $x = 0$ es mínimo local de $f|_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q}$, existe U (vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$) tal que $f(x) \geq f(0) \quad \forall\, x \in U \cap \mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$. Pero entonces $f(x) \geq f(0) \quad \forall\, x \in U \cap \mathbb{R}^p \times \{0_q\}$. Consideremos ahora la función

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

(Notemos que $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$), y consideremos además todos los puntos de $(U \cap \mathbb{R}^p \times \{0_q\})$ proyectados sobre las primeras p componentes. Este conjunto resultará una vecindad de cero en $\mathbb{R}^p$. Tendremos entonces que $0 \in \mathbb{R}^p$ será mínimo local de $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^p}$.

Por lo tanto usando el Teorema 2.4 obtenemos que

$$D\tilde{f}(0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, p$$

Análogamente, si consideramos $\bar{f}(x_1, \ldots, x_q) = f(0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_q)$, entonces $\bar{f} \in C^1(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$. Por otra parte, si proyectamos los puntos de $U \cap \{0_p\} \times \mathbb{H}^q$ sobre sus últimas $n - p$ componentes a través de una aplicación

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

entonces $(U \cap \{0_p\} \times \mathbb{H}^q)$ se transforma por T en la intersección de una vecindad del cero con $\mathbb{H}^q$. De aquí obtenemos que cero es un mínimo local de $\bar{f}|_{\mathbb{H}^q}$. Y usando el Teorema 2.6 se llega a que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{f}(0) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, q \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} f(0) \geq 0, \quad j = p+1, \ldots, n \quad \Box$$

Hemos presentado las condiciones necesarias de 1er orden (Solo aparece involucrada la primera derivada) para problemas definidos sobre los conjuntos $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$. Pasaremos en lo siguiente a condiciones necesarias de 2do orden (Con uso de segundas derivadas).

Para $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ construimos la siguiente matriz de tamaño $n \times n$.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x)\right]_{i,j=1,\ldots,n}$$

Denotamos a esta matriz por $D^2 f(x)$. Observamos que la así llamada hessiana de f es una matriz simétrica.

Definición 2.9
Sea A una matriz, $n \times n$, simétrica. A es definida positiva (negativa), si $x^\top A x > 0$ (< 0) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Se dice que A es semidefinida positiva (negativa) si $x^\top A x \geq 0$ (≤ 0) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.10
Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un mínimo local de f. Se cumple entonces que $Df(\bar{x}) = 0$ y que $D^2 f(\bar{x})$ es semidefinida positiva.

Demostración:
Del Teorema 2.4 se tiene que $Df(\bar{x}) = 0$.

Supongamos que $D^2 f(\bar{x})$ no sea semidefinida positiva, entonces existe $\xi \neq 0$ tal que $\xi^\top\ D^2 f(\bar{x})\xi = \alpha < 0$.

Tomemos $\phi(t) = f(\bar{x} + t\xi)$. Desarrollando la serie de Taylor de la función ϕ en $t = 0$ tenemos que:

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \phi''(0)t^2 + o(t^2) \qquad (2.4)$$

Pero $\phi'(t) = Df(\bar{x} + t\xi)\xi = \xi^\top D^\top f(\bar{x} + t\xi)$, de donde ,

$$\phi''(t) = \xi^\top D^2 f(\bar{x} + t\xi)\xi$$

Y por lo tanto $\phi'(0) = 0$ y $\phi''(0) = \xi^{\mathsf{T}} D^2 f(\bar{x})\xi = \alpha < 0$.

De (2.4) se sigue que:

$$\phi(t) = \phi(0) + t^2[\ \phi''(0) + \frac{o(t^2)}{t^2}\ ]$$

Usando la misma técnica del Teorema 2.4 podemos llegar a

$$\phi(t) < \phi(0) \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$$

lo cual contradice que $\bar{x}$ sea mínimo local. □

Veamos un último criterio necesario de optimalidad.

Teorema 2.11
Sea $n = p+q$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$ mínimo local de $f|_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{H}^q}$. Se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(0) & = & 0, \quad i = 1, \ldots, p \\ \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0)\right]_{i,j=1,\ldots,p} & & \textit{es semidefinida positiva} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_j} f(0) & \geq & 0, \quad j = p+1, \ldots, n \end{array}$$

Demostración:
Usando las ideas y proyecciones del Teorema 2.8 obtenemos la condición señalada usando en el caso $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^p}$ el Teorema 2.10. □

Hemos completado el camino de las condiciones necesarias. Veamos ahora las condiciones suficientes de 1er y 2do orden para $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$.

Tomemos las siguientes notaciones:

$$\begin{array}{rcl} B(\bar{x}, r) & = & \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - \bar{x}\| \leq r\} \\ \overset{o}{B}(\bar{x}, r) & = & \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - \bar{x}\| < r\} \end{array}$$

Teorema 2.12 *:(Condiciones suficientes de 1er orden para $\mathbb{H}^n$)*
Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces existe una vecindad U de $x = 0$ y un $\delta > 0$, tales que:

$$f(x) \geq f(0) + \delta\,(\sum_{i=1}^{n} x_i\,) \quad \forall\, x \in U \cap \mathbb{H}^n \tag{2.5}$$

De donde $0 \in \mathbb{H}^n$ es un mínimo local estricto de $f|_{\mathbb{H}^n}$.

Demostración:
Las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x), i = 1, \ldots, n$ son continuas , pues $f \in C^1(I\!R^n, I\!R)$.

Como $\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, tomemos un valor δ, tal que $\min_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) > \delta > 0$ existen entonces valores $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ tales que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \geq \delta > 0, \quad \forall\, x \in B(0, r_i)$$

Tomando $r = \min_{i=1,\ldots,n} r_i$, entonces $r > 0$, $\delta > 0$ y se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \geq \delta > 0, \quad \forall\, x \in B(0, r)$$

Para $x \in B(0, r)$ se tiene que $tx \in B(0, r) \quad \forall\, t \in [0, 1]$. Usando el teorema fundamental del cálculo diferencial obtenemos que:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx) dt$$

Y aplicando la regla de la cadena

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx)\, x_i\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx) dt \qquad (2.6)$$

Si $x \in B(0, r)$ se tiene con (2.6) que $f(x) - f(0) \geq \delta \sum_{i=1}^{n} x_i$, y por lo tanto se obtiene (2.5), asumiendo a U como $\overset{o}{B}(0, r)$.

Como $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$ si $x \in I\!H^n \setminus \{0\}$, se tiene que $x = 0$ es mínimo local estricto de $f|_{I\!H^n}$. $\square$

Ahora daremos otra condición suficiente:

Teorema 2.13 *(Condición suficiente de 2do orden para $I\!R^p \times I\!H^q$). Sea $n = p + q$, $f \in C^2(I\!R^n, I\!R)$ y sean satizfechas las condiciones:*

I- $\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = 0$, $i = 1, \ldots, p$; $\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0)\right]_{i,j=1,\ldots,p}$ *es definida positiva*

II- $\frac{\partial}{\partial x_j} f(0) > 0$, $j = p + 1, \ldots, n$

Existe entonces una vecindad U de 0 y un $\delta > 0$, tales que:

$$f(x) \geq f(0) + \delta \|x\|^2 \quad \forall\, x \in U \cap (I\!R^p \times I\!H^q)$$

Es decir, $x = 0$ es un mínimo local estricto de $f|_{I\!R^p \times I\!H^q}$

Para la demostración de este teorema necesitamos tres lemas:

Lema 2.14
Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ *compacto y* $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. *Consideremos la variable* $z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *como* $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. *Denotemos por*

$$\phi(x) = \min_{y \in M} f(x, y) \quad ; \ \psi(x) = \max_{y \in M} f(x, y)$$

Se cumple que ϕ *y* ψ *son funciones continuas.*

Demostración:(del Lema 2.14)
Probemos la continuidad de ϕ.

Sea (x_k) una sucesión cualquiera con $x_k \to \bar{x}$. Debemos probar que $\phi(x_k) \to \phi(\bar{x})$.

Producto del Teorema 2.3 de Weierstrass podemos escoger (y_k) tales que $y_k \in M$ y $\phi(x_k) = f(x_k, y_k)$.

Supongamos que $\phi(x_k) \not\to \phi(\bar{x})$, ello implica que existe una subsucesión (x_{k_i}) de (x_k) y un $\epsilon > 0$ tales que:

$$\phi(x_{k_i}) \notin (\ \phi(\bar{x}) - \epsilon, \phi(\bar{x}) + \epsilon\ ) \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

La correspondiente sucesión (y_{k_i}) tendrá en M un punto límite $\bar{y}$, pero podemos suponer sin perder generalidad que $y_{k_i} \to \bar{y} \in M$. Tenemos entonces que $(x_{k_i}, y_{k_i}) \to (\bar{x}, \bar{y})$, lo cual implica, por la continuidad de f, que $f(x_{k_i}, y_{k_i}) \to f(\bar{x}, \bar{y})$. Usando (2.7) obtenemos finalmente que $f(\bar{x}, \bar{y}) \neq \phi(\bar{x})$. Esto implica que existe $\tilde{y} \in M$ tal que $f(\bar{x}, \tilde{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) - \alpha$, $\alpha > 0$. Producto de la continuidad de f, tenemos que a partir de cierto índice i_0

$$f(x_{k_i}, \tilde{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\alpha}{2}$$

Como $f(x_{k_i}, y_{k_i}) \leq f(x_{k_i}, \tilde{y}) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$f(x_{k_i}, y_{k_i}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\alpha}{2} \quad \text{para } i > i_0$$

Lo que contradice que $f(x_{k_i}, y_{k_i}) \to f(\bar{x}, \bar{y})$.

La demostración para ψ es análoga. □

Lema 2.15
Sea $x \in I\!R^p$, $y \in I\!R^q$ y $A : (x,y) \mapsto A(x,y)$ una aplicación continua de $I\!R^p \times I\!R^q$ al espacio lineal de las matrices simétricas de tamaño $p \times p$ (cada $a_{ij}(x,y)$ es continua). Además, sea $A(0,0)$ definida positiva.

Pongamos $\eta(x,y) = x^\top A(x,y)\, x$.

Entonces existe una vecindad $U \subset I\!R^p \times I\!R^q$ de 0 y un $\delta > 0$, tal que

$$\eta(x,y) \geq \delta \|x\|^2 \quad \forall\, (x,y) \in U \tag{2.8}$$

<u>Demostración:</u>(del Lema 2.15)
Notemos que $\eta(0,y) = 0$ cumpliéndose, en ese caso (2.8).

Sea pues $x \neq 0$. Se tiene la igualdad:

$$\eta(x,y) = \left[\left(\frac{x}{\|x\|} \right)^\top A(x,y) \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right] \|x\|^2$$

de donde obtenemos que

$$\eta(x,y) \geq \min_{\|\xi\|=1} \xi^\top A(x,y)\xi \|x\|^2 \tag{2.9}$$

La función $(\xi, x, y) \mapsto \xi^\top A(x,y)\xi$ es continua y el conjunto

$$\{\ \xi \in I\!R^n \,|\, \|\xi\| = 1\ \}$$

es compacto y no vacío. Por ende la aplicación

$$\phi(x,y) = \min_{\|\xi\|=1} \xi^\top A(x,y)\xi$$

es continua según el Lema 2.14. Finalmente, como $A(0,0)$ es definida positiva, se tiene que $\phi(0,0) = c > 0$. Por lo tanto, existe una vecindad U de $(0,0)$ tal que

$$\phi(x,y) \geq \frac{c}{2} > 0 \quad \forall\, (x,y) \in U$$

Si tomamos $\delta = \frac{c}{2}$ y usamos (2.9) obtenemos (2.8). □

Lema 2.16
Sea $g : I\!R^n \mapsto I\!R$ continua con $g(0) > 0$. Entonces existe para cada $\delta > 0$ una vecindad $U_\delta \subset I\!R^n$ de 0, tal que $\forall\, i = 1, \ldots, n$

$$x_i\, g(x) \geq \delta x_i^2 \quad \forall\, x \in U_\delta \quad \text{con } x_i \geq 0.$$

Demostración: (del Lema 2.16)
Sea $\delta > 0$ cualquiera. Tenemos que $\phi_i(x) = g(x) - \delta x_i$ son funciones continuas para $i = 1, \ldots, n$. Además $\phi_i(0) = g(0) > 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$. Existe por lo tanto una vecindad U_δ, en la cual todas las ϕ_i , se mantienen positivas, o sea:

$$\phi_i(x) > 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \text{y} \quad \forall\, x \in U_\delta$$

lo cual significa que $g(x) > \delta x_i$.

Al multiplicar por $x_i \geq 0$, obtenemos que

$$x_i\, g(x) \geq \delta\, x_i^2 \quad \forall\, x \in U_\delta \quad \text{con}\, x_i \geq 0 \quad \square$$

Demostración: (del Teorema 2.13)
De acuerdo a (2.6) tenemos que

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(x), \quad \text{donde}$$

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx)dt \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.10}$$

Como $f \in C^2$ se tiene que $g_i \in C^1$, $i = 1, \ldots, n$. Además, de (2.10) tenemos que.

$$g_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) \quad i = 1, \ldots, n$$

Usando la hipótesis I obtenemos que $g_i(0) = 0, i = 1, \ldots, p$.

Usando de nuevo (2.6) pero sobre las g_i obtenemos que:

$$g_i(x) - g_i(0) = g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_{ij}(x), \quad i = 1, \ldots, p \tag{2.11}$$

Como $g_i \in C^1$, entonces $h_{ij} \in C^0$, $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, n$. Sustituyendo (2.11) en la expresión de $f(x)$, obtenemos que:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x) + \sum_{i=p+1}^{n} x_i g_i(x)$$

Redefiniendo

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ij} &= \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}),\ i,j = 1,\ldots,p \\ \tilde{g}_j(x) &= g_j(x) + \sum_{i=1}^{p} x_i h_{ij}(x),\ j = p+1,\ldots,n\end{aligned}$$

obtenemos que $\tilde{h}_{ij}$, $\tilde{g}_j \in C^0$ y que

$$f(x) = f(0) + \sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j \tilde{h}_{ij}(x) + \sum_{j=p+1}^{n} x_j \tilde{g}_j(x).$$

Nótese que:

$$\tilde{g}_j(0) = g_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(0) > 0 \quad j = p+1,\ldots,n \quad \text{y que}$$

$$\left[\tilde{h}_{ij}(0)\right]_{i,j=1,\ldots,p} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0)\right]_{i,j=1,\ldots,p}$$

es una matriz definida positiva.

Mediante el Lema 2.15 obtenemos que existe una vecindad U_1 del $0 \in \mathbb{R}^n$ y un $\delta > 0$ tales que:

$$\sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j \tilde{h}_{ij}(x) \geq \delta \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \quad \forall\, x \in U_1$$

Del Lema 2.16 tenemos que para el δ anterior existe una vecindad U_2 del $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que si $x_i \geq 0, i = p+1,\ldots,n$, se tiene que

$$x_i\, \tilde{g}_i(x) \geq \delta x_i^2 \quad \forall\, x \in U_2 \text{ con } x_i \geq 0\ i = p+1,\ldots,n$$

Por lo tanto si $x \in (U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$

$$f(x) \geq f(0) + \delta \|x\|^2$$

Lo anterior prueba sin duda que $x = 0$ es un mínimo local estricto de $f|_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q}$. $\square$

Con relación a las condiciones necesarias de 1er orden , para el problema sobre $\mathbb{R}^n$, (o, en general sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$), damos la definición siguiente:

Definición 2.17
Un punto $\bar{x} \in I\!R^n$ se llama crítico de f si $Df(\bar{x}) = 0$.

En lo que resta de este capítulo serán introducidos distintos conceptos y resultados preparatorios para los restantes capítulos.

Definición 2.18
Sean U y $V \subset I\!R^n$ conjuntos abiertos. Se dice que una aplicación biyectiva $F : U \mapsto V$ es un C^k-difeomorfismo ($k \geq 1$) si $F \in C^k(U, V)$ y también $F^{-1} \in C^k(V, U)$. (En tal caso se dice que U dispone de un nuevo sistema de coordenadas V, a través de la transformación de coordenadas F).

Teorema 2.19
Sea $f \in C^2(U, I\!R)$. Sea $\Phi : U \mapsto V$ un C^2-difeomorfismo. Tenemos que

a) *Si $Df(\bar{x}) = 0$ entonces se cumple que:*

$$D(f \circ \Phi^{-1})(\bar{y}) = 0, \text{ con } \bar{y} = \Phi(\bar{x}) \tag{2.12}$$

$$D^2(f \circ \Phi^{-1})(\bar{y}) = D^\top \Phi^{-1}(\bar{y}) D^2 f(\bar{x}) D\Phi^{-1}(\bar{y}) \tag{2.13}$$

b) *Aún si Φ es solamente un C^1-difeomorfismo se mantienen válidas las igualdades (2.12) y (2.13).*

En la demostración de este teorema se hará uso de la siguiente norma matricial

$$|||A||| = \sup_{\|\xi\|=1} \|A\xi\|$$

y se empleará también las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq |||A||| \|x\| \\ |||AB||| &\leq |||A||| \, |||B||| \end{aligned}$$

<u>Demostración:</u>
Si Φ es un C^1-difeomorfismo, tenemos que:

$$D(f \circ \Phi^{-1})(y) = Df(\Phi^{-1}(y)) D\Phi^{-1}(y) \tag{2.14}$$

Por lo tanto si $Df(\bar{x}) = 0$, entonces tomando $y = \bar{y} = \Phi(\bar{x})$ en (2.14) obtenemos (2.12).

Si Φ es un C^2-difeomorfismo, entonces $Df(\Phi^{-1}(y))D\Phi^{-1}(y) \in C^1$, y diferenciando nuevamente , obtenemos que

$$\begin{aligned} D^2(f \circ \Phi^{-1})(y) &= D^2\Phi^{-1}(y)D^{\mathsf{T}}f(\Phi^{-1}(y)) + \\ & \quad D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y)D^2f(\Phi^{-1}(y))D\Phi^{-1}(y) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Tomando en (2.15) $y = \bar{y}$ y teniendo en cuenta la hipótesis de que $Df(\Phi^{-1}(\bar{y})) = Df(\bar{x}) = 0$ se obtiene (2.13).

Si Φ es solo una C^1-transformación de coordenadas entonces $D\Phi^{-1}(y)$ es solo una función continua en V.

Como $Df(\bar{x}) = 0$, tenemos (2.12). Por lo tanto, solo debemos probar que la aplicación:

$$D^{\mathsf{T}}(f \circ \Phi^{-1})(y) = D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y)D^{\mathsf{T}}f(\Phi^{-1}(y)) : V \mapsto I\!R^n$$

es diferenciable en $\bar{y}$ y que la diferencial está dada precisamente por

$$D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(\bar{y})D^2f(\bar{x})D\Phi^{-1}(\bar{y}).$$

O sea, debemos probar que:

$$\|D^{\mathsf{T}}(f \circ \Phi^{-1})(y) - D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(\bar{y})D^2f(\bar{x})D\Phi^{-1}(\bar{y})(y - \bar{y})\| = o(\|y - \bar{y}\|) \tag{2.16}$$

Teniendo en cuenta que la aplicación $D^{\mathsf{T}}f \circ \Phi^{-1}(y)$ es diferenciable y desarrollándola por Taylor en $\bar{y}$ tenemos que:

$$D^{\mathsf{T}}f(\Phi^{-1}(y)) = D^2f(\bar{x})D\Phi^{-1}(\bar{y})(y - \bar{y}) + o(\|y - \bar{y}\|) \tag{2.17}$$

Sustituyendo (2.17) en el miembro izquierdo de (2.16) y definiendo la aplicación

$$W(y) = (D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y) - D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(\bar{y}))(D^2f(\bar{x})D\Phi^{-1}(\bar{y}))(y - \bar{y})$$

este queda como

$$\|W(y) + D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y)o(\|y - \bar{y}\|)\| \tag{2.18}$$

Pero:

$$\|W(y)\| \leq |||D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y) - D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(\bar{y})|||\ |||D^2 f(\bar{x}) D\Phi^{-1}(\bar{y})||| \|y - \bar{y}\| \tag{2.19}$$

Al dividir (2.19) por $\|y - \bar{y}\|$ tenemos que la parte derecha queda como una constante ($|||D^2 f(\bar{x}) D\Phi^{-1}(\bar{y})|||$) multiplicada por un valor que tiende a cero cuando $y \to \bar{y}$ ($|||D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y) - D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(\bar{y})|||$) pues $D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y)$ es continua ($\Phi^{-1} \in C^1$). Del anterior análisis obtenemos que:

$$\frac{\|W(y)\|}{\|y - \bar{y}\|} \to 0 \tag{2.20}$$

Por otro lado se cumple que:

$$\frac{\|D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y) o(\|y - \bar{y}\|)\|}{\|y - \bar{y}\|} \leq |||D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y)||| \frac{\|o(\|y - \bar{y}\|)\|}{\|y - \bar{y}\|} \tag{2.21}$$

La parte derecha de (2.21) es el producto de algo acotado ($|||D^{\mathsf{T}}\Phi^{-1}(y)|||$) ,pues $\Phi^{-1} \in C^1$, por un infinitésimo .

Con esto obtenemos el resultado deseado, pues usando la desigualdad triangular en (2.18) y las expresiones (2.20) y (2.21) llegamos a (2.16) y, por ende, a (2.13) de la afirmación b. □

El Teorema 2.19 nos dice, en esencia, que en un punto crítico la segunda derivada de la función, en las nuevas coordenadas, está dada por una matriz conjugada de la segunda derivada en las coordenadas originales.

Además, el Teorema de Sylvester (cf. [121]) nos permite deducir que, en el caso tratado (punto crítico), la cantidad de valores propios negativos , positivos o nulos se mantiene invariante bajo transformaciones de coordenadas. (Comparar con el Lema de Morse 4.3 del Capítulo 4, sobre el número de términos cuadráticos positivos y negativos).

Teorema 2.20 *(Teorema de Sylvester)*
Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ simétrica y real, y B una matriz real y regular, entonces

$$In(A) = In(B^{\mathsf{T}} AB)$$

donde $In(.) = (\#val.prop.negativos, \#val.prop.positivos, \#val.prop.0)$ *(In proviene de la palabra inglesa Inertia).*

Capítulo 3

Criterios de optimalidad sobre restricciones generales

Supondremos en lo que sigue que $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, s\}$ son conjuntos de índices finitos. En este capítulo trataremos sobre criterios de optimalidad para problemas de la forma $f|_M$, donde M posee la siguiente descripción

$$M = \{ \ x \in I\!R^n | \ h_i(x) = 0, \ i \in I, \ g_j(x) \geq 0, \ j \in J \ \} \tag{3.1}$$

Las funciones $h_i, \ i \in I$, son las llamadas restricciones de igualdad y las $g_j, \ j \in J$, restricciones de desigualdad .

Los conjuntos de la forma $M[h, g]$, son conjuntos muy generales, para nuestros propósitos en este capítulo, por lo cual introducimos una condición adicional que deben cumplir los conjuntos que usaremos.

Definición 3.1
Dado $M[h, g]$ descrito por 3.1

a) *El conjunto de índices activos en $\bar{x} \in M[h, g]$ se define por*

$$J_0(\bar{x}) = \{ \ j \in J | \ g_j(\bar{x}) = 0 \ \}$$

b) *Se dice que $M[h, g]$ satisface las condiciones de regularidad de independencia lineal en $\bar{x}$ (a lo cual nos referiremos en forma resumida como LICQ, proveniente de la expresión en inglés "linear* *independence constraint qualification") si el conjunto de vectores*

$$\{\ Dh_i(\bar{x}),\ i \in I,\ \ Dg_j(\bar{x}),\ j \in J_0(\bar{x})\ \}$$

es linealmente independiente. Cuando $M[h,g]$ cumple LICQ en todo punto $x \in M[h,g]$ decimos que se cumple LICQ sobre M.

Por argumentos de continuidad se puede notar que LICQ se cumple, junto con $\bar{x}$, en toda una vecindad de $\bar{x}$ interceptada con M.

El siguiente teorema reduce la estructura local de $M[h,g]$, a través de un cambio de coordenadas, a la estructura estudiada en el capítulo anterior.

Teorema 3.2
Sea $k \geq 1$, $h_i, g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$. Sea $\bar{x}$ un punto en el cual $M[h,g]$ cumple LICQ. Sea $p = |J_0(\bar{x})|$ y $m = |I|$.

Entonces existen vecindades abiertas U, V tales que $\bar{x} \in U$, $0 \in V$ y un C^k-difeomorfismo $\Phi : U \mapsto V$ con:

$$\Phi(\bar{x}) = 0 \quad y \quad \Phi(U \cap M) = V \cap (\{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p})$$

Donde 0_m es el origen de $\mathbb{R}^m$.

<u>Demostración:</u>
Sin perder generalidad, sea $J_0(\bar{x}) = \{1, \ldots, p\}$.

Escojamos vectores $\xi_{m+p+1}, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ que completen el sistema $\{\ D^\top h_i(\bar{x}),\ i \in I,\ \ D^\top g_j(\bar{x}),\ j \in J_0(\bar{x})\ \}$ a una base de $\mathbb{R}^n$.

Pongamos ahora

$$\begin{array}{rcll} y_i & = & h_i(x) & i = 1, \ldots, m \\ y_{m+j} & = & g_j(x) & j = 1, \ldots, p \\ y_k & = & \xi_k^\top (x - \bar{x}) & k = m+p+1, \ldots, n \end{array} \tag{3.2}$$

Y denotémoslo por $y = \Phi(x)$.

Notemos que $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\Phi(\bar{x}) = 0$ y que la matriz jacobiana $D\Phi(\bar{x})$ es:

$$D\Phi(\bar{x}) = \left[\begin{array}{c} Dh_i(\bar{x}) \quad i = 1, \ldots, m \\ Dg_j(\bar{x}) \quad j = 1, \ldots, p \\ \xi_k^\top \quad k = m+p+1, \ldots, n \end{array} \right] \tag{3.3}$$

Producto de la elección de los ξ_j, $j = m + p + 1, \ldots, n$, tenemos que $D\Phi(\bar{x})$ es no singular. Por el teorema de la función inversa tenemos entonces que existen vecindades abiertas U y V de $\bar{x}$ y $0 \in I\!R^n$, tales que $\Phi : U \mapsto V$ es un C^k-difeomorfismo.

Podemos reducir U de forma tal que $J_0(x) \subset J_0(\bar{x}), \quad \forall\, x \in U \cap M$. Obtenemos así que $U \cap M$ se describe en las nuevas coordenadas a través de las igualdades lineales $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ (reducción de la dimensión) y las desigualdades lineales $y_{m+1} \geq 0, \ldots, y_{m+p} \geq 0$ (formación de esquinas). $\square$

Al difeomorfismo definido en (3.2) lo llamaremos de ahora en adelante difeomorfismo standard. Mostraremos a continuación un lema preparatorio para obtener las condiciones de optimalidad de 1er y 2do orden para $f|_M$.

Lema 3.3
Sea $f \in C^1(I\!R^n, I\!R)$, $M[h,g]$ como en el Teorema 3.2. Sea $\bar{x} \in M[h,g]$ tal que se cumple LICQ. Sea además Φ el difeomorfismo standard de (3.2). Se cumple entonces que existen números $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_j$, $\bar{\delta}_k$ con:

a)

$$Df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j Dg_j(\bar{x}) + \sum_{k=m+p+1}^{n} \bar{\delta}_k \xi_k^{\top} \qquad (3.4)$$

b)

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i &= \frac{\partial}{\partial y_i}(f \circ \Phi^{-1})(0), \quad i = 1, \ldots, m \\ \bar{\mu}_{j-m} &= \frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ \Phi^{-1})(0), \quad j = m+1, \ldots, m+p \\ \bar{\delta}_k &= \frac{\partial}{\partial y_k}(f \circ \Phi^{-1})(0), \quad k = m+p+1, \ldots, n \end{aligned}$$

<u>Demostración:</u>
a) Se cumple debido a que

$$\left\{ Dh_i(\bar{x}),\, i \in I,\; Dg_j(\bar{x}),\, j \in J_0(\bar{x}),\; \xi_k^{\top},\; k = m+p+1, \ldots, n \right\}$$

es una base de $I\!R^n$. Se tiene además que los $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_j$, $\bar{\delta}_k$ son únicos.

b) Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(f \circ \Phi^{-1})(0) = Df(\bar{x})D\Phi^{-1}(0)e_1$$

Pongamos $D\Phi^{-1}(0)e_1 = \eta$. Se sigue que $e_1 = D\Phi(\bar{x})\eta$. De acuerdo a (3.3) tenemos que η es ortogonal a $D^\top h_2(\bar{x}), \ldots, \xi_n$ y, que $Dh_1(\bar{x})\eta = 1$.

Multiplicando (3.4) por η, tenemos que $Df(\bar{x})\eta = \bar{\lambda}_1$, y por lo tanto

$$\bar{\lambda}_1 = Df(\bar{x})D\Phi^{-1}(0)e_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}(f \circ \Phi^{-1})(0)$$

Las otras igualdades de b) se obtienen análogamente. □

Estamos preparados para presentar las condiciones necesarias de optimalidad del problema $f|_M$.

Teorema 3.4 *(Condiciones necesarias de optimalidad de 1er orden) Sean f, h_i, $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$. Sea $M[h,g]$ tal que cumpla LICQ en $\bar{x}$.*

Si $\bar{x}$ es mínimo local de $f|_{M[h,g]}$, entonces existen números $\bar{\lambda}_i$, $i \in I$ y $\bar{\mu}_j$, $j \in J_0(\bar{x})$ tales que:

a)

$$Df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{\mu}_j Dg_j(\bar{x}) \tag{3.5}$$

b) $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_j$ *son únicos.*

c)

$$\bar{\mu}_j \geq 0, \ j \in J_0(\bar{x}) \tag{3.6}$$

Demostración:

Tomamos el difeomorfismo standard Φ de acuerdo a (3.2). Notemos que $f \circ \Phi^{-1}|_{\{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}}$ tiene a $0 \in \{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}$ como mínimo local y, por tanto, $f \circ \Phi^{-1}(0, \ldots, 0, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ también posee a $0 \in \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}$ como mínimo local.

Usando el Lema 3.3 y el Teorema 2.8, tenemos que

$$\bar{\delta}_k = 0, \ k = m+p+1, \ldots, n \quad \text{y} \quad \bar{\mu}_j \geq 0, \ j \in J_0(\bar{x})$$

La unicidad de los $\bar{\lambda}_i$ y $\bar{\mu}_j$ se obtiene de LICQ. □

De acuerdo a este resultado y generalizando la Definición 2.17, podemos hacer la siguiente:

Definición 3.5
Sean $f,\, h_i,\, g_j \in C^1(I\!R^n, I\!R),\ i \in I,\ j \in J$ *y sea* $\bar{x} \in M[h,g]$. *El punto* $\bar{x}$ *se llama punto crítico de* $f|_{M[h,g]}$ *cuando existen números* $\bar{\lambda}_i,\ i \in I$ *y* $\bar{\mu}_j,\ j \in J_0(\bar{x})$ *que cumplen (3.5).*

Los números $\bar{\lambda}_i,\ i \in I,\ \bar{\mu}_j,\, j \in J_0(\bar{x})$ *se llaman multiplicadores de Lagrange y la función*

$$L(x) := f(x) - \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i h_i(x) - \sum_{j\in J_0(\bar{x})} \bar{\mu}_j g_j(x)$$

se denomina la función de Lagrange correspondiente.

Si $\bar{x}$ *es un punto crítico y los números* $\lambda_i,\ \mu_j$ *pueden escogerse tales que, además, se satizfaga (3.6), entonces* $\bar{x}$ *se llamará punto estacionario (o punto de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).*

Observación 3.6
Si no se cumple LICQ , entonces no necesariamente un mínimo local será un punto estacionario.

Como ejemplo considere el punto $0 \in I\!R^2$ *para el problema definido por*

$$f(x) = x_1,\ g_1(x) = x_2 - x_1^2,\ g_2(x) = 2x_1^2 - x_2,\ g_3(x) = x_1x_2$$

Para enunciar los criterios de optimalidad de 2do orden del problema $f|_M$ necesitamos introducir primero el concepto de espacio tangente y el de matriz restringida a un subespacio.

Definición 3.7
Sean $h_i,\, g_j \in C^1(I\!R^n, I\!R),\ i \in I,\ j \in J$ *y sea* $\bar{x} \in M[h,g]$ *un punto factible donde se satisface LICQ. El conjunto*

$$T_{\bar{x}}M = \{\ \xi \in I\!R^n |\ Dh_i(\bar{x})\xi = 0,\, i \in I,\ Dg_j(\bar{x})\xi = 0,\, j \in J_0(\bar{x})\ \} \tag{3.7}$$

se denomina espacio tangente a M *en* $\bar{x}$.

Teorema 3.8
Sea $k \geq 1$, $h_i, g_j \in C^k(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$ y sea $\bar{x} \in M[h,g]$ con LICQ. Se tiene entonces la siguiente caracterización del espacio tangente:

$$\xi \in T_{\bar{x}}M \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \text{ y una } C^k\text{-curva } x : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto I\!R^n, \text{ tales que:}$$

a) $x(0) = \bar{x}$

b) $h_i(x(t)) = g_j(x(t)) = 0,\ i \in I,\ j \in J_0(\bar{x}) \quad \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon)$

c) $\frac{d}{dt}x(0) = \xi$

<u>Demostración:</u>
"$\Leftarrow$"

Notemos que no es necesaria en esta implicación LICQ. Pues:

$$h_i(x(t)) = 0 \quad \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \text{luego}$$

$$Dh_i(\bar{x})\xi = \frac{d}{dt}h_i(x(0)) = 0, \quad i \in I$$

lo mismo ocurre con $g_j(x(t)),\ j \in J_0(\bar{x})$, luego $\xi \in T_{\bar{x}}M$.

"$\Rightarrow$"

Consideramos el difeomorfismo standard Φ (se necesita LICQ). Tenemos que si $\xi \in T_{\bar{x}}M$ entonces, usando (3.3), tenemos que:

$$e_k^{\mathsf{T}} D\Phi(\bar{x})\xi = 0,\ k \in I \cup J_0(\bar{x})$$

Definamos $\eta = D\Phi(\bar{x})\xi$ y $x(t) = \Phi^{-1}(0 + t\eta)$.

Como V es vecindad de $0 \in I\!R^n$, existe $\epsilon > 0$ para el cual se cumple que $\forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $0 + t\eta \in V$ y por ende $x(t) \in U$. Como además $\eta^{\mathsf{T}} e_k = 0,\ k \in I \cup J_0(\bar{x})$ tenemos que:

$$e_k\Phi(x(t)) = 0,\ t \in (-\epsilon, \epsilon),\ k \in I \cup J_0(\bar{x})$$

Por lo tanto:

$$h_i(x(t)) = 0 \quad \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon),\ i \in I$$

y

$$g_j(x(t)) = 0 \quad \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon),\ j \in J_0(\bar{x})$$

Por último

$$\frac{d}{dt}x(0) = D\Phi^{-1}(0)\eta = \xi \quad \text{y} \quad x(0) = \Phi^{-1}(0) = \bar{x} \quad \square$$

Observación 3.9
Notemos que $T_{\bar{x}}M$ es el subespacio ortogonal al subespacio vectorial generado por los vectores $\{\ Dh_i(\bar{x}),\ i \in I,\ Dg_j(\bar{x}),\ j \in J_0(\bar{x})\ \}$ y que el conjunto de vectores $\{\ D\Phi^{-1}(0)e_k,\ k = |I| + |J_0(\bar{x})| + 1, \ldots, n\ \}$ es una base de $T_{\bar{x}}M$, pues $D\Phi(\bar{x})D\Phi^{-1}(0) = I_n$

Definición 3.10
Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio lineal y A una matriz $n \times n$. A se dice definida positiva sobre T si $x^\top Ax > 0, \quad \forall\ x \in T, x \neq 0$. A se dice semidefinida positiva sobre T, si $x^\top Ax \geq 0, \quad \forall\ x \in T$.

Como última preparación a los criterios de optimalidad de 2do orden, necesitamos el

Lema 3.11
Sean f, h_i, $g_j \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$ y sea $\bar{x} \in M[h,g]$ donde se cumpla LICQ. Sea $\bar{x}$ un punto crítico de $f|_{M[h,g]}$ y sea L la función de Lagrange correspondiente.

Pongamos $g(y) = f \circ \Phi^{-1}(y)$, donde Φ es el difeomorfismo standard. Se cumple entonces que:

$$\tfrac{\partial}{\partial y_j}g(0) = 0, \quad j = m + p + 1, \ldots, n$$

$$\left(\tfrac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}g(0)\right)_{i,j=m+p+1,\ldots,n} = \left(\, e_i^\top \left(D^\top \Phi^{-1}(0)\right) D^2 L(\bar{x})\ \left(D\Phi^{-1}(0)\right) e_j \,\right)$$

<u>Demostración:</u>
Tenemos primeramente de (3.5) y la definición de $L(x)$ que:

$$DL(\bar{x}) = 0$$

Por otra parte si $h_i(x) = 0,\ i \in I,\ g_j(x) = 0,\ j \in J_0(\bar{x})$, entonces $f(x) = L(x)$, luego

$$g(0, \ldots, 0, y_{m+p+1}, \ldots, y_n) = L \circ \Phi^{-1}(0, \ldots, 0, y_{m+p+1}, \ldots, y_n)$$

Teniendo en cuenta el Teorema 2.19 obtenemos lo señalado. $\square$

Teorema 3.12
Sean f, h_i, $g_j \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$ y sea $\bar{x} \in M[h,g]$ un punto donde se cumpla LICQ. Supóngase además que $\bar{x}$ es un mínimo local para el problema $f|_M$

Se tiene entonces que $\bar{x}$ es un punto estacionario y que $D^2L(\bar{x})$ es semidefinida positiva sobre $T_{\bar{x}}M$, donde L es la función de Lagrange correspondiente.

Demostración:
Que $\bar{x}$ es un punto estacionario se obtiene del Teorema 3.4.

Usando el difeomorfismo standard tenemos que el $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ es un mínimo local del problema $\tilde{g}(y)|_{\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}}$, tomando a $\tilde{g}$ como $\tilde{g}(y) = f \circ \Phi^{-1}(0_m, y) = g(0_m, y)$.

Teniendo en cuenta el Teorema 2.11 obtenemos que la matriz

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\tilde{g}(0)\right]_{i,j=p+1,\ldots,n-m-p}$$

es semidefinida positiva y, por tanto, la matriz

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}g(0)\right]_{i,j=m+p+1,\ldots,n}$$

es también semidefinida positiva.

Si consideramos la matriz de tamaño $n \times (n-m-p)$

$$P = \left[\begin{array}{c} 0 \\ I_{n-m-p} \end{array}\right]$$

tenemos, usando el Lema 3.11 que

$$\left[\; P^{\mathsf{T}} \, (D^{\mathsf{T}} \Phi^{-1}(0)) \, D^2 L(\bar{x}) \, (D\Phi^{-1}(0)) \, P \;\right]_{n-m-p \times n-m-p}$$

es semidefinida positiva.

De acuerdo a la Observación 3.9 $D\Phi^{-1}(0)P$ es una matriz cuyas columnas forman una base de $T_{\bar{x}}M$. Luego si $v \in T_{\bar{x}}M$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m-p}$ tal que $v = D\Phi^{-1}(0)P\lambda$, por lo tanto $\forall\; v \in T_{\bar{x}}$

$$v^{\mathsf{T}} D^2 L(\bar{x}) v = \lambda^{\mathsf{T}} \, P^{\mathsf{T}} \, (D^{\mathsf{T}} \Phi^{-1}(0)) \, D^2 L(\bar{x}) \, (D\Phi^{-1}(0)) \, P \, \lambda \geq 0$$

Con esto hemos mostrado que $D^2L(\bar{x})$ es semidefinida positiva sobre $T_{\bar{x}}M$. $\square$

Por último tenemos la siguiente condición suficiente de 2do orden.

Teorema 3.13
Sean f, h_i, $g_j \in C^2(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$ y sea LICQ satisfecha en el punto $\bar{x} \in M[h,g]$. Sea $\bar{x}$ punto crítico de $f|_M$ con multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda}_i$, $i \in I$, $\bar{\mu}_j$, $j \in J_0(\bar{x})$ y función de Lagrange L.

Si se cumple que:

1) $\bar{\mu}_j > 0,\ j \in J_0(\bar{x})$

2) $D^2L(\bar{x})$ *es definida positiva sobre* $T_{\bar{x}}M$.

Entonces $\bar{x}$ es un mínimo local estricto de $f|_M$.

Demostración:
Comencemos tomando $g(y) = f \circ \Phi^{-1}(y)$ donde Φ es el difeomorfismo standard. Es obvio que si $g|_{\{0_m\}\times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p}}$ tiene a $y = 0$ como mínimo local estricto, entonces $f|_M$ tiene a $\bar{x}$ como mínimo local estricto, por la propiedad de Φ de ser difeomorfismo y porque se cumple que $\Phi(M \cap U) = V \cap (\{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p})$. Probemos ahora que $g|_{\{0_m\}\times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p}}$ tiene a $y = 0$ como mínimo local estricto.

Por el Lema 3.11.

$$\frac{\partial}{\partial y_j} g(0) = 0,\ j = m+p+1, \ldots, n.$$

Aplicando el Lema 3.3 obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} g(0) = \bar{\mu}_j > 0,\ j = m+1, \ldots, m+p.$$

Del Lema 3.11 y los razonamientos hechos en la demostración del teorema anterior sabemos que

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} g(0)\right]_{i,j=m+p+1,\ldots,n} = P^\top \left(D^\top \Phi^{-1}(0)\right) D^2L(\bar{x}) \left(D\Phi^{-1}(0)\right) P$$

Sea $\lambda \in I\!R^{n-m-p}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $D\Phi^{-1}(0)\, P\, \lambda \in T_{\bar{x}}M$ según la Observación 3.9. Luego

$$\lambda^\top P^\top \left(D^\top \Phi^{-1}(0)\right) D^2L(\bar{x}) \left(D\Phi^{-1}(0)\right) P\, \lambda > 0$$

pues $D^2L(\bar{x})$ es definida positiva sobre $T_{\bar{x}}M$. Por ende

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} g(0)\right]_{i,j=m+p+1,\ldots,n}$$

es definida positiva.

Disponemos pues de lo necesario para aplicar el Teorema 2.13 al problema $\tilde{g}(y) = g(0_m, y)|_{\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}}$, obteniendo de esta forma que $y = 0$ es un mínimo local estricto del problema $g(y)|_{\{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}}$ y, por ende, que $\bar{x}$ es mínimo local estricto del problema $f|_M$. $\square$

Capítulo 4

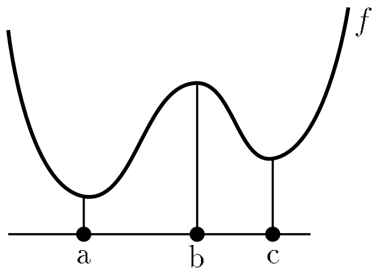
Teoría del punto crítico

En los capítulos 2 y 3 desarrollamos condiciones necesarias y suficientes para que un punto factible sea un mínimo local. En el caso sin restricciones la anulación de la derivada de la función objetivo es una condición necesaria. Tales puntos son denominados puntos críticos. Los puntos críticos son, por así decirlo, los elementos esenciales a partir de los cuales se compone una función diferenciable $f : I\!R^n \mapsto I\!R$. En general no se puede establecer arbitrariamente los puntos críticos: tan es así que, por ejemplo, en un espacio unidimensional debe aparecer siempre, entre dos mínimos locales, un máximo local (Ver Figura 4.1)

Tal situación remite a una conexión global de puntos críticos de diferente tipo o naturaleza. Este rompecabezas combinatorio es el objeto de este capítulo. En la sección 4.1 consideramos una función diferenciable, expresada en forma canónica, ya sea en la vecindad de un punto regular o en la vecindad de un punto crítico no degenerado.

Con ayuda de estas formas canónicas estudiaremos, en la sección 4.2, la configuración global de los puntos críticos. En la sección 4.3 serán introducidas restricciones. Ahí asumirán los puntos estacionarios el papel de los puntos críticos del caso sin restricciones.

Finalmente, consideraremos en la Sección 4.4 deformaciones contínuas de problemas de optimización, como un avance a las curvas críticas, las cuales ocuparán el lugar principal en los últimos capítulos. En particular, veremos de que modo mínimos locales pueden convertirse en puntos de ensilladura y como puede transformarse la estructura local de los conjuntos factibles. Para una apretada síntesis sobre este



a, c: Mínimos locales
b: Máximo local

Figura 4.1:

tema, con referencias en varias direcciones, remitimos a [100].

4.1 Formas canónicas: el caso sin restricciones

En esta sección estudiaremos el comportamiento local de una función diferenciable $f : I\!R^n \mapsto I\!R$ alrededor de un punto dado $\bar{x}$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\bar{x} = 0$.

Si utilizamos el desarrollo de Taylor de la función f alrededor del punto $\bar{x}$, obtenemos ($f \in C^k, k \geq 2$):

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}} D^2 f(0)x + o(\|\ x\ \|^2) \tag{4.1}$$

El valor de $f(0)$ no es relevante en relación con el comportamiento de f. Cuando $Df(0) \neq 0$, entonces prevalece el término lineal $Df(0)x$ sobre los términos de orden superior (cf. Teorema 4.1). Cuando $Df(0) = 0$ ($x = 0$ es un punto crítico) y la matriz hessiana $D^2 f(0)$ (la matriz simétrica de las derivadas parciales segundas) no es singular, entonces los términos de orden cuadrático dominan a los términos de orden superior. (cf. Teorema 4.3, Lema de Morse). Cuando $D^2 f(0)$ es singular las derivadas parciales de orden superior juegan un rol en el estudio del comportamiento local de la función f alrededor de $x = 0$. Cuales de dichas derivadas parciales juegan precisamente el papel predominante es menos claro; esto último es objeto de estudio de la teoría de singularidades (cf. [15, 3]). Nosotros nos ocuparemos aquí de los dos primeros casos.

Teorema 4.1 *(Forma canónica de un punto no crítico)*
Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *con* $f(0) = 0$ *y* $Df(0) \neq 0$. *Entonces existen conjuntos abiertos* $U, V \ni 0$ *y un* C^1*-difeomorfismo,* $\Phi\colon U \mapsto V$ *con* $\Phi(0) = 0$*, tal que*

$$f \circ \Phi^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 \tag{4.2}$$

<u>Demostración</u>:
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{\partial}{\partial x_1} f(0) \neq 0$ y definir $y = \phi(x)$ como

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x) \\ y_i &= x_i, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

De aquí se sigue que $\Phi \in C^1$, $\Phi(0) = 0$ y que

$$D\Phi(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} f & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \tag{4.4}$$

donde I_{n-1} es la $(n-1)$-matriz identidad. Se tiene de (4.4) que

$$det(D\Phi(0)) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(0) \neq 0$$

Con ello $D\Phi(0)$ es invertible y, por lo tanto, debido al teorema sobre la función inversa, Φ es localmente C^1-invertible. La forma canónica (4.2) se sigue inmediatamente de (4.3).$\Box$

En la Fig. 4.2 se ha representado gráficamente la anterior transformación de coordenadas.

Definición 4.2
Un punto crítico $x \in \mathbb{R}^n$ *(Definición 2.17) con* $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *se denomina no degenerado cuando la matriz hessiana* $D^2 f(x)$ *no es singular. En este caso el índice cuadrático* QI *(co-índice* CQI*) denota el número de valores propios negativos (positivos) de* $D^2 f(x)$.

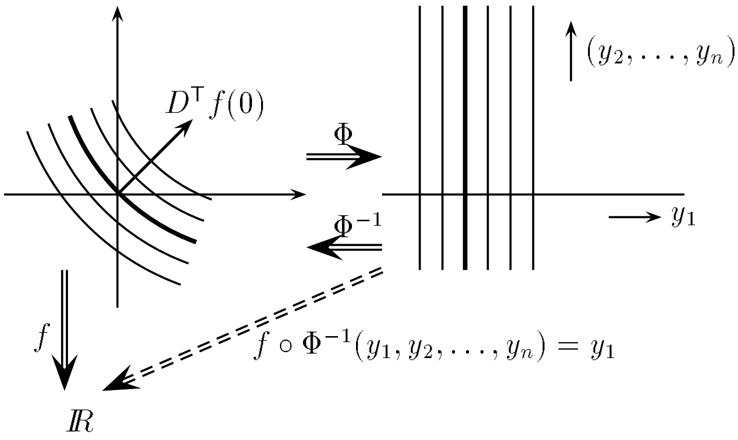


Figura 4.2:

Teorema 4.3 *(Lema de Morse: Forma canónica de un punto crítico no degenerado).*
Sea $f \in C^2(I\!R^n, I\!R)$, $f(0) = 0$ y sea $x = 0$ un punto crítico no degenerado. Supóngase además que exactamente k valores propios de la matriz hessiana $D^2 f(0)$ son negativos. Entonces existen conjuntos abiertos $U,V \ni 0$ y un C^1-difeomorfismo ,Φ: $U \mapsto V$ con $\Phi(0) = 0$, tal que

$$f \circ \phi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = -\sum_{i=1}^{k} y_i^2 + \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 \tag{4.5}$$

Para una función cuadrática f la prueba del Lema de Morse es fácil. De hecho, sea $f(x) = x^\top \mathbf{A} x$, con $\mathbf{A}$ una matriz simétrica (n,n). Entonces existen una matriz (n,n) ortogonal $\mathbf{Q}$ (cuyas columnas son vectores propios de $\mathbf{A}$) y una matriz diagonal Λ (cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de $\mathbf{A}$) tales que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \Lambda \qquad (\text{y } \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}) \tag{4.6}$$

Ponemos $y = \mathbf{Q}^\top x$, o sea, $x = \mathbf{Q} y$ y de aquí se sigue que:

$$f(x) = x^\top \mathbf{A} x = y^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{A} \mathbf{Q} y = y^\top \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

(con $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$).

Finalmente ponemos $z_i = \sqrt{|\lambda_i|}y_i$, $i = 1, \ldots, n$, y obtenemos que f adquiere la forma deseada $\sum_{i=1}^{n} \pm z_i^2$ en las coordenadas z.

Para la prueba del Teorema 4.3 basta entonces construir un C^1-difeomorfismo local Φ de modo que, localmente, valga:

$$\left(f \circ \Phi^{-1}(y) = y^{\top}\mathbf{A}y\right).$$

La fórmula de Taylor (4.1) insinúa la elección $\mathbf{A} = \frac{1}{2}D^2f(0)$. En la prueba del Teorema 4.3 compararemos la función $f(x)$ con la aproximación de Taylor $\frac{1}{2}x^{\top}D^2f(0)x$ (considere que $f(0) = 0$ y que $Df(0) = 0$). En una vecindad del origen $f(x)$ será transformada dinámicamente en su polinomio de Taylor (de segundo orden).

Tal tipo de enfoque es fundamental en la teoría de singularidades (cf. también [185]) y muestra de que modo las singularidades (puntos críticos) pueder ser deformadas con ayuda de una homotopía (una familia 1-paramétrica). En los últimos capítulos las familias 1-paramétricas jugarán un rol central.

Demostración:(Teorema 4.3)
Debido a que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, se sigue de (4.1) que:

$$f(x) = g(x) + o(\|x\|^2), \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^{\top}Df(0)x \tag{4.7}$$

Así f es igual a g salvo términos de orden más pequeños que $\|x\|^2$. Con ayuda de un parámetro real u conectamos a f con g por medio de una homotopía lineal H:

$$H(x,u) := (1-u)f(x) + ug(x) \tag{4.8}$$

En particular se cumple que

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = g(x) \tag{4.9}$$

El procedimiento ulterior está esquematizado en la Fig 4.3.

En una vecindad del intérvalo $\{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ definimos un campo vectorial F de la forma siguiente

$$F(x,u) = [\chi(x,u), 1], \quad \text{con} \quad \chi(0,u) = 0. \tag{4.10}$$

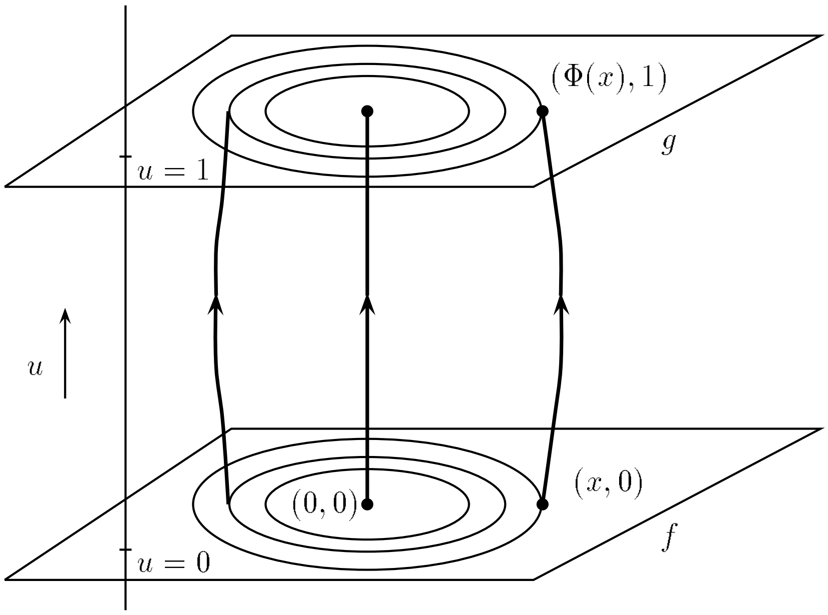


Figura 4.3:

Cuando $F \in C^1$, entonces la ecuación diferencial autónoma

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = F(x,u) \qquad \text{con} \begin{pmatrix} x(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

es soluble en $(\bar{x}, \bar{u})$ cerca de $\{0\} \times [0,1]$ para valores pequeños de t y se tiene que el flujo $\Psi_t(x,u)$ es una aplicación C^1 en las variables (x,t,u).

Aquí $\Psi_t(x,u)$ es el punto en $I\!R^{n+1}$ que es alcanzado, después de integrar (4.11) sobre el tiempo t, con valor inicial $(\bar{x}, \bar{u}) = (x,u)$. La diferenciabilidad contínua de $(t,x,u) \mapsto \Psi_t(x,u)$ es un resultado principal de la teoría de ecuaciones diferenciales (cf. [21]).

De la forma del campo vectorial F se observa que el origen $x = 0$ permanece invariante y que el nivel $u = 0$ se traslada, en tiempo 1, al nivel $u = 1$.

Un punto $(x, 0)$ se ha transportado, en el tiempo 1, en un punto $\Psi_1(x,0)$.

Definimos Φ del siguiente modo (cf. Fig 4.3)

$$(\Phi(x), 1) = \Psi_1(x, 0) \tag{4.12}$$

La aplicación (local) Φ es una aplicación de clase C^1 que además posee una inversa en C^1 (integración en sentido inverso !) y es, por consiguiente, un C^1-difeomorfismo.

El campo vectorial F en C^1 es construído de tal modo que la homotopía H sea constante sobre las curvas integrales. Así se cumple que

$$\underbrace{H[\underbrace{\Psi_1(x,0)}_{(\Phi(x),1)}]}_{g[\Phi(x)]} = \underbrace{H[\underbrace{\Psi_0(x,0)}_{(x,0)}]}_{f(x)}$$

o sea:

$$g = f \circ \Psi^{-1},$$

con esto y la anterior discusión sobre funciones cuadráticas, queda concluida la prueba.□

Como formulación para el campo vectorial $F = (\chi, 1)$, tomamos:

$$\chi(x,u) = \begin{cases} - \parallel D_x H \parallel^{-2} \cdot D_u H \cdot D_x^{\top} H \mid_{(x,u)} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Cuando $\chi \in C^1$ entonces H es, de hecho, constante sobre las curvas integrales ya que

$$\frac{\partial}{\partial t} H[\Psi_t(x,u)] = DH \cdot F = D_x H \cdot \chi + D_u H \cdot 1$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} H[\Psi_t(x,u)] = - \parallel D_x H \parallel^{-2} \cdot D_u H \cdot \underbrace{D_x H \cdot D_x^{\top} H}_{\|D_x H\|^2} + D_u H = 0$$

El anterior cálculo remite a la elección de la aplicación χ en (4.13). La principal dificultad reside en mostrar que χ es, de hecho, contínuamente diferenciable, pues $D_x H(0,u) = 0$; y con ello aparece en (4.13) un problema de división del tipo "0:0".

En esencia, el factor $D_u H$ está en el numerador y $\parallel D_x H \parallel$ en el denominador. Sin embargo de $D_u H = g - f = o(\parallel x \parallel^2)$ y de la regularidad de la matriz hessiana se tiene que $\parallel D_x H \parallel^{-1} = O(\|x\|^{-1})$ (véase más adelante).

Con esto el numerador tiende más rápido a cero que el denominador; puesto que $\parallel \chi \parallel = O(\parallel x \parallel) \cdot o(\parallel x \parallel^2) = o(\parallel x \parallel)$, se sigue entonces que χ es contínua (observe que $\chi(0,u) = 0$).

Una aproximación análoga da como resultado que χ incluso es contínuamente diferenciable (esto no será mostrado aquí (cf. [90])). Para terminar mostramos que $\parallel D_x H \parallel^{-1} = O(\|x\|^{-1})$.

Dado que $D^2 f(0)$ no es singular, se tiene $D^2 f(0)\xi \neq 0$ para todo $\xi \in I\!R^n$ con $\parallel \xi \parallel = 1$. La esfera unidad es compacta en $I\!R^n$ y por eso se cumple que

$$\min_{\|\xi\|=1} \parallel D^2 f(0) \cdot \xi \parallel \geq \gamma > 0 \tag{4.14}$$

Se tiene que:

$$D_x H(x,u) = \underbrace{Df(x)}_{\underbrace{Df(0)}_{0} + x^{\top} D^2 f(0) + o(\|x\|)} + \underbrace{u(Dg(x) - Df(x))}_{\underbrace{u[o(\|x\|)]}_{o(\|x\|)}}$$

dado que $u \in [0,1]$.

Por consiguiente, con (4.14), para $u \in [0,1]$ y $\|x\|$ suficientemente pequeño se obtiene:

$$\frac{\| D_x H \|}{\|x\|} \geq \left| \left\| D^2 f(0) \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| - \frac{o(\|x\|)}{\|x\|} \right| \geq \frac{1}{2}\gamma \tag{4.15}$$

De (4.15) se sigue que $\| D_x H \|^{-1} \leq \frac{2}{\gamma}\|x\|^{-1}$ y con ello

$$\| D_x H \|^{-1} = O(\|x\|^{-1}).$$

4.2 Conexión global entre los puntos críticos

En esta sección partimos de una función $f : I\!\!R^n \mapsto I\!\!R$, $f \in C^2$, cuyos puntos críticos son no degenerados. Además suponemos, para simplificar, el siguiente comportamiento asintótico:

(A) Para $\| x \|$ suficientemente grande $f(x) = \| x \|^2$.

De los resultados de la sección 4.1 se desprende que f tiene, en la vecindad de un punto $\bar{x} \in I\!\!R^n$ y salvo una constante $f(\bar{x})$, la forma canónica (4.2) o (4.5). Los puntos esenciales son los puntos críticos; los puntos no críticos sirven para "rellenar" el espacio. No se puede fijar arbitrariamente puntos críticos y con ello construir una función que satisfaga la condición asintótica **(A)**. En la base de esto se encuentra, como en un juego de rompecabezas, una armazón combinatoria, la cual vamos a discutir en lo que sigue. El tratamiento que haremos tiene el propósito de hacer tal situación visible y plausible. Para los detalles matemáticos referimos a ([81, 90, 135]).

Imaginemos el gráfico de una función f como superficie de una montaña multidimensional; luego hagamos crecer en este "mundo" el nivel del agua y observemos como se transforma la estructura de los lagos que se forman en función del nivel del agua. Matemáticamente hablando consideraremos los conjuntos de nivel inferior M^a, para valores crecientes de $a \in I\!\!R$:

$$M^a = \{x \in I\!\!R^n \mid f(x) \leq a\}. \tag{4.16}$$

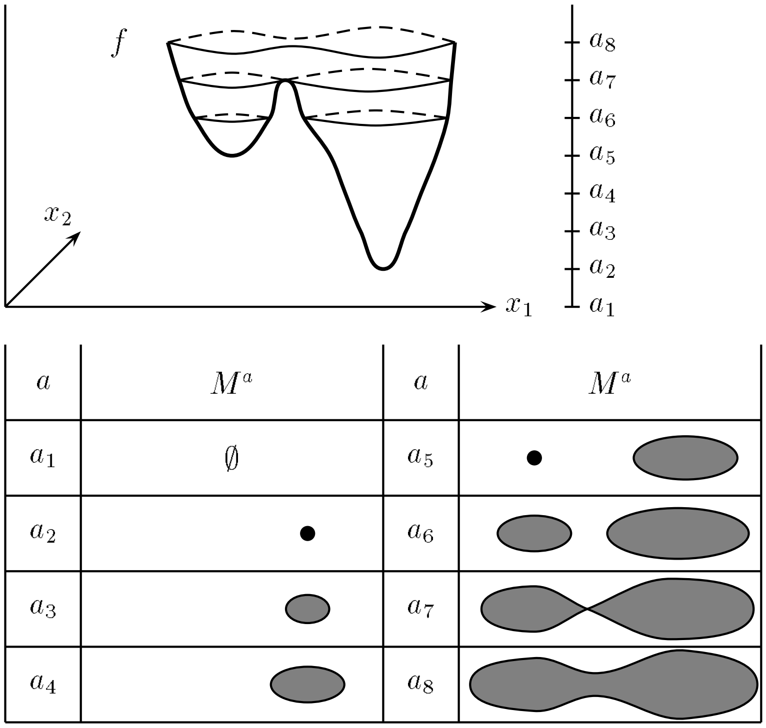


Figura 4.4:

A causa de la condición asintótica **(A)** todas nuestras curvas de nivel son compactas. Ademas el conjunto de los puntos críticos es cerrado, se compone solo de puntos aislados a causa del supuesto de no degeneración y está contenido en M^a, para $a > 0$ suficientemente grande. Como consecuencia, el conjunto de puntos críticos es finito. Veremos que la estructura de los lagos que surgen se transforma, salvo una deformación contínua, solamente cuando traspasamos un nivel a donde se incorpora a M^a un nuevo punto crítico. Para facilitar las cosas deseamos suponer que los distintos puntos críticos tienen valores f diferentes. Consideremos entonces la Figura 4.4

En la Fig. 4.4 se observa que la estructura conexa de los conjuntos de nivel inferior cambia al traspasarse los niveles a_2, a_5,a_7 (se puede contar el número de las componentes conexas!). Entre los niveles a_2 y

a_5, respectivamente a_5 y a_7, se incrementa el conjunto de nivel inferior y éste podría ser contínuamente deformado en un conjunto de nivel inferior más pequeño. Una tal deformación se puede alcanzar a lo largo de las trayectorias del campo vectorial de máxima pendiente:

$$(\frac{\partial x}{\partial t} =)\ \dot{x} = -D^{\mathsf{T}} f(x) \tag{4.17}$$

Considérese para ello el conjunto de nivel intermedio M_a^b,

$$M_a^b = \{x \in I\!R^n \mid a \leq f(x) \leq b\} \tag{4.18}$$

En caso de que M_a^b no contenga puntos críticos (digamos $a = a_3$, $b = a_4$), entonces se tiene que $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in M_a^b$ y con ello, a causa de la compacidad de M_a^b, se tiene que

$$inf\{\|\ Df(x)\ \| \quad |\ x \in M_a^b\} > 0$$

Por eso el campo vectorial escalado F está acotado en una vecindad de M_a^b, donde

$$F(x) = -\frac{D^{\mathsf{T}} f(x)}{\|\ Df(x)\ \|^2} \tag{4.19}$$

Para $x \in M_a^b$ vale que $Df(x)DF(x) = -1$; con ello se logra que, después de una integración del campo vectorial F durante un tiempo $t = f(x) - f(a)$, un punto $x \in M_a^b$ se traslade al conjunto M^a. (Ver Figura 4.5).

Obsérvese que las curvas integrales del campo vectorial $D^{\mathsf{T}} f$ y F son iguales; solamente es diferente la rapidez. La acotación de F en una vecindad de M_a^b garantiza que se pueda integrar sobre tiempos mayores, en particular sobre el tiempo $f(x)-f(a)$. Aquí se haya oculta la suposición **(A)**; en caso de que no se suponga **(A)** es preciso garantizar, mediante alguna condición, que el campo vectorial F sea integrable sobre un tiempo mayor (cf. la llamada Condición de Palais-Smale [142]).

La transición del nivel a_6 al nivel a_8 se puede interpretar de la siguiente manera: el conjunto de nivel inferior M^{a_8} puede deformarse contínuamente en el conjunto $M^{a_6} \cup E^1$, donde E^1 representa un intervalo (cf. Fig. 4.6).

Supongamos ahora que M_a^b contenga exactamente un punto crítico $\bar{x}$ con $a < f(\bar{x}) < b$ y sea su índice cuadrático QI igual a k. Entonces se

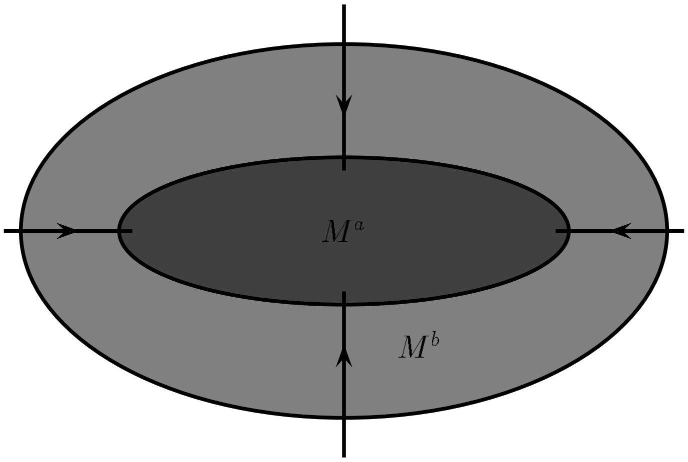


Figura 4.5:

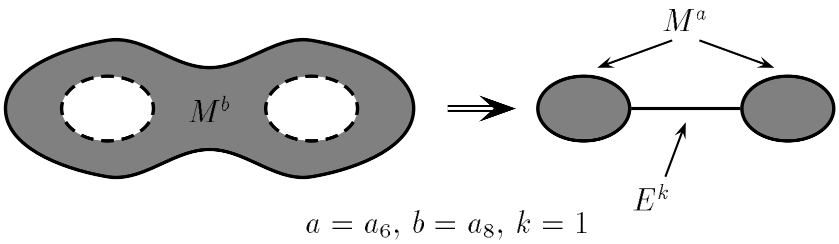


Figura 4.6:

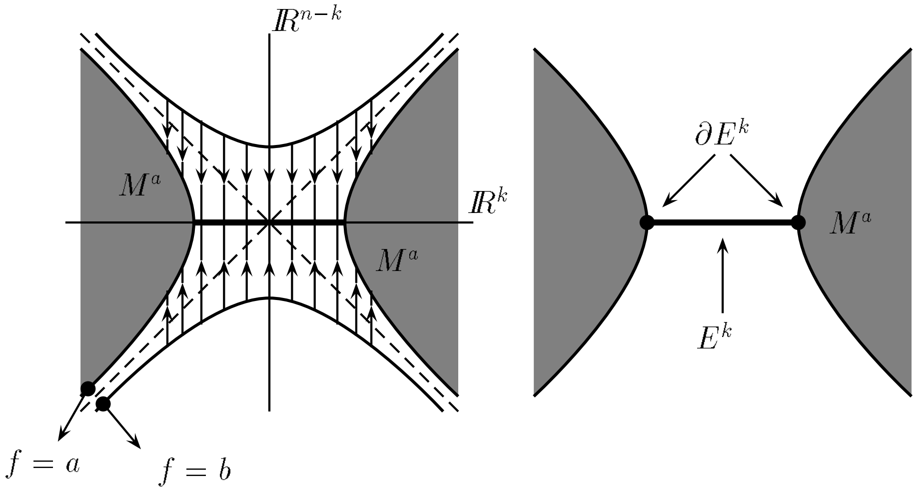


Figura 4.7:

puede, análogamente a la Fig 4.6, deformar contínuamente el conjunto M^a en $M^a \cup E^k$, donde E^k es una k-célula. Por una k-célula entendemos un conjunto homeomorfo a la bola unitaria k-dimensional D_k

$$D^k := \{z \in I\!R^k \mid \| z \| \leq 1\}.$$

Se puede realizar lo anterior del siguiente modo: Escogemos una pequeña vecindad U del punto crítico $\bar{x}$ en la cual, salvo una constante $f(\bar{x})$, se puede introducir la forma canónica (4.5). Fuera de U deformamos con ayuda del campo vectorial F de (4.19). Dentro de U utilizamos la forma canónica (4.5): Sin pérdida de generalidad, tenga f la forma

$$-\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2$$

Con ayuda de la partición $I\!R^n = I\!R^k \times I\!R^{n-k}$ deformamos M^b paralelamente a las últimas $n-k$ coordenadas en $M^a \cup E^k$ (cf. Fig. 4.7).

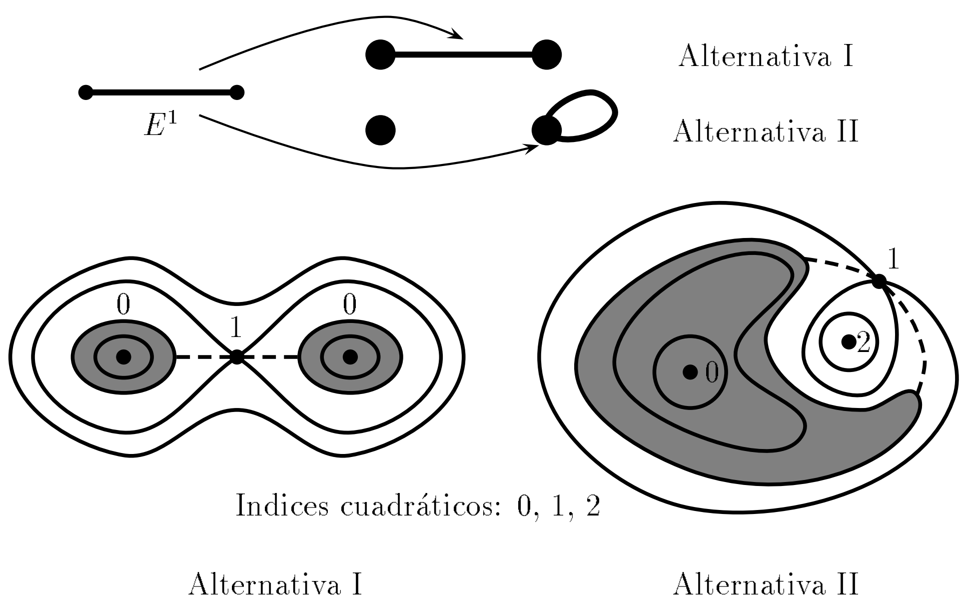


Figura 4.8:

La intersección de M^a y E^k es precisamente el borde de E^k, que denotaremos como ∂E^k. La imagen del conjunto $M^a \cup E^k$ se puede interpretar del siguiente modo: Una k-célula E^k se ha pegado (a lo largo de su borde) a M^a. En este sentido ha cambiado la estructura (conexa) de los conjuntos de nivel inferior M^a en comparación con M^b.

Si $k = 1$ se ha pegado una 1-célula E^1 a lo largo del borde ∂E^1 a M^a. El borde ∂E^1 consiste de dos puntos distintos . Para pegar hay dos alternativas: Ya sea que los dos puntos se han pegado a dos componentes conexas diferentes de M^a (I), o a la misma componente conexa (II).

En el primer caso disminuye el número de las componentes conexas en una unidad; en el segundo caso crece el número de hoyos 2-dimensionales en una unidad.

Las alternativas han sido representadas en abstracto con ayuda de las curvas de nivel de una función de dos variables.

Cuando $k = 2$ se podría proceder, un tanto ingenuamente, de modo

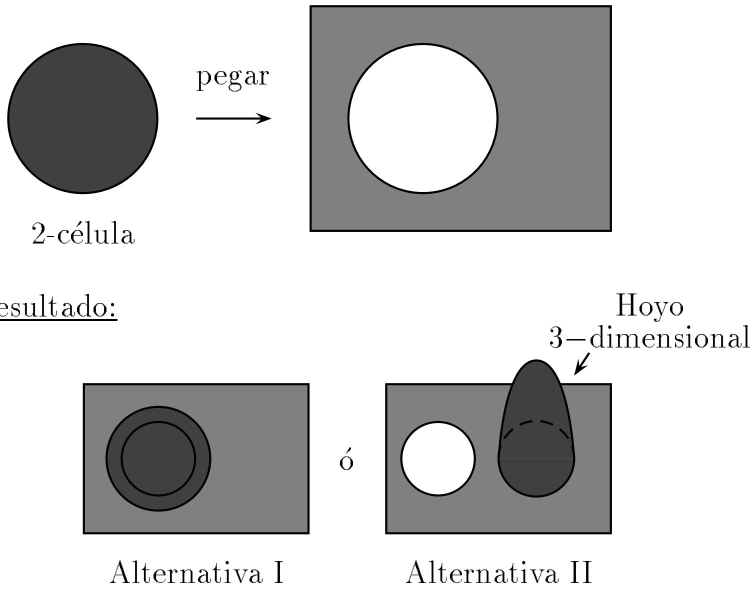


Figura 4.9:

análogo. El pegamento de una 2-célula a lo largo de su borde resulta en la "cerradura" de un hoyo 2-dimensional (I) o en la "creación" de un hoyo 3-dimensional (II); véase Figura 4.9.

Desde luego, se debe precisar qué se entiende, exactamente, por un "hoyo k-dimensional". Sin ánimo de entrar aquí en detalles entendemos un hoyo k-dimensional de un espacio topológico X como un elemento de una base del espacio de homología de orden $(k-1)$ de X sobre el cuerpo de los números reales. (cf. [90, 178]).

En particular, la dimensión del espacio de homología de orden 0 da el número de componentes (camino) conexas .

Con el concepto de un "hoyo k-dimensional" anteriormente mencionado, se facilita la generalización del efecto de pegado de una k-célula a un espacio topológico X y, en efecto, existen las siguientes alternativas:

(I) el número de hoyos k-dimensionales disminuye una unidad

(II) el número de hoyos (k+1)-dimensionales aumenta una unidad

A causa de la condición asintótica (A), el conjunto de nivel inferior M^a es una bola completa, para $a > 0$ suficientemente grande. Una tal bola tiene solo una componente conexa y ningún hoyo de dimensión ≥ 2.

Hagamos ahora, mentalmente, que el nivel a crezca; entonces deben cerrarse nuevamente todos los hoyos de dimensión ≥ 2 que se hayan creado al traspasarse niveles críticos. Este simple argumento nos proporciona una relación combinatoria entre los puntos críticos (las llamadas Relaciones de Morse).

Sea c_k el número de puntos críticos de índice cuadrático k y sea c_k^- (resp. c_k^+) el número de puntos críticos con $QI = k$ donde ocurre, al aumentar el nivel del conjunto de nivel inferior, la alternativa (I)(resp.II). Son válidas, obviamente, las siguientes igualdades (Relaciones de Morse).

$$\begin{aligned} c_0^+ - c_1^- &= 1 \\ c_i^+ - c_{i+1}^- &= 0, \qquad i \neq 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Notamos que $c_0^+ = c_0$ y que $c_{i+1} = 0$ para $i \geq n$.

Para la función de segundo grado $f(x) = \|x\|^2$ se cumple que $c_0 = 1$ y $c_i = 0$, $i > 1$; con ello se satisfacen, en este caso, las igualdades (4.20) en sentido minimal.

En general, junto a los mínimos globales, todos los demás puntos críticos aparecen en pares y con índices cuadráticos $(k, k+1)$, $k \geq 0$. Cuando se construye la suma alternante de las igualdades (4.20), se establece inmediatamente que

$$c_0 - c_1 + c_2 + \cdots + (-1)^n c_n = 1 \tag{4.21}$$

Conviene anotar que la igualdad (4.21) vale para todas las funciones f que satisfacen las condiciones iniciales.

En la Fig. 4.10 se ha construído una función f de dos variables a partir de un grafo conexo en $\mathbb{R}^2$ (el armazón combinatorio). Los nodos del grafo corresponden a los mínimos locales $(QI = 0)$ y las aristas corresponden a los puntos críticos con $QI = 1$.

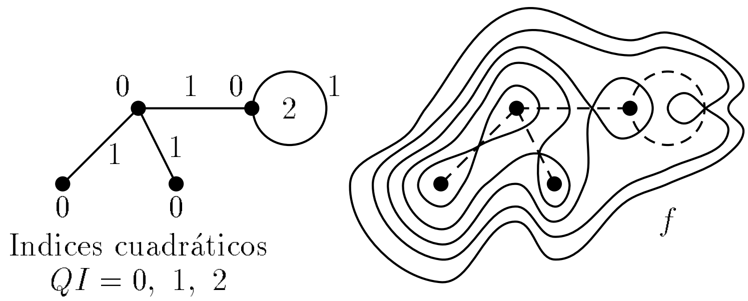


Figura 4.10:

4.3 Traslado al caso con restricciones

En esta sección trasladamos las relaciones globales de los puntos críticos a problemas con restricciones. Se desprende de ello que en este caso los puntos estacionarios jugarán el rol topológico de los puntos críticos. Para detalles referimos a [90, 91].

Se considera el conjunto factible $M := M[h, g]$ y la función f,

$$M[h, g] = \{\ x \in I\!R^n \mid h_i(x) = 0,\ i \in I,\ g_j(x) \geq 0,\ j \in J\ \} \tag{4.22}$$

donde $\mid I \mid < n$, $\mid J \mid < \infty$ y $f,\ h_i,\ g_j \in C^2(I\!R^n, I\!R)$.

Para mayor facilidad suponemos que se satisface la condición $LICQ$ en cada punto de M.

Un punto crítico $\bar{x}$, de acuerdo a la Definición 3.5, se llama no degenerado cuando se cumplen las siguientes condiciones ND1, ND2:

$$\begin{array}{lll} \underline{\text{ND1}} & \text{(lineal)} & \mu_j \neq 0,\ j \in J_0(\bar{x}) \\ \underline{\text{ND2}} & \text{(de segundo grado)} & D^2L(\bar{x}) \mid_{T_{\bar{x}}M} \text{ no es singular} \end{array} \tag{4.23}$$

$T_{\bar{x}}M$ en (4.23) es el espacio tangencial a M en $\bar{x}$ (Definición 3.7).

Sea $p = dim(T_{\bar{x}}M)$ y $\mathbf{V}$ una (n, p)-matriz cuyas columnas constituyan una base de $T_{\bar{x}}M$. Decimos que $D^2L(\bar{x})$ es no singular cuando $\mathbf{V}^\top \cdot D^2L(\bar{x}) \cdot \mathbf{V}$ no es singular. El número de valores propios negativos (resp.positivos) de $\mathbf{V}^\top \cdot D^2L(\bar{x}) \cdot \mathbf{V}$ se llama índice cuadrático (resp. co-Indice cuadrático) de $\bar{x}$, y lo denotaremos por QI (resp. QCI) .

Los números QI, QCI son independientes de la elección de la matriz V (cf. Teorema 2.20, de Sylvester). El número de μ_j negativos (resp. positivos) en (4.23) se denomina Indice lineal LI (resp. co-Indice lineal LCI).

Sea $\bar{x} \in M$. Con el difeomorfismo standard Φ (cf. Capítulo 3) podemos transformar localmente el conjunto factible en el siguiente conjunto, donde $\Phi(\bar{x}) = 0$:

$$\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^q, \qquad p = \mid J_0(\bar{x}) \mid, \quad q = n - \mid I \mid - \mid J_0(\bar{x}) \mid$$

Cuando $\bar{x}$ es un punto crítico no degenerado existe, análogamente al Lema de Morse (Teorema 4.3) otra transformación de coordenadas (C^1), la cual deja invariante al conjunto $\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^q$ (alrededor de 0) y donde, además, la función f adquiere la forma siguiente (forma canónica):

$$f(\bar{x}) - \sum y_{i_1} + \sum y_{i_2} - \sum y_{i_3}^2 + \sum y_{i_4}^2 \qquad y_{i_1} \geq 0, y_{i_2} \geq 0 \quad (4.24)$$

En (4.24) i_1 recorre las primeras LI coordenadas e i_2, i_3, i_4 las siguientes LCI, QI, QCI coordenadas respectivamente.

Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ se definen los conjuntos M^a, M_a^b, análogamente a la Sección 4.2, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M^a &= \{x \in M \mid f(x) \leq a\} \\ M_a^b &= \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aquí supondremos como la condición asintótica más sencilla, que el conjunto factible es compacto. Derivaremos las relaciones de Morse y construiremos, de nuevo, un "armazón combinatorio" con ayuda de deformaciones continuas.

Suponemos que todos los puntos estacionarios son puntos críticos no degenerados y que puntos estacionarios distintos poseen valores diferentes de f. Hay dos casos a considerar:

<u>Caso 1</u> : M_a^b no contiene puntos estacionarios.

<u>Caso 2</u> : M_a^b contiene exactamente un punto estacionario $\bar{x}$; tal que $a < f(\bar{x}) < b$ y $QI = k$

Caso 1: En este caso se puede deformar contínuamente al conjunto de nivel inferior M^b en M^a - con un campo vectorial adecuado - dentro de M. De tal modo se mantiene invariante la estructura de hoyos. El campo vectorial será definido primeramente, sobre las coordenadas locales ($\{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^q$, $m =\mid I \mid$), como un campo vectorial constante ξ. El correspondiente campo vectorial local en las coordenadas originales está dado entonces a través de $x \mapsto (D\Phi^{-1})_{|_{\Phi(x)}} \xi$, donde Φ representa al difeomorfismo standard.

Finalmente, los campos vectoriales locales serán empastados, con ayuda de una partición de la unidad adecuada, en un solo campo vectorial global. El campo vectorial constante ξ se obtiene, en coordenadas locales de $\{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^q$, del siguiente modo:

Sea $\bar{x} \in M_a^b$ un punto no estacionario. y sea $g(y) = f \circ \Phi^{-1}(y)$ la función f dada en coordenadas locales.

Si $\bar{x}$ no es punto crítico se tiene que por lo menos una de las últimas q derivadas parciales cumple que $\frac{\partial}{\partial y_j} g(0) \neq 0$. Se escoge una tal coordenada j y se toma $\xi_i = 0$, $i \neq j$ y $\xi_j = 1$ (resp. -1) cuando $\frac{\partial}{\partial y_j} g(0) < 0$ (resp. $\frac{\partial}{\partial y_j} g(0) > 0$).

Cuando $\bar{x}$ es un punto crítico entonces se tiene que $\frac{\partial}{\partial y_j} g(0) < 0$ al menos para alguna de las coordenadas intermedias p ($\bar{x}$ no es punto estacionario !). Se escoge una coordenada j y se pone $\xi_i = 0$, $i \neq j$ y $\xi_j = 1$.

En ambos casos vale $y + t\xi \in \{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^q$, para un $t \geq 0$ pequeño, $y \in \{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^q$, $\|y\|$ pequeño.

De este modo la curva $\Phi^{-1}(y + t\xi)$ permanece dentro del conjunto M si $\Phi^{-1}(y) \in M$, t positivo, y se cumple, por construcción:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} f \circ \Phi^{-1}(y + t\xi) \mid_{t=0}}_{Df(x)\cdot(D\Phi^{-1}|_{\Phi(x)}\cdot\xi)} = \frac{d}{dt} g(y + t\xi) \mid_{t=0} < 0 \tag{4.26}$$

Caso 2 En este caso la "estructura de hoyos" del conjunto de nivel inferior M^b es idéntica a la de $M^a \cup E^k$ (M^a con una k-célula adjuntada). Para visualizar esto último hagamos plausible una idea de D.Braess ([14]). Partimos de la forma canónica (4.24). Dado que $\bar{x}$ es un punto estacionario desaparecen todos los términos lineales negativos ($LI = 0$).

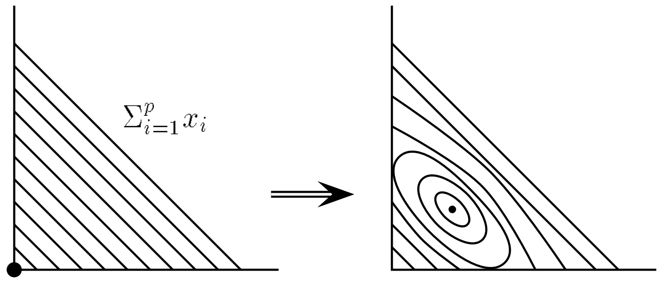


Figura 4.11:

Así f tiene la forma (suponiendo que $f(\bar{x}) = 0$):

$$\sum_{i=1}^{p} x_i - \sum_{j=p+1}^{p+k} x_j^2 + \sum_{l=p+k+1}^{p+q} x_l^2 \tag{4.27}$$

La idea de Braess consiste en correr los puntos estacionarios hacia el interior de $\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^q$. Esto último se puede imaginar como el resultado de presionar con un "dedo" el gráfico de la función lineal $\sum_{i=1}^{p} x_i$. (Ver Fig. 4.11).

De esta manera se han transformado los términos lineales positivos en un mínimo local no degenerado perteneciente al interior de $\mathbb{H}^p$. Tampoco se incrementa el índice cuadrático porque $QI = 0$ en un mínimo local no degenerado. A causa del corrimiento antes citado surgirán, en efecto, nuevos puntos críticos en el borde de $\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^q$, pero estos no son puntos estacionarios.

Ahora podemos deducir las Relaciones de Morse. Para niveles crecientes de la función se cambia la "estructura de hoyos" de los conjuntos de nivel inferiores solamente para los niveles de los puntos estacionarios, o sea, en el Caso 2.

Sea entonces c_k el número de puntos estacionarios de índice cuadrático $QI = k$; sea c_k^- (resp. c_k^+) el número de puntos estacionarios con $QI = k$ para los cuales se tiene, para niveles crecientes, la alternativa (I)(resp.II) (sección 4.2). Más aún, sea r_k el número de hoyos $(k+1)$-dimensionales del conjunto factible M.

Análogamente a (4.20) valen las siguientes igualdades (Relaciones de Morse):

$$c_i^+ - c_{i+1}^- = r_i, \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{4.28}$$

donde $c_0^+ = c_0$ (mínimos locales) y $c_i = 0$ para $i > n- \mid I \mid$ (la dimensión de M).

Se puede eliminar los simbolos $(+)$ y $(-)$ en (4.28) adicionando todas las igualdades en (4.28) con signo alternado y poniendo $c_k = c_k^+ + c_k^-$:

$$(c_0^+ - c_1^-) - (c_1^+ - c_2^-) + (c_2^+ - c_3^-) - \ldots = r_0 - r_1 + r_2 - \ldots$$

obteniendose así

$$c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^s c_s = r_0 - r_1 + r_2 - \ldots + (-1)^s r_s, \ s = n- \mid I \mid . \tag{4.29}$$

El número del lado derecho de (4.29) depende solamente de la topología del conjunto factible M y se denomina característica de Euler de M. Por un lado, la topología de M ("estructura de hoyos") proporciona relaciones entre el número de puntos estacionarios de diferentes índices cuadráticos. Por otro lado, con una función objetivo f dada, se puede obtener información sobre la estructura topológica de M. En efecto, (4.29) representa ambos aspectos.

Como ejemplo sencillo consideremos la 2-esfera

$$S^2 := \{\ x \in I\!R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\ \}$$

La función coordenada dada por $g(x_1\ , x_2,\ x_3)\colon = x_3$ tiene dos puntos estacionarios no degenerados sobre S^2 y, en efecto, tales puntos son el mínimo global S y el máximo global N (Ver Fig. 4.12 a).

Además, no hay puntos estacionarios con $QI = 1$. Así obtenemos de (4.28): $r_0 = c_0^+ = 1$ (una componente conexa), $r_1 = -c_2^- = 0$ y $r_2 = c_2^+ = 1$.

Sea ahora $f \in C^2(R^3, I\!R)$ cualquier función para la cual todos los puntos críticos de $f\mid_{S^2}$ sean no degenerados. Entonces vale, teniendo en cuenta (4.29):

$$c_0 - c_1 + c_2 = r_0 - r_1 + r_2 = 2$$

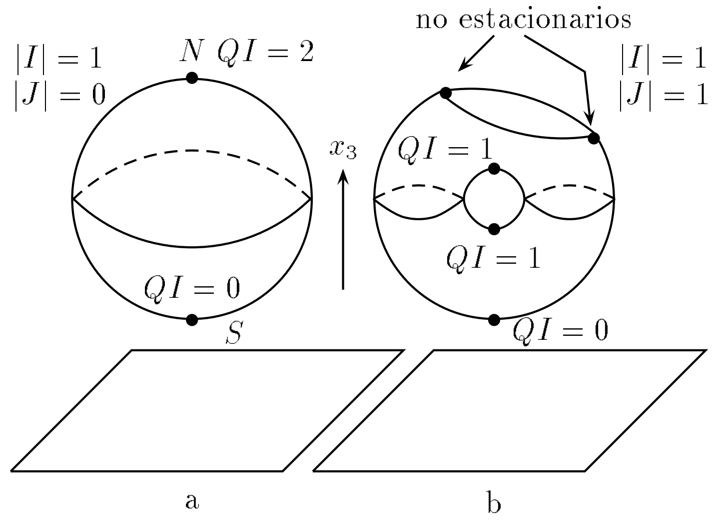


Figura 4.12:

es decir,

$\sharp$(mínimos locales) $-$ $\sharp$(puntos de ensilladura) $+$ $\sharp$(máximos locales) $= 2$

donde $\sharp$ designa la cardinalidad.

En el caso de la Fig. 4.12 b se obtiene, con ayuda de la función coordenada x_3: $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$.

Cuando se suma en (4.28) las primeras l igualdades con signo alternante, entonces se obtienen las llamadas Desigualdades de Morse:

Por ejemplo, la primera ecuación ($c_0^+ = c_0$) produce $c_0 \geq r_0$.

La primera/segunda ecuaciones dan:

$$r_1 - r_0 = (c_1^+ - c_2^-) - (c_0^+ - c_1^-) \leq c_1 - c_0, \text{ etc.}$$

De (4.28) se sigue que al menos r_i puntos estacionarios de $QI = i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ deben estar disponibles para producir la estructura de hoyos del conjunto factible M. Todos los demás puntos estacionarios aparecen en pares y con índices cuadráticos $(k, k+1)$.

4.4 Deformación continua en optimización

En esta sección consideramos problemas de optimización $P(t)$, los cuales dependen de un parámetro real t:

$$P(t): \quad \text{minimizar } f(\cdot,t) \text{ sobre el conjunto factible } M(t), \tag{4.30}$$

donde

$$M(t) = \{ \ x \in I\!R^n \ | \ h_i(x,t) = 0, \, i \in I, \ g_j(x,t) \geq 0, \, j \in J \ \} \tag{4.31}$$

Sean las funciones f, h_i, g_j suficientemente suaves, digamos en el espacio $C^3(I\!R^{n+1}, I\!R)$.

Cuando el parámetro t recorre el intervalo $[0,1]$ entonces el problema $P(0)$ está ligado, contínuamente, con el problema $P(1)$, a través de $P(\cdot)$ en (4.30). Así, $P(1)$ podría ser un problema difícil de resolver y $P(0)$, por el contrario, uno sencillo. En el espacio (x,t) el conjunto de los puntos críticos estará configurado, en general, en curvas 1-dimensionales. Así se puede esperar, partiendo de un punto crítico o de un punto estacionario, comenzar en $P(0)$ y, a lo largo de la correspondiente curva 1-dimensional, llegar hasta un punto crítico o, respectivamente, hasta un punto estacionario de $P(1)$. Desdichadamente esto no siempre funciona y tal tema se abordará detalladamente en los últimos tres capítulos.

En esta sección nos ocuparemos de dos aspectos parciales, a saber, de la estructura del conjunto de puntos críticos en el caso $M(t) \equiv I\!R^n$ (el caso sin restricciones) y de los cambios estructurales del conjunto factible $M(t)$ en dependencia de t. Remitimos a [101] para detalles y otras referencias.

4.4.1 El caso sin restricciones ($I = J = \emptyset$)

En el espacio (x,t) definimos al conjunto desplegado de puntos críticos $\sum$,

$$\sum = \{ \ (x,t) \in I\!R^{n+1} \ | \ D_x f(x,t) = 0 \ \} \tag{4.32}$$

La matriz jacobiana de la aplicación $(x,t) \mapsto D_x f(x,t)$ es igual a

$$\left(\quad D_x^2 f \quad \middle| \quad D_t D_x^{\top} f \quad \right) \tag{4.33}$$

Cuando la matriz jacobiana (4.33) posee en cada punto $(x,t) \in \sum$ rango completo $(= n)$, se puede parametrizar localmente a $\sum$ en cada uno de sus puntos por lo menos en una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Esto último se obtiene inmediatamente del teorema sobre la función implícita. Suponemos pues, a partir de ahora, que dentro de $\sum$ está satisfecha la condición de rango.

$\sum$ es localmente parametrizable en t alrededor de $(\bar{x}, \bar{t})$, cuando $D_x^2 f$ es no singular, es decir, cuando el punto crítico $\bar{x}$ es no degenerado para la función $x \mapsto f(x, \bar{t})$. Localmente, el índice cuadrático permanece constante, porque los valores propios de una matriz (n,n) dependen contínuamente de los elementos de dicha matriz (observe que aquí la aplicación $(x,t) \mapsto D_x^2 f$ es contínua). Con esto, en particular, un mínimo local $(QI = 0)$ sigue siendo (localmente) un mínimo local.

Cuando $D_x^2 f$ es singular en un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \sum$ sucede, a causa de la condición de rango arriba supuesta, que rango($D^2 f(\bar{x}, \bar{t})) = n - 1$.

Es así que a lo largo de $\sum$ siempre habrá, a lo sumo, un valor propio de $D_x^2 f$ que se anula. La situación considerada aparece a causa, precisamente, de un cero de la siguiente aplicación $\mathcal{T}$ (det=determinante):

$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} D^{\top} f \\ det(D_x^2 f) \end{pmatrix}_{|(x,t)} \tag{4.34}$$

La condición de rango completo para (4.33) la afinamos ahora mediante la suposición de que la matriz jacobiana $D\mathcal{T}$ en los valores nulos de $\mathcal{T}$ tenga rango completo (=n+1).

Cuando $n = 1$ esto significa (llamando f_x, f_{xx}, etc. a las derivadas correspondientes de f):

$$\begin{matrix} f_x & = & 0 \\ f_{xx} & = & 0 \end{matrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xt} \\ f_{xxx} & f_{xxt} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.35}$$

De $f_{xx} = 0$ se sigue que $f_{xxx} f_{xt} \neq 0$ y, por lo tanto, que $f_{xxx} \neq 0$ y $f_{xt} \neq 0$.

La función representativa (forma canónica) para tal situación en el origen es (Ver Fig. 4.13)

$$f(x,t) = x^3 \pm tx \tag{4.36}$$

$$f(x,t) = x^3 + tx$$

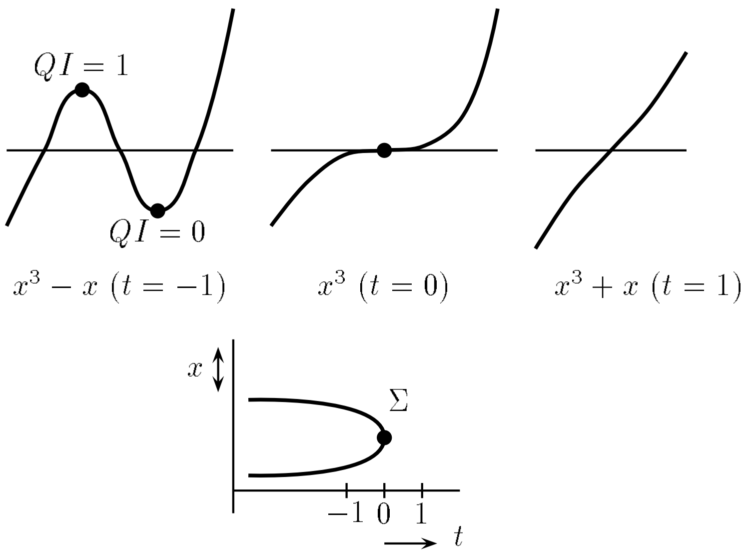


Figura 4.13:

La forma canónica (4.36) vale también en el caso general. De hecho, cuando $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ y la matriz jacobiana no es singular en un cero $(\bar{x}, \bar{t})$ de $\mathcal{T}$ (cf. 4.34) entonces existe un C^∞-difeomorfismo local Φ con $\Phi(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ de la forma especial

$$\Phi : (x, t) \mapsto (\varphi(x, t), \psi(t)) \quad \text{con} \quad D\psi(\bar{t}) > 0 \tag{4.37}$$

gracias al cual f adquiere la forma siguiente en las nuevas coordenadas:

$$x_1^3 \pm tx_1 + \sum_{i=2}^{n} \pm x_i^2 + \delta(t) \tag{4.38}$$

donde δ representa el valor de la función en $x = 0$. El parámetro t juega un rol especial, separado de $(x_1, \ldots, x_n)$, y dicho rol se preserva gracias a la estructura de la transformación de coordenadas (4.37).

El conjunto $\sum$ para (4.38) se encuentra en el plano-(x_1, t) y está determinado por las igualdades

$$3x_1^2 \pm t = 0 \ , \qquad x_2, x_3 \ldots, x_n = 0 \tag{4.39}$$

A través de (4.39) se representa una parábola. Sea k el número de potencias cuadradas en (4.38) y consideremos $\sum$ para t creciente. Entonces se han creado, para el caso $-tx_1$ (resp. $+tx_1$) un par de puntos críticos de índice cuadrático $(k, k+1)$ (resp. aniquilado) en $t = 0$; ver Fig. 4.14.

Compárese también la relación de Morse (4.20), donde hemos indicado la aparición de puntos críticos en pares (y, en general a (4.28) para puntos estacionarios). En el Capítulo 6 corresponde al origen $(\bar{x}, \bar{t}) = (0, 0)$ precisamente un punto de "Tipo 3".

También sin utilizar la transformación de coordenadas (4.37) nos podemos percatar de que $\sum$, en el caso arriba considerado, puede ser aproximado por una parábola (se dice que hay un "punto de retorno de segundo grado").

En efecto, consideremos de nuevo el rol especial del parámetro t mediante la función $F(x, t) \equiv t$ con $\sum$ como conjunto factible. $F\,|_{\sum}$ tiene en $(\bar{x}, \bar{t})$ un punto crítico si y solo si $\mathcal{T}\ (\bar{x}, \bar{t}) = 0$ (cf. 4.34) y, además, $(\bar{x}, \bar{t})$ es un punto crítico no degenerado si y solo si la matriz jacobiana $D\mathcal{T}(\bar{x}, \bar{t})$ es no singular. Como $\sum$ es unidimensional, aparece

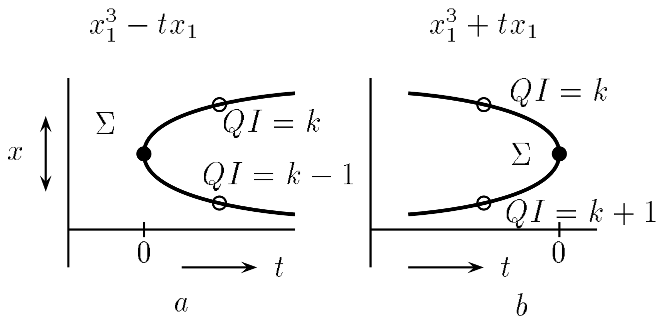


Figura 4.14:

en el caso anterior un mínimo local (resp. máximo local) para $F \mid_{\sum}$. Pero $F(x,t) \equiv t$ es una función lineal. De aquí se sigue que $\sum$ es aproximable, alrededor de $(\bar{x}, \bar{t})$, por una parábola (como en la Fig. 4.14).

Consideremos de nuevo la Fig. 4.14b. Cuando $QI = 0$, entonces la parte superior de $\sum$ representa una rama de mínimos locales. Si se sigue precisamente esta curva de mínimos locales entonces se interrumpe en $t = 0$, porque la parte inferior de $\sum$ se compone de puntos críticos con $QI = 1$ (puntos de ensilladura). En tal punto se podría fijar el parámetro, o sea, considerar la función $x \mapsto f(x,0)$. De la forma canónica (4.38), ahora reducida a $x_1^3 + \sum_{i=2}^n x_i^2$, vemos que la dirección $(-1, 0, \ldots, 0)$ es una dirección de descenso de tercer orden.

Partiendo de $x = 0$ en dicha dirección se puede tratar de encontrar un mínimo local. Una vez encontrado, de hecho se ha "saltado" a otra rama de mínimos locales, podemos seguir la curva de mínimos locales, para valores crecientes de t, hasta el siguiente punto de retorno (Ver Fig. 4.15 para el caso $n = 1$). La posibilidad de tal "salto" será analizada detalladamente en el Capítulo 6.

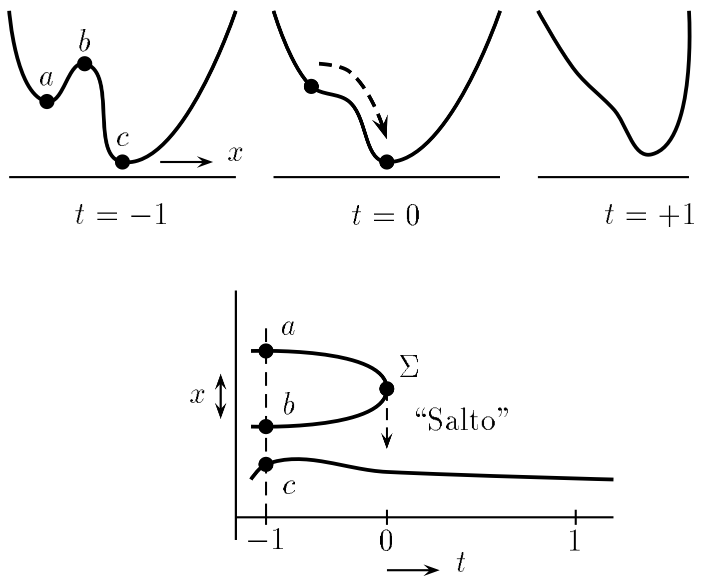


Figura 4.15:

4.4.2 Sobre el cambio estructural de M(t)

Para detalles remitimos a [89]. Primero consideramos solamente una restricción de igualdad h, o sea

$$M(t) = \{\ x \in I\!R^n \mid \ h(x,t) = 0\ \} \tag{4.40}$$

Cuando $D_x h(\bar{x}, \bar{t}) \neq 0$, es decir, cuando en $\bar{x} \in M(\bar{t})$ se satisface $LICQ$, se puede escoger $n-1$ vectores $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \in I\!R^n$, de modo que $\{D_x^\top h(\bar{x}, \bar{t}), \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n\}$ constituya una base para $I\!R^n$. La aplicación Φ, definida a través de $(y, u) = \Phi(x, t)$, donde

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & h(x,t) \\ y_i & = & \xi_i^\top (x - \bar{x}), \quad i = 2, \ldots, n \\ u & = & t - \bar{t} \end{array} \tag{4.41}$$

posee la misma estructura de (4.37) y es una transformación de coordenadas (observe que la matriz jacobiana $D\Phi(\bar{x}, \bar{t})$ no es singular). En las nuevas coordenadas el conjunto factible es, localmente, constante e igual a $(y_1 = 0)$.

Un cambio estructural del conjunto factible $M(t)$ solo puede ocurrir en aquellos puntos $(\bar{x}, \bar{t})$ donde $D_x h(\bar{x}, \bar{t}) = 0$. Esto conduce a un cero de la aplicación $\mathcal{T}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} D^\top h(x,t) \\ h(x,t) \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

Para mantener el cambio estructural bajo control, supongamos que la matriz jacobiana $D\mathcal{T}(\bar{x}, \bar{t})$ no es singular en el punto $(\bar{x}, \bar{t})$ donde $\mathcal{T}$ se anula. Se tiene que

$$D\mathcal{T}(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{pmatrix} D_x^2 h(\bar{x}, \bar{t}) & D_t D_x^\top h(\bar{x}, \bar{t}) \\ D_x h(\bar{x}, \bar{t}) & D_t h(\bar{x}, \bar{t}) \end{pmatrix}$$

Como $D_x h(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ se sigue que $D\mathcal{T}(\bar{x}, \bar{t})$ es no singular si y solo si:

$$\det \left(D_x^2 h(\bar{x}, \bar{t}) \right) \neq 0 \quad \text{y} \quad D_t h(\bar{x}, \bar{t}) \neq 0 \tag{4.43}$$

Del desarrollo de Taylor de h alrededor del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ se obtiene que

$$h(x,t) = (x - \bar{x})^\top D_x^2 h(\bar{x}, \bar{t})(x - \bar{x}) + D_t h(\bar{x}, \bar{t})(t - \bar{t}) + \ldots \tag{4.44}$$

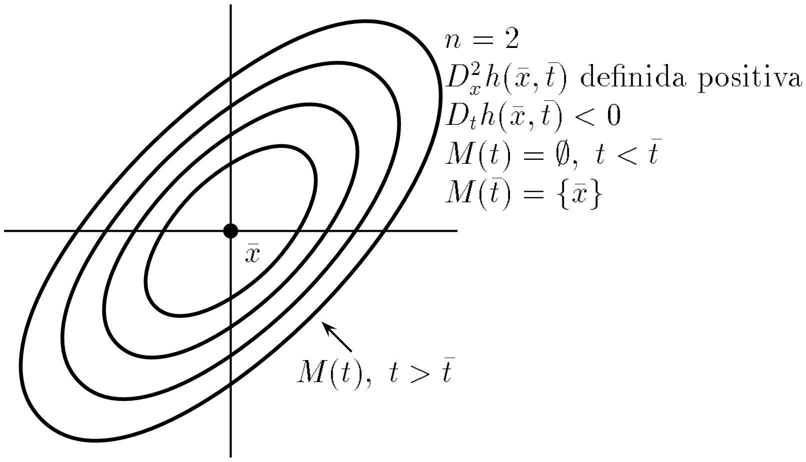


Figura 4.16:

Si despreciamos los términos de orden superior en (4.44) vemos que, alrededor de $(\bar{x}, \bar{t})$, $M(t)$ se comporta aproximadamente como un conjunto de nivel de una función en la vecindad de un punto crítico no degenerado (Ver Fig. 4.16).

De hecho, con ayuda de una transformación de coordenadas del tipo (4.37) se puede conformar la función h, localmente, a partir de los dos términos en (4.44).

Si en la solución de la Fig. 4.16 ponemos en juego, adicionalmente, una función objetivo $f(x, t)$, con $D_x f(\bar{x}, \bar{t}) \neq 0$, entonces se puede sustituir a $f(\cdot, t)$ por la linealización $D_x f \,.\, (x - \bar{x})$, para $(t - \bar{t})$ pequeño. Tal función alcanza un mínimo y un máximo en cada $M(t)$, $t > \bar{t}$. Estos mínimo/máximo generan, en dependencia de t, una curva de puntos críticos no degenerados en el espacio (x, t). El punto $(\bar{x}, \bar{t})$ no pertenece a ella, dado que en $\bar{x}$ se tiene que $D_x f(\bar{x}, \bar{t})(\neq 0)$ no es una combinación lineal de $D_x h(\bar{x}, \bar{t})(= 0)$. El punto $(\bar{x}, \bar{t})$ se denomina punto crítico generalizado (cf. Capítulo 6, Tipo 4).

Junto con el punto $(\bar{x}, \bar{t})$, la curva de mínimos/máximos $\sum$ constituye una variedad diferenciable 1-dimensional en el espacio (x, t), la cual posee, en relación al parámetro t, un punto de retorno de segundo grado (Ver Fig. 4.17).

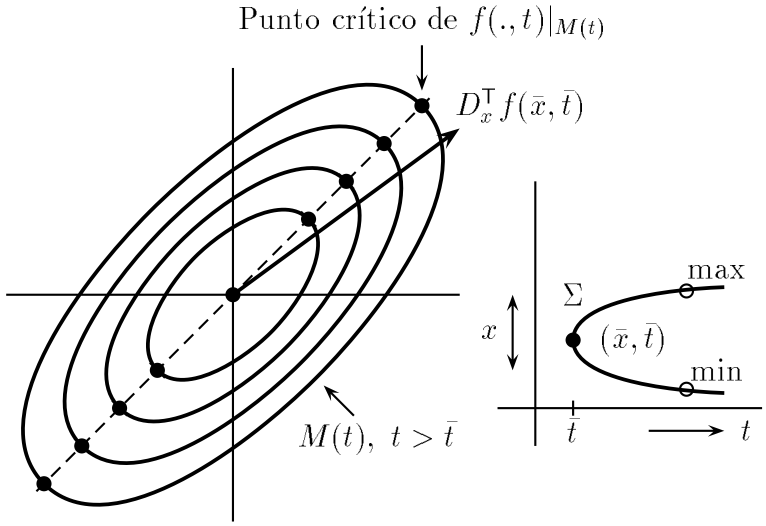


Figura 4.17:

La estructura de $\sum$ en la Fig. 4.17 es semejante a la Fig. 4.14a. Sin embargo, la situación es, topológicamente, completamente distinta. Cuando $n > 2$, $D_x^2 h(\bar{x},\bar{t})$ es definida positiva y $D_t h(\bar{x},\bar{t}) < 0$, también se producen un mínimo y un máximo. En este caso con índice cuadrático 0 y $n-1$. Por el contrario en la situación de la Fig. 4.14 la diferencia es exactamente igual a uno !

La condición (4.43) también se puede hacer plausible de la siguiente manera. Consideremos el despliegue $\mathcal{M}$ de la familia de conjuntos $\{\ M(t),\ t \in I\!R\ \}$:

$$\mathcal{M} := \{\ (x,t) \in I\!R^{n+1} \mid\ h(x,t) = 0\ \} \tag{4.45}$$

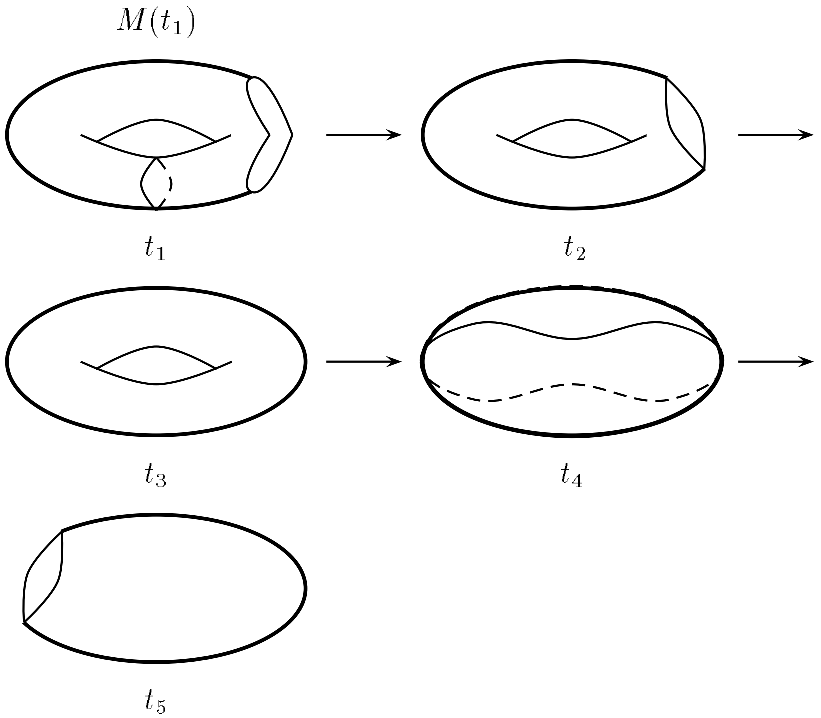
Ahora suponemos que en cada punto $(x,t) \in \mathcal{M}$ la derivada $Dh(x,t)$ no se anula, es decir, hay $LICQ$ en $I\!R^{n+1}$. Además, consideremos la función $F(x,t) \equiv t$ sobre el conjunto $\mathcal{M}$ y pidamos que los puntos críticos de $F\ |_{\mathcal{M}}$ sean no degenerados. Un pequeño cálculo muestra que un punto $(x,t) \in \mathcal{M}$ es punto crítico para $F\ |_{\mathcal{M}}$ si y solo si $D_x h(\bar{x},\bar{t}) = 0$; producto de la suposición hecha se obtiene automáticamente que $D_t h(\bar{x},\bar{t}) \neq 0$ en todo punto crítico de $F\ |_{\mathcal{M}}$. El punto crítico $(\bar{x}, \bar{t})$ para $F \mid_{\mathcal{M}}$ es entonces no degenerado si y solo si $D_x^2 h(\bar{x}, \bar{t})$ no es singular. Con eso estamos en la situación (4.43).

Las consideraciones antes hechas se pueden generalizar fácilmente a conjuntos $M(t)$ del tipo (4.31). Ahora consideramos el conjunto desplegado $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} = \{ \ (x,t) \in I\!R^{n+1} \ | \ \ h_i(x,t) = 0, \ i \in I, \ g_j(x,t) \geq 0, \ j \in J \ \} \quad (4.46)$$

Exigimos que en cada punto $\mathcal{M} \subset I\!R^{n+1}$ se satisfaga $LICQ$ y que, además, todos los puntos críticos de $t \mid_{\mathcal{M}}$ sean no degenerados. Solo en tales puntos críticos $(\bar{x}, \bar{t})$ puede alterarse localmente, para t creciente, la estructura topológica del conjunto factible $M(t)$ al sobrepasarse $\bar{t}$. En la Fig. 4.18 se ha esquematizado una sucesión de transiciones típicas.

Se observa en la Fig. 4.18 que la estructura topológica de $M(t)$ no se altera en la transición de t_1 a t_2. Esto tiene que ver con el hecho de que en los puntos críticos intermedios $\bar{t}$ $(t_1 < \bar{t} < t_2)$ la llamada Condición de Mangasarian-Fromovitz $(MFCQ)$ se satisface en cada punto $x \in M(\bar{t})$. (cf. Capítulo 5 para la definición de $MFCQ$). De hecho, para conjuntos factibles compactos la satizfacción de $MFCQ$ en cada punto es condición necesaria y suficiente para la estabilidad topológica (Ver [71]).



$t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 \quad n = 3 \quad |I| = 1 \quad |J| = 2$

Figura 4.18:

Capítulo 5

Sistemas de desigualdades lineales

En este capítulo introduciremos el concepto de punto crítico generalizado, dejándolo entender como una consecuencia natural de la condición de Fritz-John. Para ello desarrollamos brevemente teoremas de alternativas para sistemas de desigualdades lineales.

Definición 5.1
Un conjunto $K \subset I\!R^n$, se llama cono finitamente generado si existen vectores $a_1, \ldots, a_m \in I\!R^n$, tales que

$$K = K(a_1, \ldots, a_m) := \left\{ \; x \in I\!R^n | \; x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \; \lambda_i \geq 0 \; \right\}$$

Teorema 5.2 *(Caratheodory)*
Sean $a_1, \ldots, a_m \in I\!R^n$ y sea $K := K(a_1, \ldots, a_m)$. Para cada $v \in K$, $v \neq 0$; existe un subconjunto $J \subset \{1, \ldots, m\}$ y números $\lambda_j > 0$, $j \in J$, tales que los vectores a_j, $j \in J$ son linealmente independientes y

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j \tag{5.1}$$

<u>Demostración:</u>
Sea $v \in K, v \neq 0$, entonces $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0$

S.p.d.g. sean $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$ y $\lambda_i = 0$, $i = p+1, \ldots, n$. Se tiene

$$v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i\,, \quad \lambda_i > 0 \tag{5.2}$$

Si los a_i, $i = 1, \ldots, p$, no son linealmente independientes entonces $\exists \gamma_i$, $i = 1, \ldots, p$, no todos nulos, con $\sum_{i=1}^{p} \gamma_i a_i = 0$, por lo que se tiene que

$$0 = \sum_{i=1}^{p} (\mu \gamma_i)\, a_i \quad \forall\, \mu \in I\!R \tag{5.3}$$

Pero de (5.2) y (5.3) tenemos que

$$v = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \mu \gamma_i)\, a_i \quad \forall\ \mu \in I\!R \tag{5.4}$$

A través de una selección adecuada del μ en (5.4) se puede lograr que $(\lambda_i + \mu\gamma_i)$ se haga 0 para algunos índices, sin que los otros se vuelvan negativos. Con ello se logra una representación de v análoga a (5.2), donde la cantidad de a_i se reduce al menos en uno.

Repitiendo el proceso anterior obtendremos la independencia lineal de los $\{a_i\}$ que queden con coeficientes positivos. $\Box$

Lema 5.3
$K(a_1, \ldots, a_m)$ es un conjunto cerrado.

Demostración:
Sea $(x_k) \in K(a_1, \ldots, a_m)$ y $x_k \to \bar{x}$.

Cada x_k tiene una representación (5.1) con vectores linealmente independientes y con coeficientes mayores que cero. Si a partir de cierto índice $x_k = 0$ entonces $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} \in K(a_1, \ldots, a_m)$.

Si existen un número infinitom de $k \in I\!N$, tales que $x_k \neq 0$, entonces podemos suponer , sin perder generalidad ,que $x_k = \sum_{j \in J} \lambda_j^k a_j$, $J \subset \{1, \ldots, m\}$ fijo, y los a_j linealmente independientes con $\lambda_j^k > 0$.

Esto es cierto porque solo hay un número finito de subconjuntos de $\{a_1, \ldots, a_m\}$ que son linealmente independientes, y tenemos infinitos k, luego algún subconjunto tendrá que repetirse infinitas veces y podemos restringirnos a la subsucesión correspondiente.

O sea , tenemos que $x_k = A\lambda_k$, $\lambda_k > 0$ y $A_{n\times|J|}$ de rango $|J|$, de donde obtenemos que:

$$\lambda_k = (A^\top A)^{-1} A^\top x_k \tag{5.5}$$

Como $x_k \to \bar{x}$, en (5.5) tenemos que λ_k tiene límite y es igual a $\bar{\lambda} = (A^\top A)^{-1}\bar{x}$. Ademas, sabemos que $x_k = A\lambda_k \quad \forall\, k$ y, pasando al límite en k, obtenemos que $\bar{x} = A\bar{\lambda}$.

Como $\lambda_k > 0 \Rightarrow \bar{\lambda} \geq 0$, llegamos a

$$\bar{x} = \sum_{j\in J} \bar{\lambda}_j\, a_j,\ \bar{\lambda}_j \geq 0$$

Con ello tenemos que $\bar{x} \in K(a_1, \ldots, a_m)$. $\square$

Presentamos ahora el conocido teorema de alternativas.

Teorema 5.4 *(Lema de Farkas)*
Sean $a_1, \ldots, a_m$, y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple una , y solo una, de las siguientes alternativas:

I) *El sistema $\xi^\top a_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \xi^\top b > 0$ es soluble .*

II) $b \in K(a_1, \ldots, a_m)$.

<u>Demostración:</u>
Si $b \in K(a_1, \ldots, a_m)$ se tiene $b = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$, con $\lambda_i \geq 0$. Sí I) se cumpliera tendríamos $0 < \xi^\top b = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi^\top a_i \leq 0$, lo cual es contradictorio.

Si $b \notin K(a_1, \ldots, a_m)$, tenemos que $0 \in B(b, \|b\|) \cap K(a_1, \ldots, a_m)$. Este conjunto es compacto por ser acotado y cerrado (Lema 5.3). Por el Teorema 2.3 (de Weierstrass) existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|b - v\|^2 = \min_{r\in B(b,\|b\|)\cap K(a_1,\ldots,a_m)} \|b - r\|^2$$

pero por construcción

$$\|b - v\|^2 = \min_{r\in K(a_1,\ldots,a_m)} \|b - r\|^2, \quad \text{con } v \in K(a_1, \ldots, a_m) \tag{5.6}$$

Tomemos el vector $\xi = b - v$.

Sea a_i, $i \in \{1, \dots, m\}$. Tenemos que $v + \lambda a_i \in K(a_1, \dots, a_m)$ para $\lambda > 0$. Si $\xi^\top a_i > 0$, entonces

$$\|b - (v + \lambda a_i)\|^2 = \|b - v\|^2 - 2\lambda \xi^\top a_i + \lambda^2 \|a_i\|^2$$

Si $\lambda \to 0$, entonces $-2\xi^\top a_i + \lambda \|a_i\|^2 \to -2\xi^\top a_i < 0$. Luego existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que $-2\bar{\lambda}\xi^\top a_i + \bar{\lambda}^2 \|a_i\|^2 < 0$, de donde se obtiene que $\|b - (v + \bar{\lambda} a_i)\|^2 < \|b - v\|^2$, contradiciendo (5.6) pues $a_i \neq 0$.

Hemos obtenido que $\xi^\top a_i \leq 0$, $i = 1, \dots, m$ y, por lo tanto,

$$\xi^\top v \leq 0. \tag{5.7}$$

Nos queda ver que $\xi^\top b > 0$.

Si $v = 0$ entonces $\xi^\top b = \|b\|^2 > 0$, pues $b \notin K(a_1, \dots, a_m)$.

Si $v \neq 0$ podemos usar el Teorema 5.2 y representar a v como en (5.1). O sea

$$v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, a_i, \quad \lambda_i > 0 \quad \text{y los } \{a_i\} \text{ l. i.} \tag{5.8}$$

De aquí tenemos

$$(1 - t)\, v = \sum_{i=1}^{p} (1 - t)\, \lambda_i \, a_i, \quad \forall\, t \in I\!R \tag{5.9}$$

Para $t = 0$ todos los coeficientes $(1 - t)\, \lambda_i$ son positivos. Por ende existe $\bar{t} > 0$ tal que $\forall\, t \in (0, \bar{t})$ se cumple $(1 - t)\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, p$. Luego se obtiene $\forall\, t \in (0, \bar{t})$ que $(1 - t)\, v \in K(a_1, \dots, a_m)$.

Pero

$$\|b - v + tv\|^2 = \|b - v\|^2 + 2t\xi^\top v + t^2 \|v\|^2 \tag{5.10}$$

Si $\xi^\top v < 0$ entonces procediendo como en el caso anterior y utilizando (5.10) existirá $\tilde{t} < \bar{t}$ tal que $\forall\, t \in (0, \tilde{t})$

$$\|b - (v - tv)\|^2 < \|b - v\|^2$$

lo cual es contradictorio. Luego $\xi^\top v \geq 0$ y de (5.7), obtenemos que

$$\xi^\top v = 0 \tag{5.11}$$

Finalmente, dado que $\|\xi\|^2 = \xi^\top b - \xi^\top v = \xi^\top b$ y $b \notin K(a_1, \dots, a_m)$ tenemos que $\|\xi\|^2 = \|b - v\|^2 > 0$. Es decir, $\xi^\top b > 0$. $\square$

Con ayuda de lo anterior demostraremos un teorema de alternativa para sistemas de desigualdades lineales.

Teorema 5.5
Consideremos el sistema de desigualdades lineales,

$$\begin{array}{rcll} \xi^\top a_i & < & 0 & i=1,\ldots,m_a, \quad m_a \geq 1 \\ \xi^\top b_j & \leq & 0 & j=1,\ldots,m_b \\ \xi^\top c_k & = & 0 & k=1,\ldots,m_c \end{array} \tag{5.12}$$

con a_i, b_j, $c_k \in I\!R^n$.

Tenemos que se cumple una, y solo una, de las siguientes alternativas:

I) *El sistema (5.12) es soluble.*

II) $\exists u_i \geq 0$, *no todos nulos,* $v_j \geq 0$, $w_k \in I\!R$, *tales que*

$$\sum_{i=1}^{m_a} u_i a_i + \sum_{j=1}^{m_b} v_j b_j + \sum_{k=1}^{m_c} w_k c_k = 0 \tag{5.13}$$

Además, si se cumple II), se cumple también teniendo a lo sumo $n+1$ *coeficientes* u_i, v_j, w_k *no nulos.*

<u>Demostración:</u>
Consideramos el sistema

$$\begin{array}{rcrcll} & & \xi_{n+1} & > & 0 & \\ \xi^\top a_i & + & \xi_{n+1} & \leq & 0 & i=1,\ldots,m_a \\ \xi^\top b_j & & & \leq & 0 & j=1,\ldots,m_b \\ \xi^\top c_k & & & \leq & 0 & k=1,\ldots,m_c \\ \xi^\top(-c_k) & & & \leq & 0 & k=1,\ldots,m_c \end{array} \tag{5.14}$$

El sistema (5.12) es soluble si y solo si es soluble el (5.14). En efecto, si (ξ, ξ_{n+1}) soluciona (5.14), entonces ξ soluciona (5.12); y si ξ soluciona (5.12), entonces $(\xi, -max_{i=1,\ldots,m_a}\xi^\top a_i)$ soluciona (5.14).

Usemos el Teorema 5.4 (Lema de Farkas) con $b = (0,\ldots,0,1) \in I\!R^{n+1}$.

El sistema (5.14) no tiene solución, exactamente cuando el siguiente sistema es soluble.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m_a} u_i \begin{pmatrix} a_i \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{m_b} v_j \begin{pmatrix} b_j \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{m_c} w_k \begin{pmatrix} c_k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_i \geq 0,\ v_j \geq 0 \tag{5.15}$$

De (5.15) obtenemos (5.13) y de la última fila de (5.15) obtenemos que no todos los u_j son nulos.

La última afirmación se obtiene directamente del Teorema 5.2 de Caratheodory. □

Tal y como lo hemos anunciado mostraremos a continuación una condición necesaria de 1er orden, pero sin uso de LICQ.

Teorema 5.6 *(F. John)*
Sean $f, h_i, g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I, j \in J, k \geq 1$. *Si* $\bar{x} \in M[h, g]$ *es un mínimo local del problema de minimizar* $f|_M$ *entonces existen coeficientes* $\lambda \geq 0$, λ_i, $i \in I$, $\mu_j \geq 0$, $j \in J_0(\bar{x})$, *no todos nulos, tales que:*

$$\lambda Df(\bar{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x}) \tag{5.16}$$

Si $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$ *son linealmente independientes entonces al menos uno de los números* λ, μ_j, $j \in J_0(\bar{x})$ *es no nulo. Por último, siempre se puede escoger los* $\lambda, \lambda_i, \mu_j$ *en (5.16) de forma tal que, a lo sumo, haya* $n + 1$ *distintos de cero.*

<u>Demostración:</u>
Si los $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$, son linealmente dependientes entonces (5.16) es realizable con $\lambda = \mu_j = 0$, $j \in J_0(\bar{x})$.

Sean $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$ linealmente independientes. Se tiene que el siguiente sistema no es soluble

$$\begin{array}{rcll} Df(\bar{x})\xi & < & 0 & \\ Dh_i(\bar{x})\xi & = & 0 & i \in I \\ -Dg_j(\bar{x})\xi & < & 0 & j \in J_0(\bar{x}) \end{array} \tag{5.17}$$

En efecto, si ξ soluciona (5.17) existe una aplicación $x(.)$ en la clase C^1, producto de la independencia lineal de los $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$ que cumple:

$$x(0) = \bar{x}, \quad h_i(x(t)) = 0, \, i \in I, \quad \frac{\partial}{\partial t} x(0) = \xi$$

(Construcción análoga a la del Teorema 3.8)

Para cada $j \in J_0(\bar{x})$ se cumple

$$g_j(x(t)) = g_j(\bar{x}) + t\, Dg_j(\bar{x})\xi + o(t) \tag{5.18}$$

Como $g_j(\bar{x}) = 0$ y $Dg_j(\bar{x})\xi > 0$ entonces $\exists \bar{t}$ tal que $\forall\, t \in (0, \bar{t})$ se tiene $g(x(t)) > 0$ y por ende, $x(t) \in M[h, g] \quad \forall\, t \in (0, \bar{t})$.

Tambien vale

$$f(x(t)) - f(\bar{x}) = tDf(\bar{x})\xi + o(t)$$

Por lo tanto, existe $\tilde{t} \leq \bar{t}$, tal que $\forall\, t \in (0, \tilde{t}),\ f(x(t)) - f(0) < 0$. Pero esto contradice el hecho de que $\bar{x}$ sea mínimo local de $f|_M$.

Por el Teorema 5.5 podemos asegurar la existencia de coeficientes λ, λ_i, $i \in I$, μ_j, $j \in J_0(\bar{x})$, con $\lambda, \mu_j \geq 0$, tales que

$$0 = \lambda Df(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i Dh_i(\bar{x}) - \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x}) \tag{5.19}$$

De (5.19) se obtiene (5.16). Las afirmaciones posteriores se obtienen todas aplicando el Teorema 5.5 a este caso. $\square$

Observación 5.7
Notemos que si $\lambda \neq 0$ obtenemos, dividiendo por λ, que $\bar{x}$ es un punto estacionario. Además, $\lambda \neq 0$ si se cumple LICQ.

Presentaremos a continuación una condición adicional sobre M, más débil que LICQ, la cual garantiza también que $\lambda \neq 0$, y posee un interés propio.

Definición 5.8 *(Condición de regularidad de Mangasarian-Fromovitz) Se dice que un punto $\bar{x} \in M[h, g]$ cumple las condiciones de regularidad de Mangasarian-Fromovitz MFCQ si:*

1) *$Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$ son linealmente independientes.*

2) *$\exists \xi \in \mathbb{R}^n$ tal que*

- *$Dh_i(\bar{x})\xi = 0, \quad i \in I$*
- *$Dg_j(\bar{x})\xi > 0, \quad j \in J_0(\bar{x})$*

Se dice que $M[h, g]$ cumple MFCQ si todo punto $x \in M[h, g]$ cumple MFCQ.

Teorema 5.9
Sea f, h_i, $g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$, $k \geq 1$. Sea $\bar{x} \in M[h,g]$ un mínimo local para $f|_{M[h,g]}$. Si en $\bar{x}$ se cumple MFCQ entonces $\bar{x}$ es un punto estacionario.

Demostración:
Del Teorema 5.6 y de la condición 1) de MFCQ (Definición 5.8) obtenemos (5.16) y no todos los λ, μ_j, $j \in J_0(\bar{x})$ son nulos.

Si $\lambda = 0$, entonces algún $\mu_{\bar{p}}, \bar{p} \in J_0(\bar{x})$, es estrictamente positivo. De (5.16):

$$0 = 0\xi = \sum_{i \in I} \lambda_i Dh_i(\bar{x})\xi + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x})\xi.$$

Luego tendríamos, debido a MFCQ, que

$$0 = \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x})\xi \geq \mu_{\bar{p}} Dg_p(\bar{x})\xi > 0$$

Por ende $\lambda \neq 0$ y $\bar{x}$ es un punto estacionario. □

Una interesante propiedad de la condición MFCQ es la siguiente.

Teorema 5.10 *(Ver Gauvin [44])*
Supongamos que $\bar{x} \in M[h,g]$, es un punto estacionario para $f|_{M[h,g]}$, con f, h_i, $g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $k \geq 1$. Existe solución del sistema

$$Df(\bar{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x}) \quad \mu_j \geq 0,\ j \in J_0(\bar{x}) \tag{5.20}$$

pero, además, el conjunto

$$\left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{m+p} |\ (\lambda, \mu) \text{es solución de (5.20)} \right\} \tag{5.21}$$

donde ($|J_0(\bar{x})| = p$ e $|I| = m$), es acotado si y solo si se cumple MFCQ en $\bar{x}$.

Demostración:
("$\Rightarrow$")

Supongamos que (5.21) es acotado, debemos probar que $\bar{x}$ cumple MFCQ. Si $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$, no son linealmente independientes existe entonces $\tilde{\lambda} \in I\!R^m$, con $\tilde{\lambda} \neq 0$, tal que

$$\sum_{i \in I} \tilde{\lambda}_i Dh_i(\bar{x}) = 0 \tag{5.22}$$

Como $\bar{x}$ es un punto estacionario, tenemos que existen $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ que pertenecen a (5.21). Usando además (5.22) obtenemos que $\forall\, t \in I\!R$

$$Df(\bar{x}) = \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i + t\tilde{\lambda}_i)\, Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{\mu}_j Dg_j(\bar{x})$$

Por lo tanto $(\bar{\lambda} + t\tilde{\lambda}, \bar{\mu})$ está en (5.21) $\forall\, t \in I\!R$. Pero

$$\|(\bar{\lambda} + t\tilde{\lambda}, \bar{\mu})\| \geq \|\bar{\lambda} + t\tilde{\lambda}\| = \sqrt{\|\bar{\lambda}\|^2 + 2t\bar{\lambda}^{\mathsf{T}}\tilde{\lambda} + t^2\|\tilde{\lambda}\|^2} \tag{5.23}$$

De (5.23) y $\tilde{\lambda} \neq 0$ obtenemos que $\|(\bar{\lambda} + t\tilde{\lambda}, \bar{\mu}\| \to +\infty$, si $t \to +\infty$, lo cual contradice la acotación de (5.21).

Supongamos por otra parte, que el sistema es insoluble

$$\begin{array}{rcl} Dh_i(\bar{x})\xi & = & 0, \quad i \in I \\ Dg_j(\bar{x})\xi & > & 0, \quad j \in J_0(\bar{x}) \end{array}$$

Gracias al Teorema 5.5 existen $\tilde{\lambda} \in I\!R^m, \tilde{\mu} \in I\!R^p, \tilde{\mu}_j \geq 0$, donde $\tilde{\mu} \neq 0$, tales que

$$0 = \sum_{i \in I} \tilde{\lambda}_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \tilde{\mu}_j Dg_j(\bar{x}), \quad \tilde{\mu} \geq 0, \quad \tilde{\mu} \neq 0 \tag{5.24}$$

Usando (5.24), $\bar{\lambda}$ y $\bar{\mu}$, obtenemos $\forall\, t \geq 0$, la expresión:

$$Df(\bar{x}) = \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i + t\tilde{\lambda}_i)\, Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} (\bar{\mu}_j + t\tilde{\mu}_j)\, Dg_j(\bar{x}).$$

O sea $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + t(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ pertenece al conjunto definido en (5.21), $\forall\, t > 0$.

Pero $\|(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + t(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})\| \geq \|\bar{\mu} + t\tilde{\mu}\| \to +\infty$ si $t \to +\infty$, lo cual contradice de nuevo la acotación de (5.21).

("$\Leftarrow$")

Supongamos que se cumple MFCQ en $\bar{x}$. Usando el ξ que nos brinda MFCQ sabemos que si (λ, μ) están en (5.21) debe lograrse

$$Df(\bar{x})\xi = \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x})\xi. \tag{5.25}$$

Teniendo en cuenta que $\mu_j \geq 0$, obtenemos de (5.25) que

$$Df(\bar{x})\xi \geq (\min_{j \in J_0(\bar{x})} (Dg_j(\bar{x})\xi)) \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j \geq \min_{j \in J_0(\bar{x})} (Dg_j(\bar{x})\xi) \|\mu\|_1, \tag{5.26}$$

donde $\|\mu\|_1 = \sum |\mu_i|$. Como $\min_{j \in J_0(\bar{x})} Dg_j(\bar{x})\xi > 0$, si el conjunto (5.21) proyectado sobre las μ no es acotado, entonces existen (λ_k, μ_k) en (5.21) con $\|\mu_k\|_1 \to +\infty$. Pero esto contradice (5.26). Por ende, existe una constante K tal que si (λ, μ) están en (5.21) $\|\mu\| < K$. Para terminar, usando la independencia lineal de $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$ podemos escribir, para todo (λ, μ) en (5.21), que

$$\lambda = \left[(Dh(\bar{x}))(Dh(\bar{x}))^{\mathsf{T}}\right]^{-1} \left(D^{\mathsf{T}} f(\bar{x}) + D^{\mathsf{T}} g(\bar{x})\mu\right) \tag{5.27}$$

Aquí $Dh(\bar{x})$ es una matriz de tamaño $|I| \times n$ tal que su fila i-ésima es $Dh_i(\bar{x})$ (análogamente para $Dg(\bar{x})$). De (5.27) obtenemos que si los μ están acotados también lo están los λ. $\square$

Observación 5.11
Notemos que (5.21) es un poliedro y es siempre cerrado. De acuerdo al teorema anterior, obtenemos que (5.21) es un poliedro compacto si y solo si se cumple MFCQ.

Tomando el resultado del Teorema 5.6 resulta natural introducir el concepto de punto crítico generalizado, concepto básico de la optimización paramétrica.

Definición 5.12
Sean $f, h_i, g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $k \geq 1$, $i \in I$, $j \in J$. Llamaremos a $\bar{x} \in M[h, g]$ punto crítico generalizado si el conjunto de vectores

$$\{\ Df(\bar{x}),\ Dh_i(\bar{x}),\ i \in I,\ \ Dg_j(\bar{x}),\ j \in J_0(\bar{x})\ \}$$

es linealmente dependiente.

Utilizaremos la abreviatura "punto c.g." para referirnos a un punto crítico generalizado (la abreviatura proviene del término en inglés generalized critical point).

Capítulo 6

Problemas uniparamétricos

En el presente y los capítulos siguientes consideramos el problema de optimización $P(t)$, introducido en la Sección 4.4, el cual depende de un parámetro $t \in I\!R$:

$$P(t) \quad \text{Minimizar } \; f(\cdot, t) \; \text{ sobre el conjunto factible } \; M(t),$$

Este problema se puede escribir formalmente como:

$$P(t) \quad \min\{f(\cdot, t) \mid x \in M(t)\},$$

donde

$$M(t) = \{x \in I\!R^n \mid h_i(x, t) = 0, i \in I, g_j(x, t) \geq 0, j \in J\},$$

con $I = \{1, \ldots, m\}$, $m < n$, $J = \{1, \ldots, s\}$, $H = (h_1, \ldots, h_m)$, $G = (g_1, \ldots, g_s)$ y las funciones cumplen $f, h_i, g_j \in C^3(I\!R^n, I\!R)$, para $i \in I$, $j \in J$.

Estamos interesados en el conjunto de puntos críticos generalizados de $P(t)$. De acuerdo a la definición dada en el Capítulo 5 (Definición 5.12) denominamos a $(\bar{x}, \bar{t}) \in I\!R^n \times I\!R$ un punto crítico generalizado (punto c.g.) de $P(\bar{t})$ cuando $\bar{x} \in M(\bar{t})$ y, además , el conjunto

$$\{D_x f(\bar{x}, \bar{t}), D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})\}$$

es linealmente dependiente, donde $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{j \in J \mid g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0\}$.

El conjunto que nos interesa lo definimos como

$$\Sigma_{gc} = \{(x,t) \in I\!\!R^n \times I\!\!R \mid (x,t) \text{ es un punto c.g. de P(t)}\}.$$

Obviamente, para cada punto estacionario $\bar{x}$ de $P(\bar{t})$ (Ver Definición 3.5), se tiene que $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}$ y conforme a los criterios de optimalidad que hemos discutido en el Capítulo 3, se sigue igualmente que $(\tilde{x},\tilde{t}) \in \Sigma_{gc}$ para cada punto $\tilde{x}$ que es mínimo local de $P(\tilde{t})$.

El conjunto Σ_{gc} se compone "en general"(localmente considerado) de un número finito de curvas unidimensionales. Los métodos de seguimiento utilizados para el cálculo de puntos críticos generalizados (resp. puntos estacionarios o mínimos locales), en relación con valores fijos de los parámetro s $t^1, t^2, \ldots$, se basan sustancialmente en tal hecho. En los capítulos 7 y 8 nos dedicaremos ampliamente a tales métodos .

En este capítulo describiremos la estructura del conjunto Σ_{gc} en el "caso general". En la primera parte definimos cinco tipos diferentes de puntos críticos generalizados (puntos c.g. de Tipo ν, $\nu = 1,2,3,4,5.$) e investigamos, para cada uno de ellos, localmente, las características topológicas y analíticas de Σ_{gc}^{ν}. Para una discusión detallada sobre este tema referimos a [92, 93].

Sea la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \left\{ (f,H,G) \in C^3(I\!\!R^n \times I\!\!R, I\!\!R)^{1+m+s} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Cada punto c.g.} \\ \text{del correspondiente} \\ \text{P(t) es de alguno} \\ \text{de los tipos 1,2,3,4,5} \end{array} \right\}$$

El caso general que nos interesa se puede caracterizar ahora a través de la condición $(f,H,G) \in \mathcal{F}$. En la segunda sección demostraremos dos teoremas que confirman esta observación.

Primero ofreceremos perturbaciones concretas, con ayuda de parámetros complementarios, de modo tal que la función vectorial resultante pertenezca a la familia $\mathcal{F}$ para casi todos los valores del parámetro complementario (teorema de perturbación). El sentido de la expresión "casi todos" será esclarecido posteriormente y siempre se referirá a la medida de Lebesgue de la dimensión correspondiente. En particular, tales parámetros pueden escogerse arbitrariamente pequeños.

Luego mostraremos que el conjunto $\mathcal{F}$ es abierto y denso en el espacio de funciones $C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)^{1+m+s}$ respecto a la topología fuerte (o topología de Whitney) (teorema de genericidad).

Los resultados que exponemos en el presente capítulo, sobre la estructura del conjunto Σ_{gc}, son fundamentales para la discusión ofrecida en los dos capítulos posteriores, sobre métodos de seguimiento de curvas para la solución de $P(t)$

6.1 Los cinco tipos

En esta sección describimos los cinco tipos de puntos para Σ_{gc} que han sido introducidos y discutidos detalladamente en [92, 93]. Sean definidos los conjuntos

$$\Sigma_{gc}^{\nu} = \{(x,t) \in \Sigma_{gc} \mid (x,t) \text{ es un punto de tipo } \nu\}$$

para $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$.

Más adelante ofreceremos, en particular, las denominadas formas normales para cada tipo, las cuales describen localmente las diversas situaciones características de un punto crítico generalizado. Tales formas se construyen, para un punto $(\bar{x}, \bar{t})$, en coordenadas locales adecuadas. Para facilitar las cosas, supondremos, a la hora de representar dichas formas normales, que $(f, H, G) \in C^\infty(I\!R^n \times I\!R, R)^{1+m+s}$. La transformación de coordenadas correspondiente, en coordenadas locales, tendrá la forma

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \qquad D\psi_2(t) > 0. \tag{6.1}$$

donde $v = \psi_2(t)$ aparece como "parámetro transformado" en vez del parámetro t y $\psi(\bar{x}, \bar{t}) = (0_n, 0)$, 0_n indicando el origen en $I\!R^n$. Para mayores referencias ver [87, 100].

Ahora deseamos mostrar que la satisfacción de la condición de Mangasarian- Fromowitz MFCQ (cfr. Capítulo 5) es invariante para transformaciones de coordenadas de la forma 6.1 (lo mismo vale para LICQ).

Para ello, sea $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \Sigma_{gc}$, $(\tilde{y}, \tilde{v}) = \psi(\tilde{x}, \tilde{t})$ y supóngase que se satisface MFCQ en $\tilde{x}$ con relación a $P(\tilde{t})$. Es así que existe un $w \in I\!R^n$ con las propiedades

1. $D_x h_i(\tilde{x},\tilde{t})w = 0,\ i \in I$
2. $D_x g_j(\tilde{x},\tilde{t})w > 0,\ j \in J_0(\tilde{x},\tilde{t})$

Dado que $D_x\psi_1(\tilde{x},\tilde{t})$ es no singular y que, por tanto, $D_y\psi^{-1}(\tilde{y},\tilde{v})$ también es no singular , cumpliéndose que $D_y\psi^{-1}(\tilde{y},\tilde{v}) = (D_x\psi_1(\tilde{x},\tilde{t}))^{-1}$, obtenemos que:

- El conjunto $\left\{D_y h_i(\psi^{-1}(\tilde{y},\tilde{v}))\left(= D_x h_i(\tilde{x},\tilde{t})D_y\psi_1^{-1}(\tilde{y},\tilde{v})\right), i \in I\right\}$ es linealmente independiente.
- Para $\tilde{w} = D_x\psi_1(\tilde{x},\tilde{t})w$ vale que:
  1. $D_y h_i(\psi^{-1}(\tilde{y},\tilde{v}))\tilde{w} = 0, \quad i \in I$
  2. $D_y g_j(\psi^{-1}(\tilde{y},\tilde{v}))\tilde{w} > 0, \quad j \in J_0(\tilde{x},\tilde{t})$

donde $J_0(\tilde{x},\tilde{t}) = \{j \in J \mid g_j(\psi^{-1}(\tilde{y},\tilde{v})) = 0\}$

El teorema de genericidad (Sección 6.2) se enuncia en términos de una topología adecuada en el espacio de funciones $C^k(I\!R^n, R)^{1+m+s}$, a saber, la topología fuerte (o topología de Whitney), la cual designaremos con $C_s^{\bar{k}}$-topología, $\bar{k} \leq k$ (cfr. [81, 90]).

Dada una función $\bar{f} \in C^k(I\!R^n, R)$ y números naturales $\alpha_l, l = 1,\ldots,n$, tales que $\mid \alpha \mid \leq \bar{k}$, donde $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $\mid \alpha \mid = \sum_{l=1}^n \alpha_l$, denotamos con $\partial^{|\alpha|}f = \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\ldots\partial^{\alpha_n}x_n}$ a la α-ésima derivada parcial de $\bar{f}$. Por ejemplo para $\mid \alpha \mid \leq 2$ nos referimos a las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
|\alpha| &= 0 \quad \partial^0 f = f \\
|\alpha| &= 1 \quad \frac{\partial^1 f}{\partial^0 x_1\ldots\partial^0 x_{i-1}\partial^1 x_i\partial^0 x_{i+1}\ldots\partial^0 x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1,\ldots,n, \\
|\alpha| &= 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ i,j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Además , sean

$$C^0(I\!R^n, I\!R_+) = \{\epsilon : I\!R^n \mapsto I\!R \mid \epsilon \text{ es continua y } \epsilon(x) > 0\ \forall x \in I\!R^n\}$$

y

$$V_{\epsilon,\bar{f}}^{\bar{k}} = \left\{\tilde{f} \in C^k(I\!R^n, I\!R) \,\middle|\, \begin{array}{c} \left|\partial^{|\alpha|}\bar{f}(x) - \partial^{|\alpha|}\tilde{f}(x)\right| < \epsilon(x) \\ \forall x \in I\!R^n \text{ y cada } \alpha \text{ con } \mid \alpha \mid \leq \bar{k} \end{array}\right\}$$

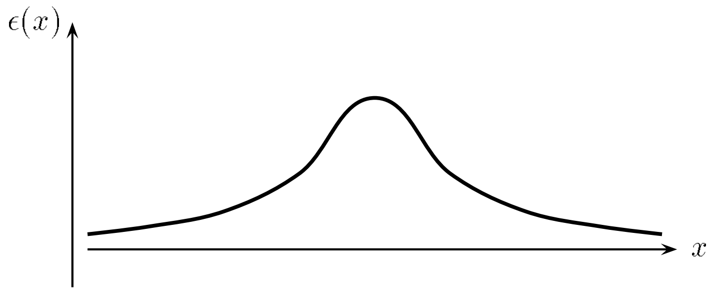


Figura 6.1: $\inf_x \epsilon(x) = 0$

para $\epsilon \in C^0(I\!R^n, I\!R_+)$.

Los conjuntos $V^{\bar{k}}_{\epsilon,\bar{f}}$ con $\epsilon \in C^0(I\!R^n, I\!R_+)$ constituyen, para una función dada $\bar{f} \in C^k(I\!R^n, R)$, una base puntual para la $C^{\bar{k}}_s$ topología en el espacio de funciones $C^k(I\!R^n, R)$. Al espacio producto $C^k(I\!R^n, R)^{1+m+s}$ lo dotamos de la $C^{\bar{k}}_s$- topología producto inducida correspondiente.

Observamos que puede darse $\inf_{x\in I\!R^n} \epsilon(x) = 0$ para $\epsilon \in C^0(I\!R^n, I\!R_+)$ (Ver Figura 6.1) y, con ello, puede tomarse en cuenta efectos asintóticos en relación con perturbaciones mediante funciones constantes $\tilde{\epsilon} > 0$.
En la caracterización siguiente de Σ^{ν}_{gc}, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ escogemos $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}$. Sin pérdida de generalidad aceptamos que $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$, $p \leq s$ y definimos al conjunto $J_+(\mu) = \{j \in \{1, \ldots, p\} \mid \mu_j \neq 0\}$, para $\mu \in I\!R^p$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$.

Primeramente diremos que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$ cuando $\bar{x}$ es un punto no-degenerado de $P(\bar{t})$. Conforme a la definición dada en la Sección 4.3 quedan satisfechas las siguientes condiciones en un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$:

(1a) Se cumple LICQ en $\bar{x} \in M(\bar{t})$, es decir, los vectores $\{D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), j = 1, \ldots, p\}$ son linealmente independientes. Con ello, existen multiplicadores de Lagrange unívocamente determinados $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$, tales que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es una solución de $H^p(x, \lambda, \mu, \bar{t}) = 0$ donde H^p esta definida por

$$H^p(x,\lambda,\mu,t) = \begin{bmatrix} D_x L(x,\lambda,\mu,t) \\ h_1(x,t) \\ \vdots \\ h_m(x,t) \\ g_1(x,t) \\ \vdots \\ g_p(x,t) \end{bmatrix}$$

y $L(x, \lambda, \mu, t)$ se entiende como

$$L(x,\lambda,\mu,t) = f(x,t) - \sum_{i\in I} \lambda_i h_i(x,t) - \sum_{j\in J} \mu_j g_j(x,t)$$

(1b) $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = J_+(\bar{\mu})$

(1c) $D_x^2 f(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i D_x^2 h_i(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j D_x^2 g_j(\bar{x},\bar{t}) \Big|_{T_{\bar{x}}M(\bar{t})}$ no es singular, donde

$$T_{\bar{x}}M(\bar{t}) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid D_x h_i(\bar{x},\bar{t})\xi = 0, i \in I, D_x g_j(\bar{x},\bar{t})\xi = 0, j = 1..p\}.$$

Lema 6.1 *(cfr. Teorema 2.1 [96]).*
Sean $A_{(n_1,n_1)}$ una matriz simétrica y $B_{(n_1,n_2)}$ una matriz con $n_1 \geq n_2$ y $B^\perp = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_1} \mid B^\top \tilde{x} = 0\}$. Entonces el número de valores propios positivos (resp. negativos o nulos) de la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & O \end{pmatrix}$ es igual a la suma del número de valores propios positivos (resp. negativos o nulos) de $A_{|B^\perp}$ más rango$B$ (resp. rango$B$ o $n_2 -$ rango$B$).

El Lema 6.1 implica que las condiciones (1a) y (1c), juntas, son equivalentes a la condición siguiente:

(1c') $D_(x, \lambda, \mu) H^p(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ es no singular.

La condición (1c') es esencial para el estudio topológico del conjunto Σ_{gc} en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^1$. De (1c') y del teorema de la función implícita se obtiene la existencia de vecindades $U \subset \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$,

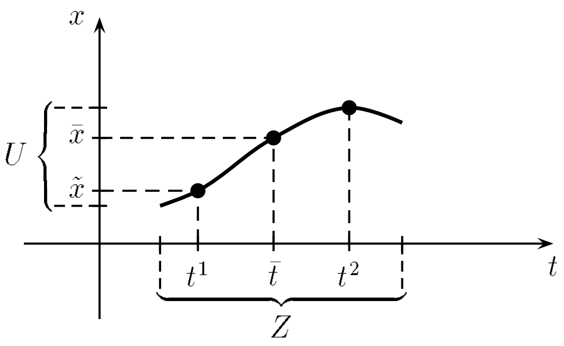


Figura 6.2: Σ_{gc} en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$.

$V \subset I\!R^m$ de $\bar{\lambda}$, $W \subset I\!R^p$ de $\bar{\mu}$ y $Z \subset I\!R$ de $\bar{t}$, así como de C^1-funciones, unívocamente determinadas

$$(x^p, \lambda^p, \mu^p) : t \in Z \mapsto (x^p(t), \lambda^p(t), \mu^p(t)) \in U \times V \times W$$

con las siguientes características:

1. $H^p(x^p(t), \lambda^p(t), \mu^p(t), t) = 0$,

2. $\Sigma_{gc} \cap \{U \times Z\} = \{(x^p(t), t) \mid t \in Z\}$ (cfr. Figura 6.2).

3. $x^p(t)$ es un punto crítico no degenerado de $P(t)$, $t \in Z$; por tanto, $(x^p(t), t) \in \Sigma^1_{gc}$ para cada $t \in Z$.

De la Sección 4.3 sabemos que, en el caso no paramétrico, la función f adquiere la forma 4.24 en una vecindad de un punto no degenerado, gracias a una adecuada transformación de coordenadas.

Por lo tanto, si $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$ existe una transformación local de coordenadas, de la forma (6.1) de modo que, en las nuevas coordenadas, el conjunto $M(t)$ adquiere la forma $0_m \times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p}$, para valores de t cercanos a $\bar{t}$ y la función f adquiere la forma siguiente:

$$\delta(v) - \sum y_{i_1} + \sum y_{i_2} - \sum y^2_{i_3} + \sum y^2_{i_4} \qquad (6.2)$$

donde $v = \psi_2(t)$, $\delta(v) = f(\psi^{-1}(0_n, v))$ para t cercano a $\bar{t}$. Análogamente a (4.24) i_1 representa las primeras LI-coordenadas e i_2, i_3, i_4 recorren las siguientes LCI, QI, QCI-coordenadas.

De aquí se sigue, en particular, que la tupla de índices (LI,LCI,QI,-QCI) permanece constante para cada $t \in Z$ y es igual, en consecuencia, a los correspondientes índices de $\bar{x}$. Entonces, cuando $\bar{x}$ es un punto estacionario de $P(t)$ (resp. mínimo local, punto de ensilladura, máximo local) también es $x^p(t)$ un punto estacionario de $P(t)$ (resp. mínimo local, punto de ensilladura, máximo local) para cada $t \in Z$.

Tales propiedades se adecúan muy bien con la utilización de métodos de seguimiento. Con ayuda de la Figura 6.2 podemos ver esto más de cerca. Cuando el objetivo consiste en calcular un punto mínimo local de $P(t^2)$ partiendo de un mínimo local conocido $\tilde{x}$ de $P(t^1)$, $t^1 \in Z$, entonces podemos lograr una aproximación de la curva $\{(x^p(t), t), t \in [t^1, t^2]\}$ por medio de algún procedimiento de seguimiento que utilice el método de Newton, es decir, que aproveche esencialmente la no singularidad de

$$D_{(x,\lambda,\mu)}H^p(x, \lambda, \mu, t)\Big|_{(x,\lambda,\mu,t)=(x^p(t),\lambda^p(t),\mu^p(t),t)}$$

para $t \in [t^1, t^2]$.

De tal modo, es posible alcanzar, en un número finito de pasos, una aproximación del punto mínimo local $x^p(t^2)$ de $P(t^2)$ con el grado deseado de exactitud (Ver Capítulo 7 para una discusión detallada sobre este tema). Pero en general, no será posible disponer de una función selección $x^p(t)$ continua sobre un intervalo arbitrario $[t^1, t^2]$, puesto que pueden existir puntos en el conjunto Σ_{gc} que no son de Tipo 1 y en los cuales alguna de las propiedades (1a), (1b) o (1c) no se satisfacen. A estos puntos nos dedicaremos después del Lema 6.3.

Observación 6.2
Mediante las siguientes consideraciones podemos referirnos a la exposición hecha a propósito del caso sin restricciones analizado en la Sección 4.4.

Considerado localmente, en una vecindad de un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$, el conjunto Σ_{gc} es idéntico al conjunto de los puntos críticos generalizados del problema

$$P^p(t) \quad \min\{f(\cdot, t) \mid x \in M^p(t)\} \tag{6.3}$$

donde $M^p(t) = \{x \in I\!R^n \mid h_i(x,t) = 0, i \in I, g_j(x,t) = 0, j = 1, \ldots, p\}$. De la propiedad (1a) y del teorema sobre la función implícita se sigue la existencia de una partición de la variable $x \in I\!R^n$ en vectores $x^1 \in I\!R^{m+p}$, $x^2 \in I\!R^{n-m-p}$, la cual podemos suponer, s.p.d.g, de la forma $x = (x^1, x^2)$,(en particular $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2)$), de vecindades $U^1 \subset I\!R^{m+p}$ de $\bar{x}^1$, $U^2 \subset I\!R^{n-m-p}$ de $\bar{x}^2$ y $Z^1 \subset I\!R$ de $\bar{t}$, así como de una función unívocamente determinada

$$\hat{x}^1 : \left(x^2, t\right) \in U^2 \times Z^1 \mapsto \hat{x}^1(x^2, t) \in U^1$$

tal que $M^p(t) \cap \{U^1 \times U^2\} = \{(\hat{x}^1(x^2, t), x^2) \,|x^2 \in U^2\}$ para $t \in Z^1$.

Para la investigación del conjunto Σ_{gc} podemos considerar en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$ el problema sin restricciones siguiente:

$$\widetilde{P}(t) \qquad \min_{x^2 \in U^2} f(\hat{x}^1(\cdot, t), t)$$

en sustitución del problema original $P(t)$ (o $P^p(t)$).

Lema 6.3

Sea $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$. Entonces existe una vecindad $U(\bar{x}, \bar{t}) \subset I\!R^n \times I\!R$ de $(\bar{x}, \bar{t})$ y una C^3_S-vecindad V de (f, H, G) en el espacio de funciones $C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)^{1+m+s}$ tal que, para todo $(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in V$, vale:

$$\Sigma_{gc}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}) \cap U(\bar{x}, \bar{t}) \subset \Sigma^1_{gc}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$$

donde $\Sigma_{gc}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ (resp. $\Sigma^\nu_{gc}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ representa el conjunto de puntos críticos generalizados (resp. el conjunto de puntos críticos generalizados de tipo $\nu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$) del problema uniparamétrico $P^{(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})}(t)$ descrito a través de $(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$.

Demostración:

Supongamos que dicha afirmación sea falsa. Entonces existen vecindades $U^\rho(\bar{x}, \bar{t}) \subset I\!R^n \times I\!R$ de $(\bar{x}, \bar{t})$ y C^3_S-vecindad V^ρ de (f, H, G) en $C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)^{1+m+s}$, así como aplicaciones $(f^\rho, H^\rho, G^\rho) \in V^\rho$ y puntos críticos generalizados (x^ρ, t^ρ) de $P^\rho(t)$ $\left(= P^{(f^\rho, H^\rho, G^\rho)}(t)\right)$ con las siguientes propiedades (aquí el índice ρ recorre todo el conjunto de números naturales $I\!N$):

1. $(x^\rho, t^\rho) \mapsto (\bar{x}, \bar{t})$

2. Para todo $j \in J$ (y análogamente para cada $i \in I$) vale:

$$\begin{aligned} g_j^\rho(x^\rho, t^\rho) &\mapsto g_j(\bar{x}, \bar{t}) \\ Dg_j^\rho(x^\rho, t^\rho) &\mapsto Dg_j(\bar{x}, \bar{t}) \\ D^2 g_j^\rho(x^\rho, t^\rho) &\mapsto D^2 g_j(\bar{x}, \bar{t}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

3. $(x^\rho, t^\rho) \notin \Sigma^1_{gc}(f^\rho, H^\rho, G^\rho)$. Es decir, al menos una de las correspondientes condiciones $(1a)$, $(1b)$ o $(1c)$ no se satisface.

Ahora suponemos, luego de una eventual reducción a una subsucesión, que la condición $(1a)$ no se satisface para cada (x^ρ, t^ρ) (para $(1b)$ y $(1c)$ la prueba es análoga). Las propiedades de continuidad de las funciones en juego implican entonces, s.p.d.g., que $g_j^\rho(x^\rho, t^\rho) > 0$ para todo $j \in J \backslash J_0(\bar{x}, \bar{t})$. Pero de (6.4) y del hecho que $(1a)$ se satisface para $(\bar{x}, \bar{t})$ se sigue que a partir de cierto índice suficientemente grande $(1a)$ también vale para (x^ρ, t^ρ). Nuestro supuesto es entonces falso y el lema queda demostrado. □

Consideremos ahora Σ^2_{gc}. Se tiene que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^2_{gc}$ cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

(2a) $\bar{x}$ es un punto no degenerado del problema $P^p(t)$ con $p \geq 1$, donde $P^p(t)$ se define como en (6.3).

(2b) Para los multiplicadores de Lagrange, unívocamente determinados, $\bar{\lambda} \in I\!R^m$, $\bar{\mu} \in I\!R^p$ con $H^p(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) = 0$ se cumple que $|J_0(\bar{x}, \bar{t}) \backslash J_+(\bar{\mu})| = 1$. Es decir, no se satisface la condición $(1b)$. S.p.d.g. supóngase que $\bar{\mu}_p = 0$.

(2c) $\bar{x}$ es un punto no degenerado del problema $P^{p-1}(\bar{t})$ que se obtiene del problema $P^p(\bar{t})$ cuando se sustituye p por p-1.

(2d) Igual que en el caso $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$ se obtiene de (2a) y (2c) la existencia de vecindades U,V,W (resp.Z) de $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ (resp. $\bar{t}$), así como funciones de clase C^1, unívocamente determinadas para cada $l = p, p-1$,

$$x^l, \lambda^l, \mu^l : t \in Z \mapsto \Big(x^l(t), \lambda^l(t), \mu^l(t)\Big) \in U \times V \times W$$

con $\mu_p^{p-1}(t) = -g_p\left(x^{p-1}(t), t\right)$, tales que $\left(x^l(t), t\right)$ es un punto crítico generalizado de $P^l(t)$. Para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$ se satisface además la condición siguiente:

$$D_t g_p\left(x^{p-1}(t), t)\right)|_{t=\bar{t}} \neq 0. \tag{6.5}$$

Si utilizamos las condiciones $(2b)$ y $(2c)$ podemos hacer, para un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$, una consideración análoga a la hecha en la Observación 6.2, pero esta vez sobre el problema $P^{p-1}(t)$. Por tal motivo supondremos, en lo que sigue, que la estructura topológica del conjunto Σ_{gc}, en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$, queda caracterizada por $I = \emptyset$ y $p = 1$ $(=|\ J_0(\bar{x}, \bar{t})\ |)$.

De la definición de H^p dada en la condición $(1a)$ se sigue que:

$$\begin{array}{rcl} D_x H^0(\bar{x}, \bar{t}) D x^0(\bar{t})^\top + D_{tx} f(\bar{x}, \bar{t})^\top & = & 0 \\ D_{(x,\mu)} H^1(\bar{x}, \bar{t}, \bar{\mu}) \begin{pmatrix} D x^1(\bar{t})^\top \\ D\mu^1(\bar{t}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{tx} f(\bar{x}, \bar{t})^\top \\ D_t g_1(\bar{x}, \bar{t}) \end{pmatrix} & = & 0 \end{array}$$

y esto último implica que

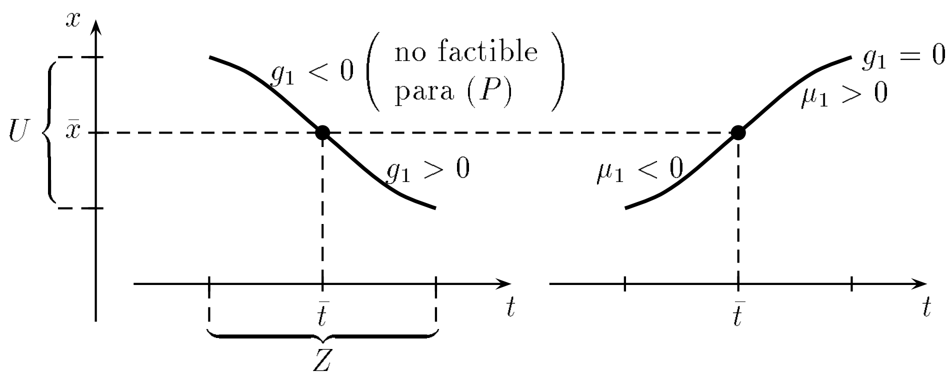
$$\begin{array}{rcl} D_x H^0(\bar{x}, \bar{t}) D x^1(\bar{t})^\top - D\mu^1(\bar{t}) D_x g_1(\bar{x}, \bar{t})^\top + D_{tx} f(\bar{x}, \bar{t})^\top & = & 0 \\ D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) D x^1(\bar{t})^\top + D_t g_1(\bar{x}, \bar{t}) & = & 0 \end{array} \tag{6.6}$$

Si se tuviera $D\mu^1(\bar{t}) = 0$, entonces también se tendría $Dx^0(\bar{t}) = Dx^1(\bar{t})$ ($D_x H^0(\bar{x}, \bar{t})$ es no singular) y con ello, a causa de (6.6), también $D_t g_1(x^0(t), t)_{|_{t=\bar{t}}} = 0$, lo cual contradice a (6.5). Por lo tanto obtenemos

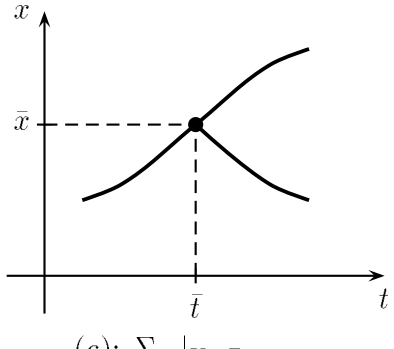
$$\begin{array}{rcl} D\mu^1(\bar{t}) & \neq & 0 \\ D_t g_1(x^0(t), t)\ |_{t=\bar{t}} & \neq & 0 \end{array}$$

de donde se sigue, en particular - y luego de una eventual disminución de las vecindades U y Z - que $\{U \times Z\} \cap \{\Sigma_{gc} \backslash \{(\bar{x}, \bar{t})\} \subset \Sigma_{gc}^1$. En la Figura 6.3(a) (6.3(b)) se ha representado el conjunto de puntos críticos generalizados Σ_{gc}^0 (resp. Σ_{gc}^1) de $P^0(t)$ $(P^1(t))$, restringido a $U \times Z$, para el caso $D_t g_1(x^0(t), t)\ |_{t=\bar{t}} > 0$ $(D\mu^1(\bar{t}) > 0)$.

Entonces el conjunto $\Sigma_{gc}\ |_{U \times Z}$ se compone de $\Sigma_{gc}^1\ |_{U \times Z}$ y de la rama factible de $\Sigma_{gc}^0\ |_{U \times Z}$, o sea, la rama para la cual se tiene que $g_1(x, t) \geq 0$ (Ver Figura 6.3(c)).



(a): $D_t g_1(x^0(t), t)|_{t=\bar{t}} > 0$ (b): $D\mu_1(\bar{t}) > 0$



(c): $\Sigma_{gc}|_{U \times Z}$

Figura 6.3:

Cuando $\bar{x}$ es un punto estacionario de $P(\bar{t})$ -o sea, cuando se cumple que $\bar{\mu}_j \geq 0,\ j \in J_0(\bar{x},\bar{t})$- entonces se plantean para el conjunto

$$\Sigma_{stat} = \{(x,t) \in \Sigma_{gc} \mid x \text{ es un punto estacionario de P(t)}\}$$

las siguientes dos posibilidades:

Caso 1. (Ver Figura 6.4(a)): signo $D\mu^1(\bar{t}) =$ signo $D_t g_1(x^0(t),t)\mid_{t=\bar{t}}$. Entonces $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto de retorno, así denominado, en el conjunto Σ_{stat}. En la Figura 6.4 se ofrece los correspondientes índices (LI, LCI, QI, QCI) de las respectivas curvas parciales de Σ_{stat}. Observamos, en particular, que el índice QI cambia en una unidad al pasarse el punto $(\bar{x},\bar{t})$; por ejemplo, de un mínimo local se pasa a un punto de ensilladura (Puede incluso suceder, para $n-m=1$, que se pase a un máximo local).

Caso 2. (Ver Figura 6.4(b)): signo $D\mu^1(\bar{t}) \neq$ signo $D_t g_1(x^0(t),t)\mid_{t=\bar{t}}$. En este caso, el conjunto $\Sigma_{stat}\mid_{U\times Z}$ será descrito por una función Lipschitz-continua dada por $\hat{x}: t \in Z \mapsto \hat{x}(z) \in U$ (Ver también [27]).

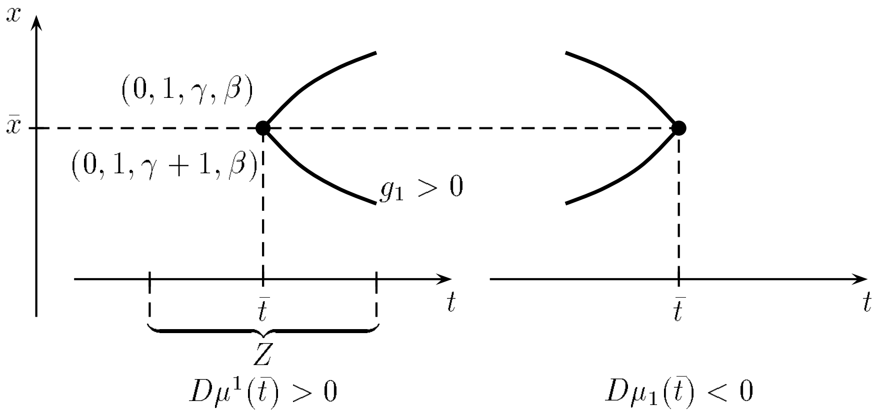
$$\Sigma_{stat}\mid_{U\times Z} = \{(\hat{x}(t),t) \mid t \in Z\}$$

Dicha función adquiere la forma siguiente para el caso correspondiente a las condiciones $D\mu^1(\bar{t}) > 0$ y $D_t g_1(x^0(t),t)\mid_{t=\bar{t}} < 0$.

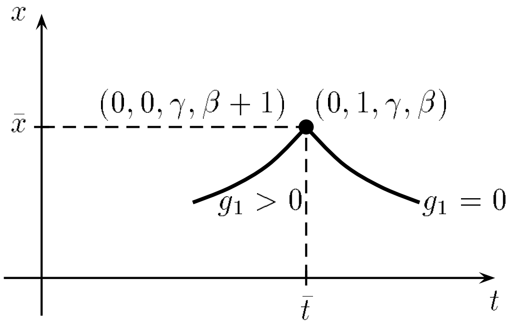
$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x^0(t) \text{ para } t \in Z, t \leq \bar{t} \\ x^1(t) \text{ para } t \in Z, t \geq \bar{t} \end{cases}$$

El índice cuadrático QI y, con ello, también el tipo de punto extremal (mínimo local, punto de ensilladura, máximo local) es el mismo para todo $\hat{x}(t), t \in Z\backslash\{\bar{t}\}$.

Las propiedades del Caso 2. son muy favorables para la utilización de métodos de seguimiento de curvas, tal y como ya lo hemos visto a propósito de la discusión de $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$. En el Caso 1., por el contrario, se plantean dos dificultades cuando se trata de realizar el seguimiento de Σ_{stat}. Cuando nos acercamos a un punto $(\bar{x},\bar{t})$ a través de una curva compuesta de puntos mínimos locales, resulta que abandonamos



(a): signo $D\mu^1(\bar{t})$ = signo $D_t g_1(x^0(t),t)|_{t=\bar{t}}$



(b): $\mu^1(\bar{t}) > 0,\ D_t g_1(x^0(t),t)|_{t=\bar{t}} < 0$

Figura 6.4:

al conjunto de mínimos locales al pasar $(\bar{x},\bar{t})$. Dado que, además, $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto de retorno en Σ_{stat}, cuando $D\mu^1(\bar{t}) < 0$, para $t > \bar{t}$ no podemos calcular ningún punto estacionario de $P(t)$, en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t})$. En el caso más desfavorable no logramos alcanzar el valor deseado del parámetro $t = t^2$ (Ver Figura 6.2).

Observación 6.4

De las propiedades dadas para caracterizar los puntos de Tipo 2 se puede mostrar la proposición siguiente, la cual es análoga al Lema 6.3: Para un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma^2_{gc}$ existe una vecindad $U(\bar{x},\bar{t}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y una C^3_S-vecindad V de $(f,H,G) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^{1+m+s}$ tales que se cumple *la inclusión siguiente para todo* $\left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right) \in V$*:*

$$\Sigma_{gc}\left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right) \cap U(\bar{x}, \bar{t}) \subset \Sigma_{gc}^{1}\left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right) \cup \Sigma_{gc}^{2}\left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right).$$

Luego de haber estudiado la estructura topológica de los puntos de Tipo 2 daremos su forma canónica en el caso $I \neq \emptyset$, $p \geq 1$.

Para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^{2}$ existe una transformación local de coordenadas en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$ de la forma (6.1), de modo que, en las nuevas coordenadas, $M(t)$ adquiere la forma $0_n \times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p}$, para t cercano a $\bar{t}$ y la función f adopta la forma siguiente:

$$\epsilon_1 \left(y_1 - \epsilon_2 v\right)^2 + \delta(v) + \sum_{i=2}^{p} \pm y_i + \sum_{j=p+1}^{n-m} \pm y_j^2 \tag{6.7}$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}$ y $\delta(v)$ está definida como en (6.2) (Ver también [100]).

A las formas canónicas para los tipos 2,3 y 4 les dedicaremos atención en el Capítulo 7.

Ahora tratamos Σ_{gc}^{3}. Un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^{3}$ cuando se satisfacen las condiciones siguientes:

3a) Valen las condiciones (1a) y (1b).

3b) Sean $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ definidas como en (1a). El punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ es un punto crítico no degenerado del problema siguiente:

$$(\mathcal{P}) \quad \min \{F(x, \lambda, \mu, t) \mid H^p(x, \lambda, \mu, t) = 0\}$$

donde $F(x, \lambda, \mu, t) = t$.

La condición (3b) implica la existencia de vectores $(w_x, w_\lambda, w_\mu) \in I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^p$ para los cuales vale:

$$\begin{pmatrix} 0_{n+m+p} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_{(x,\lambda,\mu)} H^p(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})^{\mathsf{T}} \\ D_t H^p(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_\lambda \\ w_\mu \end{pmatrix} = 0_{n+m+p+1} \tag{6.8}$$

Dado que, además, se satisface la condición $LICQ$ en $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ relativa al problema $(\mathcal{P})$, se obtiene, que el vector (w_x, w_λ, w_μ) está unívocamente determinado y, usando además el Lema 6.1, que las matrices

$D_{(x,\lambda,\mu)}H^p(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{t})$ y

$$D_x^2 f(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i D_x^2 h_i(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{j=1}^{p}\bar{\mu}_j D_x^2 g_j(\bar{x},\bar{t}) \mid_{T_{\bar{x}}M(\bar{t})}$$

son singulares y poseen solo un valor propio que se anula. En tal caso no se satisface la condición 1(c).

Además se obtiene que el conjunto factible de $\mathcal{P}$ dado por

$$\{(x,\lambda,\mu,t) \in I\!\!R^n \times I\!\!R^m \times I\!\!R^p \times I\!\!R \mid H^p(x,\lambda,\mu,t) = 0\},$$

proyectado sobre el espacio (x,t), es idéntico, en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t})$, al conjunto Σ_{gc}. Dado que el índice cuadrático QI de $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{t})$, correspondiente a $\mathcal{P}$, es a lo sumo 1, se tiene que $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{t})$ es un mínimo local (cuando QI=0) o un máximo local de $\mathcal{P}$ (si QI=1) (cfr. Figura 4.14(a) y (b)). En una vecindad apropiada $U(\bar{x},\bar{t}) \subset I\!\!R^n \times I\!\!R$ de $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^3$ se tiene lo siguiente:

- $\{\Sigma_{gc} \cap U(\bar{x},\bar{t})\} \setminus \{(\bar{x},\bar{t})\} \subset \Sigma_{gc}^1$ dado que $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{t})$ es un punto crítico no-degenerado (y con ello aislado) de $\mathcal{P}$.

- $\Sigma_{gc} \cap U(\bar{x},\bar{t}) \subset \Sigma_{stat}$, para $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{stat}$, dado que $\bar{\mu}_j > 0, j = 1,\ldots,p$.

Para caracterizar la estructura topológica del conjunto Σ_{gc} en un vecindad de un punto de Tipo 3, podemos elaborar una argumentación análoga a la ofrecida en la Observación 6.2 y limitarnos al caso sin restricciones $I = J = \emptyset$ en el espacio $I\!\!R^{n-m-p}$. Este caso ya fue discutido en la Sección 4.4.

Por eso nos limitaremos a la consideración siguiente: De la ecuación (6.8) se sigue, para $w = w_x$ bajo la condición $I = J = \emptyset$, el sistema

$$\begin{aligned} 1 - D_{tx} f(\bar{x},\bar{t})^\top w &= 0 \\ D_x^2 f(\bar{x},\bar{t}) w &= 0. \end{aligned}$$

Este implica que $\left[D_x^2 f(\bar{x},\bar{t}) \quad D_{tx} f(\bar{x},\bar{t})^\top \right] \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$

La condición (3b) proporciona entonces la expresión

$$w^\top D_x^3 f(\bar{x},\bar{t}) w \cdot w \neq 0. \tag{6.9}$$

(solo en esta situación necesitamos la derivada de tercer orden).

Para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^3_{gc}$ existe una transformación de coordenadas local, en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$, de la forma (6.1), de modo que, para un t cercano a $\bar{t}$ el conjunto $M(t)$ adquiere la forma $\{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p}$ y la función f la forma

$$\sum_{i=1}^{p} y_{i_1} + y^3_{p+1} + vy_{p+1} + \sum_{j=p+2}^{n-m} \pm y^2_j + \delta(v) \tag{6.10}$$

donde $\delta(v)$ está definida como en (6.2).

Los puntos de Tipo 4 y Tipo 5 se caracterizan porque la condición (1a) no se satisface, es decir, que el conjunto de derivadas $\{Dh_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, Dg_j(\bar{x}, \bar{t}), j = 1, \ldots, p\}$ sea linealmente dependiente. Remitimos al lector a la discusión hecha en la Sección 4.4 ("Sobre el cambio estructural del conjunto factible $M(t)$"), según la cual dicha dependencia lineal en un punto $\bar{x} \in M(\bar{t})$ es una suposición necesaria para que ocurra un cambio estructural local del conjunto factible $M(t)$ para t cercano a $\bar{t}$.

Cuando

$$\text{rango} \begin{pmatrix} D_x h_1(\bar{x}, \bar{t}) \\ \vdots \\ D_x h_m(\bar{x}, \bar{t}) \\ D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) \\ \vdots \\ D_x g_p(\bar{x}, \bar{t}) \end{pmatrix} = m + p - 1 \tag{6.11}$$

existe un vector determinado unívocamente, salvo una constante y designado en lo que sigue por $\bar{q} \in I\!R^{m+p}$, tal que

$$\sum_{i \in I} \bar{q}_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad \bar{q} \neq 0_{m+p} \tag{6.12}$$

Observación 6.5

Supóngase que se satisface la condición (6.11), $p \geq 1$ y $\bar{q}_{m+j} \neq 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$. Del Lema de Farkas (cfr. Capítulo 5) se sigue que MFCQ no se satisface en $\bar{x} \in M(\bar{t})$ si y solo si signo $\{\bar{q}_{m+j}\}$ es constante para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Para la siguiente introducción del Tipo 4 sea $\bar{q}$ fijo y supóngase que vale la condición siguiente:

$$D_x g_p(\bar{x},\bar{t}) \in \operatorname{span}\{D_x h_i(\bar{x},\bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x},\bar{t}), j = 1,\ldots,p-1\}$$

Un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

4a) $1 \leq m+p \leq n$, y vale la condición (6.11).

4b) $\bar{q}_{m+j} \neq 0$ para cada $j \in \{1,\ldots,p\}$, donde $\bar{q}$ es fija y está definida como en (6.12).

4c) El punto $(\bar{x},\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_{m+p-1},\bar{t},0) \in I\!R^{n+m+p+1}$ es un punto crítico no degenerado del problema

$$(\widehat{\mathcal{P}}) \quad \min \left\{\hat{\mathcal{F}}(x,q,t,q_0) \mid \mathcal{G}(x,q,t,q_0) = 0\right\}$$

donde $\hat{\mathcal{F}}(x,q,t,q_0) = t$, $\mathcal{G}(x,q,t,q_0) = \begin{bmatrix} D_x\mathcal{L}(x,q,t,q_0) \\ h_1(x,t) \\ \vdots \\ h_m(x,t) \\ g_1(x,t) \\ \vdots \\ g_p(x,t) \end{bmatrix}$ y

$$\mathcal{L}(x,q,t,q_0) = q_0 f(x,t) - \sum_{i\in I} q_i h_i(x,t) - \sum_{j=1}^{p-1} q_{m+j} g_j(x,t) - \bar{q}_{m+p} g_p(x,t).$$

Cuando $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ no se satisface $LICQ$ en $\bar{x} \in M(\bar{t})$. Como consecuencia, no se puede transformar al conjunto $M(t)$, en una vecindad del punto $(\bar{x},\bar{t})$, en la forma $\{0_m\} \times I\!H^p \times I\!R^{n-m-p}$ mediante una C^∞-transformación de coordenadas, tal y como en los puntos de Tipo 1,2,3. En particular, ahora la transformación de $M(t)$ depende, de modo decisivo, de la variación de t (resp. del parámetro $v = \psi_2(t)$ dado en (6.1)). En todo caso, existe una C^∞-transformación local de coordenadas del tipo (6.1), de modo que se puede obtener la forma canónica siguiente para $M(t)$ (cfr. [89]):

Caso 1 : $J_0(\bar{x},\bar{t}) = \emptyset$, es decir, $p = 0$ (Ver también Sección 4.4):

$$\begin{aligned} v &= -\sum_{i_1=1}^{k} y_{i_1}^2 + \sum_{i_2=k+1}^{n-m+1} y_{i_2}^2 \\ y_{i_3} &= 0, \quad i_3 = n-m+2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Caso 2 : $J_0(\bar{x},\bar{t}) \neq \emptyset$, es decir, $p \geq 1$.

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} v &\geq -\sum_{i_1=1}^{k} y_{i_1}^2 + \sum_{i_2=k+1}^{c} y_{i_2}^2 - \sum_{i_3=c+1}^{c+d} y_{i_3} + \sum_{i_4=c+d+1}^{c+d+e} y_{i_4} \\ y_{i_5} &\geq 0, \quad i_5 = c+1,\ldots,c+d+e \\ y_{i_6} &= 0, \quad i_6 = c+d+e+1,\ldots,n \\ c &= n-m-p+1 \ \ (\geq 1), \\ d+e &= p+1, \quad \tilde{\delta} \in \{-1,1\}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

En el Capítulo 7, en el cual se discuten los procedimientos de seguimiento de curvas con saltos, le pondremos más atención a estas formas canónicas y, especialmente, a la función objetivo transformada. En este lugar solo nos dedicaremos al primer caso, con $k = n-m-1$. Entonces vale:

$$(\psi_2(t) =)\ v = -\sum_{i_1}^{n-m+1} y_{i_1}^2, \quad y_{i_3} = 0,\ i_3 = n-m+2,\ldots,n.$$

Esto implica que, para $v > 0$, $M\left(\psi_2^{-1}(v)\right)$ es vacío en una vecindad del cero. Debido a que $\psi_2(\bar{t}) = 0$ y $D\psi_2(\bar{t}) > 0$ vale analogamente, para $t > \bar{t}$, que $M(t)$ no posee puntos cercanos a $\bar{x}$. Por lo tanto, no existe, localmente, ningún punto crítico generalizado de $P(t)$, $t > \bar{t}$. Esto tiene como consecuencia que, partiendo del punto $(\bar{x},\bar{t})$, no se puede emplear con éxito, para $t > \bar{t}$, ningún método de seguimiento de curvas (Ver Capítulo 7). Ahora , y luego en la Observación 6.19, discutiremos la estructura topológica del conjunto Σ_{gc}, en una vecindad de un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$.

De $(4a)$ y $(4b)$ se sigue que el conjunto

$$\{D_x h_i(\bar{x},\bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x},\bar{t}), j \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{j_0\}\}$$

es linealmente independiente, para cada índice $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$. Tomando en cuenta la Observación 6.2 supongamos que $m + p = 1$. Nos limitamos al caso $m = 0, p = 1$, cuyas características pueden trasladarse, sin dificultad, al caso $m = 1, p = 0$ (Para una discusión detallada de los últimos dos casos mencionados ver [92]).

Sea ahora $g(x,t) = g_1(x,t)$. De (4c) se deduce que $(\bar{x}, \bar{t}, 0)$ es un punto crítico no degenerado del problema

$$\widehat{\mathcal{P}}(t) \quad \min\{\widehat{F}(x,t,q_0) \mid G(x,t,q_0) = 0\}$$

donde

$$G(x,t,q_0) = \begin{bmatrix} q_0 D_x f(x,t) - \bar{q} D_x g(x,t) \\ g(x,t) \end{bmatrix}$$

y $\bar{q} = \bar{q}_1 (= \bar{q}_{m+p}$ en (4c)). De aquí se sigue que $g(\bar{x}, \bar{t}) = 0$, $D_x g(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ y

$$\text{rango} \begin{pmatrix} -\bar{q} D_x^2 g(\bar{x},\bar{t}) & -\bar{q} D_{xt} g(\bar{x},\bar{t})^\top & D_x f(\bar{x},\bar{t})^\top \\ 0 & D_t g(\bar{x},\bar{t}) & 0 \end{pmatrix} = n + 1, \quad (6.14)$$

es decir, rango $DG(\bar{x}, \bar{t}, 0) = n + 1$.

Conforme a la Observación 6.19 se tiene que $D_x f(\bar{x}, \bar{t}) \neq 0_n$ y, por lo tanto, existe una vecindad $U(\bar{x}, \bar{t}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ tal que $g(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \Sigma_{gc} \cap U(\bar{x}, \bar{t})$. Es decir, el conjunto $\Sigma_{gc} \cap U(\bar{x}, \bar{t})$ coincide con la proyección de $G^{-1}(0)$ sobre el espacio (x,t). Dado que el índice cuadrático QI de los puntos críticos no degenerados $(\bar{x}, \bar{t}, 0)$ de $(\widehat{P})$ puede ser a lo sumo igual a 1, se tiene que $(\bar{x}, \bar{t}, 0)$ es un mínimo local de $(\widehat{P})$, cuando QI=1 (Ver Figura 6.12), o es un máximo local, cuando QI=0 (ver Figura 6.5). Sea $(\dot{q}, \dot{t}, \dot{q}_0)$ el vector tangente a $G^{-1}(0)$ en $(\bar{x}, \bar{t}, 0)$, único salvo una constante. Entonces vale:

$$\begin{array}{c} -\bar{q} D_x^2 g(\bar{x},\bar{t})\dot{x} - \bar{q} D_{xt} g(\bar{x},\bar{t})\dot{t} + D_x f(\bar{x},\bar{t})^\top \dot{q}_0 = 0 \\ D_t g(\bar{x},\bar{t})\dot{t} = 0 \end{array} \quad (6.15)$$

De (6.14) se sigue que $\dot{t} = 0$ y, conforme a la Observación 6.19, $\dot{q}_0 \neq 0$ y $D_x f(\bar{x}, \bar{t})\dot{x} \neq 0$. Es decir, en $G^{-1}(0)$ se tiene que q_0 cambia de signo al atravesar el origen y la función f es en tal caso estrictamente creciente o estrictamente decreciente (Ver Figura 6.5). El teorema de la función implícita nos proporciona la existencia de una vecindad suficientemente pequeño $\bar{W} \subset I\!R$ de $q_0 = 0$ y una función, determinada unívocamente

$$(\tilde{x}, \tilde{t}) : q_0 \in \bar{W} \mapsto \left(\tilde{x}(q_0), \tilde{t}(q_0)\right) \in I\!R^n \times I\!R$$

tales que $(\tilde{x}(0), \tilde{t}(0)) = (\bar{x}, \bar{t})$ y $G(\tilde{x}(q_0), \tilde{t}(q_0), q_0) = 0$ para todo $q_0 \in \bar{W}$. Para $q_0 \in \bar{W}\backslash\{0\}$ vale que

$$D_x f(x,t) - \frac{\bar{q}}{q_0} D_x g(x,t) \mid_{(x,t)=(\tilde{x}(q_0),\tilde{t}(q_0))} = 0 \tag{6.16}$$

y para $q_0^1, q_0^2 \in \bar{W}$ arbitrarios, con $q_0^1 < 0 < q_0^2$, se tiene, además, que signo $\frac{\bar{q}}{q_0^1} = -$signo $\frac{\bar{q}}{q_0^2}$.

De (6.16) y (4b), en particular de $\bar{q} \neq 0$, se sigue $LICQ$ en $\tilde{x}(q_0)$ respecto al problema $P(\tilde{t}(q_0))$ para todo $q_0 \in \bar{W}\backslash\{0\}$. Para analizar la variación del índice cuadrático QI de $\tilde{x}(q_0)$, $q_0 \in \bar{W}\backslash\{0\}$, necesitamos el siguiente lema:

Lema 6.6 *(cfr. [93])*
Sea A una matriz simétrica y no singular, L un subespacio lineal de $I\!R^n$ y $A_{|L}$ no singular. Entonces la matriz $A^{-1}_{|L^\top}$ es no singular, donde

$$L^\top = \left\{ z \in I\!R^n \mid x^\top z = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in L \right\}.$$

De (6.15), $\dot{t} \neq 0$ y $D_x f(\bar{x}, \bar{t})\dot{x} \neq 0$, se desprende la no singularidad de $D_x^2 g(\bar{x}, \bar{t})$ y de $D_x f(\bar{x}, \bar{t})[D_x^2 g(\bar{x}, \bar{t})]^{-1} D_x f(\bar{x}, \bar{t})^\top$. Teniendo además en cuenta el Lema 6.6 se obtiene tambien la no singularidad de

$$D_x^2 g(\bar{x}, \bar{t}) \mid_{\{z \in I\!R^n | D_x f(\bar{x},\bar{t}) z = 0\}} .$$

Esto último, junto con (6.16), nos proporcionan, la no singularidad de

$$D_x^2 f(x,t) - \frac{\bar{q}}{q^0} D_x^2 g(x,t) \mid_{\{z \in I\!R^n | D_x g(x,t) z = 0\}}$$

en el punto $(x,t) = (\tilde{x}(q^0), \tilde{t}(q^0))$, para $q^0 \in \bar{W}\backslash\{0\}$ ($\mid q^0 \mid$ suficientemente pequeño!). Entonces obtenemos que

$$\left\{ (\tilde{x}(q^0), \tilde{t}(q^0)) \;\middle|\; q^0 \in \bar{W}\backslash\{0\} \right\} \subset \Sigma^1_{gc}.$$

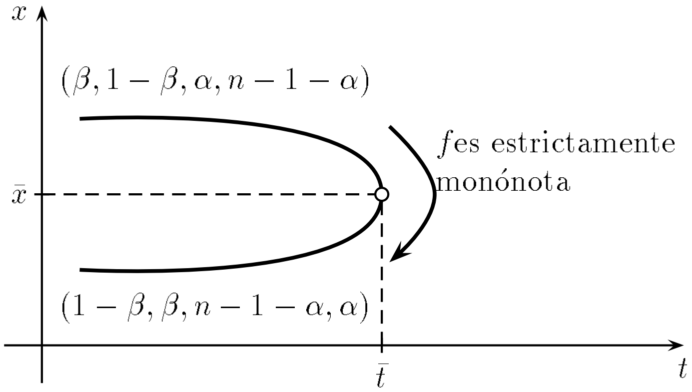


Figura 6.5: $\Sigma_{gc} \cap \left\{(\tilde{x}(q_0), \tilde{t}(q_0)) | q_0 \in \bar{W} \setminus \{0\}\right\} \subset \Sigma^1_{gc}$

Además , para las curvas parciales dadas respectivamente por

$$\left\{(\tilde{x}(q^0), \tilde{t}(q^0)) \,\middle|\, q^0 \in \bar{W}, q^0 > 0\right\}$$

y

$$\left\{(\tilde{x}(q^0), \tilde{t}(q^0)) \,\middle|\, q^0 \in \bar{W}, q^0 < 0\right\}$$

obtenemos los índices (LI,LCI,QI,QCI), dados en la Figura 6.5, donde $0 \leq \alpha \leq n-1$ y $\beta \in \{0, 1\}$.

Ahora nos dedicaremos de nuevo al caso general formulado para $m \geq 0, p \geq 1$. A causa de

$$D_x f(\bar{x}, \bar{t}) \notin \text{span}\, \{D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), j = 1, \ldots, p\}$$

$\bar{x}$ no puede ser un punto estacionario de $P(\bar{t})$. Tomando en consideración (6.16) es obvio que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl}\Sigma_{stat}$ si y solo si el signo de $\bar{q}_{m+j}$ es constante para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$. Conforme a la Observación 6.5 obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 6.7
Sea $(\bar{x}, \bar{t})$ un punto de Tipo 4 del problema $P(t)$. se cumple que:

$$(\bar{x}, \bar{t}) \in cl\ \Sigma_{stat} \Longleftrightarrow \textit{MFCQ no se satisface en } \bar{x} \textit{ con relación a } P(\bar{t}).$$

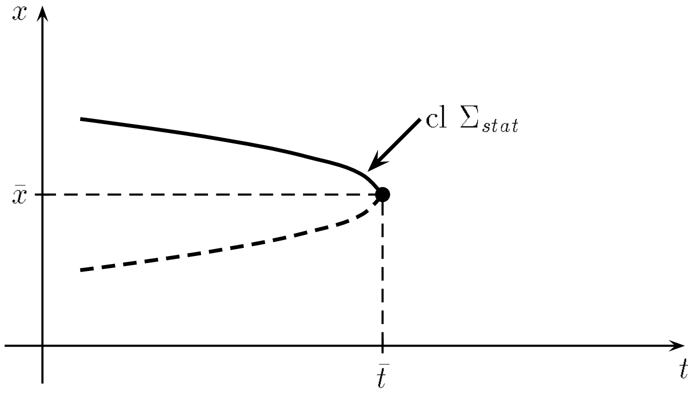


Figura 6.6: $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \cap \text{cl } \Sigma_{stat}$, $p \geq 1$

Al traspasar un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ recorriendo Σ_{gc} cambian de signo todos los multiplicadores de Lagrange, así como todos los valores propios de la matriz correspondiente a (1c). En esto consiste la diferencia topológica decisiva respecto a un punto de Tipo 3, donde igualmente hay puntos de retorno cuadrático dentro de Σ_{gc}, pero para el cual exactamente un valor propio cambia de signo.

Cuando $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \cap \text{cl } \Sigma_{stat}$, $p \geq 1$ se tiene que $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto del borde del conjunto cl Σ_{stat} (Comparar con la Figura 6.6). Teniendo en cuenta que para $p = 0$ el cambio de signo de los multiplicadores ocurrido al traspasar un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ no influye sobre la pertenencia a Σ_{stat} $(J_0 = \emptyset)$ podemos inferir la siguiente:

Observación 6.8
Sea $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \cap cl\ \Sigma_{stat}$, entonces el conjunto cl Σ_{stat} es una variedad con frontera en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t})$ y $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto frontera de dicha variedad si y solo si $J_0 \neq \emptyset$

La caracterización de un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$ corresponde a las siguientes condiciones:

(5a) $m + p = n + 1$ y se tiene

$$\text{rango}\,(Dh_1(\bar{x},\bar{t}),\ldots,Dh_m(\bar{x},\bar{t}),Dg_1(\bar{x},\bar{t}),\ldots,Dg_p(\bar{x},\bar{t})) = n+1$$

(5b) $\bar{q}_{m+j} \neq 0$ para todo $j \in \{1,\ldots,p\}$, donde $\bar{q}$ se define como en (6.12).

(5c) Para cada vector $(\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \in I\!R^m \times I\!R^p$, con

$$D_x f(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{i\in I} \tilde{\lambda}_i D_x h_i(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j D_x g_j(\bar{x},\bar{t}) = 0,$$

vale que $|J_0(\bar{x},\bar{t}) \setminus J_+(\tilde{\mu})| \leq 1$.

Cuando $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$ no se satisface LICQ en el punto $\bar{x} \in M(\bar{t})$ y, en analogía con los puntos de Tipo 4, $M(t)$ solo se puede transformar, en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t})$, en dependencia de t. Como forma canónica se obtiene (6.13) con el valor $c = 0$. Ahora deseamos investigar la estructura topológica del conjunto Σ_{gc} en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$. Para ello se fija el vector $\bar{q}$ definido en (6.12). De (5a) y (5b) se sigue, para cada índice $j_0 \in \{1,\ldots,p\}$, lo siguiente:

1. El conjunto

$$\{D_x h_i(\bar{x},\bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x},\bar{t}), j \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{j_0\}\} \tag{6.17}$$

es linealmente independiente

2. $D_x f(\bar{x},\bar{t}) \in \text{span}\,\{D_x h_i(\bar{x},\bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x},\bar{t}), j \in \{1\ldots p\}\backslash\{j_0\}\}$
Con ello existen números $\bar{\lambda}_i$, $i \in I$, $\bar{\mu}_j$, $j \in \{1,\ldots,p\}$ (los cuales no están unívocamente determinados pero se tomarán como valores fijos), con

$$D_x f(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i D_x h_i(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j D_x g_j(\bar{x},\bar{t}) = 0$$

y tal que, a causa de (6.12):

$$D_x f(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{i\in I}(\bar{\lambda}_i + k\bar{q}_i) D_x h_i(\bar{x},\bar{t}) - \sum_{j=1}^{p} (\bar{\mu}_j + k\bar{q}_{m+j})\, D_x g_j(\bar{x},\bar{t}) = 0$$

para todo $k \in I\!R$.

De (5b) se sigue la existencia de $k_j = -\frac{\bar{\mu}_j}{\bar{q}_{m+j}}$, $j = \{1, \ldots, p\}$ y (5c) implica $k_{j^1} \neq k_{j^2}$ para todo $j^1, j^2 \in \{1, \ldots, p\}$ con $j^1 \neq j^2$. S.p.d.g. sea $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$.

Sea ahora $j \in \{1, \ldots, p\}$ arbitrario y fijo y, s.p.d.g., escojamos $j = p$. Consideremos el sistema siguiente:

$$\tilde{H}^p(x, \lambda, \mu, \mu_p, t) = \begin{bmatrix} H^{p-1}(x, \lambda, \mu, t) \\ \mu_p + g_p(x, t) \end{bmatrix} = 0 \tag{6.18}$$

donde $H^{p-1}(x, \lambda, \mu, t)$ se define como en (1a), sustituyendo p por $p-1$ (en particular $\mu \in I\!R^{n-m}$). De (6.17) y del Lema 6.1 se sigue que

$$\text{rango} D_{(x,\lambda,\mu,\mu_p)} \tilde{H}^p(x, \lambda, \mu, \mu_p, t) = 2n + 1 \tag{6.19}$$

en el punto $(x, \lambda, \mu, \mu_p, t) = \left(\bar{x}, \bar{\lambda}_i + k_p \bar{q}_i, \bar{\mu}_j + k_p \bar{q}_{m+j}, 0, \bar{t}\right)_{i \in I, j \in J}$.

Por lo tanto existe un vector tangencial $(\dot{x}^p, \dot{\lambda}^p, \dot{\mu}^p, \dot{\mu}_p^p, 1)$, unívocamente determinado, el cual es ortogonal a las filas de la matriz dada por (6.19). Tomando

$$A^p(x, t) = (h_1(x, t), \ldots, h_m(x, t), g_1(x, t), \ldots, g_{p-1}(x, t))^\top$$

y, respectivamente, (6.17), obtenemos las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} D_x A^p(\bar{x}, \bar{t}) \dot{x}^p + D_t A^p(\bar{x}, \bar{t}) &= 0 \\ D_x g_p(\bar{x}, \bar{t}) \dot{x}^p + \dot{\mu}_p^p + D_t g^p(\bar{x}, \bar{t}) &= 0 \end{aligned}$$

y, respectivamente

$$\begin{aligned} -[D_x A^p(\bar{x}, \bar{t})]^{-1} D_t A^p(\bar{x}, \bar{t}) &= \dot{x}^p \\ -D_x g_p(\bar{x}, \bar{t}) [D_x A^p(\bar{x}, \bar{t})]^{-1} D_t A^p(\bar{x}, \bar{t}) + \dot{\mu}_p^p + D_t g^p(\bar{x}, \bar{t}) &= 0. \end{aligned}$$

Esto último, junto con (6.12), implican que

$$-\dot{\mu}_p^p = \sum_{i \in I} \frac{\bar{q}_i}{\bar{q}_{m+p}} D_t h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\bar{q}_{m+j}}{\bar{q}_{m+p}} D_t g_j(\bar{x}, \bar{t}). \tag{6.20}$$

Y de (5a) y de (6.12) se sigue que $\dot{\mu}_p^p \neq 0$. Cuando se observa la proyección del conjunto solución de (6.18) sobre el espacio (x, t), en

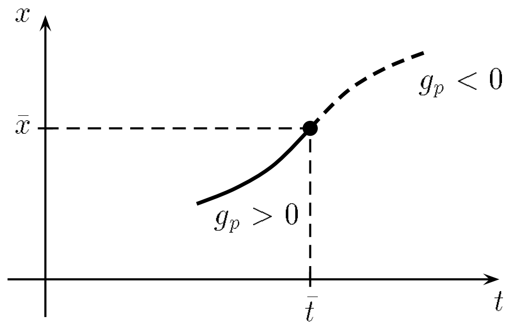


Figura 6.7:

una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$, se obtiene la representación de la Figura 6.7 (para el caso $\dot{\mu}_p^p > 0$):

Con la línea continua designamos los puntos que pertenecen al conjunto $\Sigma_{gc} \cap \Sigma_{gc}^1$, mientras que la línea interrumpida indica los puntos donde $g_p(x,t) < 0$, los cuales no son factibles para nuestro problema inicial.

Ahora vamos a diferenciar dos casos:

Caso 1. : MFCQ no se satisface en el punto $\bar{x} \in M(\bar{t})$.

Caso 2. : MFCQ se satisface en el punto $\bar{x} \in M(\bar{t})$

Del primer caso se sigue, a partir de la Observación 6.5 y de (6.12), que el signo de $\bar{q}_{m+j}$ es constante para todo $j = \{1, \ldots, p\}$.

En particular vale que en (6.20) todos los μ_j^j poseen el mismo signo pues conforme a las consideraciones antes hechas, $j = \{1, \ldots, p\}$ se tomó arbitrario y fijo. S.p.d.g se escogió $j = p$. Con ello, se tiene que el conjunto Σ_{gc} posee una estructura del tipo representado en la Figura 6.8, en una vecindad de un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$ (en la cual se ha escogido $\mu_j^j > 0, j = 1, \ldots, p$).

Dado que MFCQ no se satisface, obtenemos de (6.13) como forma normal (nótese que MFCQ es invariante respecto de transformaciones

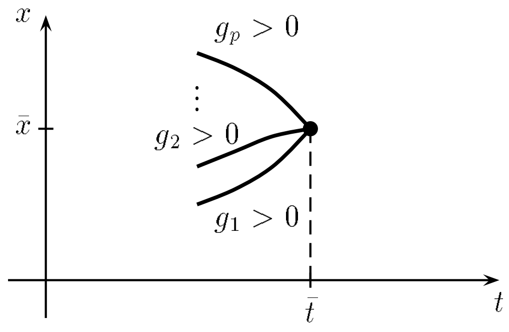


Figura 6.8: Σ_{gc} en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$ y MFCQ no se satizface en $\bar{x} \in M(\bar{t})$

de coordenadas de clase C^1).

$$\begin{array}{rcl} \left(\text{-signo } \dot{\mu}_p^p\right)\nu - \sum\limits_{i_1}^{n-m} y_{i_1} & \geq & 0 \\ y_{i_1} & \geq & 0,\ i_1 = 1,\dots,n-m; \\ y_{i_2} & = & 0,\ i_2 = n-m+1,\dots,n \end{array}$$

La componente conexa del conjunto factible que contiene al punto $(\bar{x},\bar{t})$ se vuelve vacía en el caso $\dot{\mu}_p^p > 0$ (resp. $\dot{\mu}_p^p < 0$), para $t > \bar{t}$ (resp. $t < \bar{t}$). En la Figura 6.9 se ha representado tal situación para $n = n - m = 2$ (Es decir $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_1 + y_2 \leq -\nu$):

En tal situación, cuando se aproxima el punto $(\bar{x},\bar{t})$ con un método de seguimiento, no cabe ninguna posibilidad de calcular un punto crítico generalizado x de $P(t)$, cercano a $\bar{x}$, a través de un procedimiento local, para $t > \bar{t}$. Cuando $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{stat}$ es obvio que:

$$\bar{\mu}_p + k\bar{q}_{m+p} \left\{ \begin{array}{lll} \geq 0 & \text{para} & k \geq k_p \\ < 0 & \text{para} & k < k_p \end{array} \right.$$

para $-$signo $\bar{q}_{m+j} > 0, j = 1,\dots,p$ y que $\bar{\mu}_j + k\bar{q}_{m+j} > 0$ $j = 1,\dots,p-1$, para $k \geq k_p$. El conjunto Σ_{stat} está representado por la línea punteada,

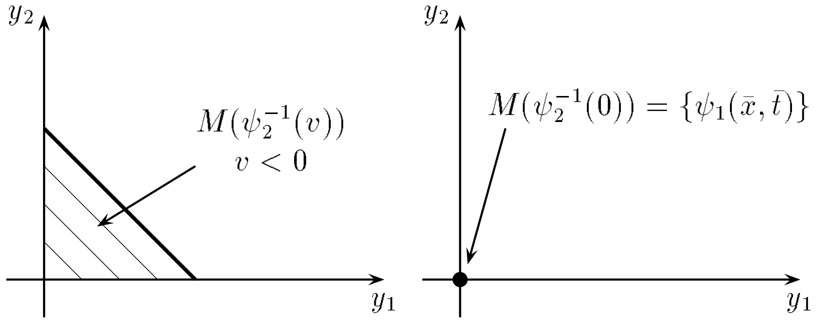


Figura 6.9: $M(\psi_2^{-1}(v)) = \emptyset$ para $v > 0$

en una vecindad de $\bar{t}$, en la Figura 6.7. En particular, $\tilde{x}$ es un punto mínimo local de $P(\tilde{t})$ para cada punto $(\tilde{x}, \tilde{t})$ de dicho conjunto.

Consideremos ahora el Caso 2, según el cual se satisface MFCQ para el punto $\bar{x} \in M(\bar{t})$. Conforme a la Observación 6.5 existen índices $j^1, j^2 \in \{1, \ldots, p\}$, con signo $\bar{q}_{m+j^1} \neq$ signo $\bar{q}_{m+j^2}$, de lo cual se sigue que signo $\dot{\mu}_{j^1}^{j^1} \neq$ signo $\dot{\mu}_{j^2}^{j^2}$, tomando en cuenta (6.20). De la consideración antes indicada, en la cual hemos escogido $j \in \{1, \ldots, p\}$ arbitrario y fijo (y s.p.d.g. $j = p$), se desprende que la componente conexa del conjunto factible que contiene al punto $(\bar{x}, \bar{t})$ no es vacía para t cerca de $\bar{t}$ (Considerar figuras 6.7 y 6.10).

Cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{stat}$ existe exactamente un índice $\tilde{j} \in \{1, \ldots, p-1\}$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mu}_j + k\bar{q}_{m+j} & \geq & 0 \text{ para todo } j = 1, \ldots, p \text{ y } k \in [k_{\tilde{j}}, k_{\tilde{j}+1}] \\ \bar{\mu}_{\tilde{j}} + k\bar{q}_{m+\tilde{j}} & < & 0 \text{ para todo } k < k_{\tilde{j}} \\ \bar{\mu}_{\tilde{j}+1} + k\bar{q}_{m+\tilde{j}+1} & < & 0 \text{ para todo } k > k_{\tilde{j}+1}. \end{array}$$

De todo esto se obtiene que $q_{m+\tilde{j}} > 0$ y $q_{m+\tilde{j}+1} < 0$. En la Figura 6.10 se ha representado a Σ_{stat} para $\dot{\mu}_{\tilde{j}}^{\tilde{j}} > 0$ y $\dot{\mu}_{\tilde{j}+1}^{\tilde{j}+1} < 0$.

En el segundo caso antes analizado obtenemos una situación igualmente favorable para la utilización de métodos de seguimiento, tal y como sucede en la Figura 6.4, que representa una vecindad de un punto

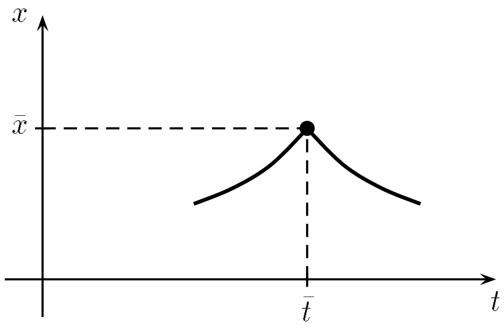


Figura 6.10: Σ_{stat} en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$ y MFCQ se cumple en $\bar{x} \in M(\bar{t})$

de Tipo 2. En particular, $\tilde{x}$ es un punto mínimo local de $P(\tilde{t})$ para todo $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \Sigma_{stat}$ en una vecindad suficientemente pequeño de $(\bar{x}, \bar{t})$.

De lo resultados de el análisis de la estructura local de Σ_{stat} y Σ_{gc} en los dos casos diferenciados anteriormente para los puntos de tipo 5 podemos concluir una observación análoga a la Observación 6.8 hecha anteriormente para puntos de tipo 4.

Observación 6.9
Sea $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5 \cap cl\, \Sigma_{stat}$, entonces el conjunto $cl\, \Sigma_{stat}$ es una PC^2-variedad con frontera en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$ y $(\bar{x}, \bar{t})$ es un punto frontera de dicha variedad si y solo si MFCQ no se satizface en $\bar{x} \in M(\bar{t})$.

Con la exposición anterior sobre los puntos de tipo 5 hemos completado la descripción de los cinco tipos de puntos críticos generalizados que definen la clase $\mathcal{F}$. Teniendo en cuenta que en los puntos de tipo 1, 2 o 3 la condición LICQ (que implica MFCQ) se satizface podemos concluir facilmente el siguiente resultado a partir de la Observación 6.5 y de la Proposición 6.7.

Resultado 6.10 *(comparar [93])*
Sean $(f, H, G) \in \mathcal{F}$ y $(\bar{x}, \bar{t}) \in cl\, \Sigma_{stat} \subset \Sigma_{gc}$. Entonces la condición

MFCQ se incumple en $\bar{x}$ con relación a $P(\bar{t})$ si y solo si se satizface una de las dos condiciones siguientes:

1. *$(\bar{x}, \bar{t})$ es de tipo 4.*
2. *$(\bar{x}, \bar{t})$ es de tipo 5 y todos los coeficientes $\bar{q}_{m+j}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$ en (6.12) tienen el mismo signo.*

De la representación de tales tipos se puede obtener observaciones analogos a la Observación 6.4, esta vez para los puntos de Tipo 3,4 y 5. Deseamos destacar a continuación dos resultados de caracter global. El primero de ellos versa sobre la estructura global de el conjunto Σ_{gc}. De acuerdo a los análisis acerca de la estructura local de Σ_{gc} alrededor de los 5 tipos de puntos criticos generalizados podemos establecer inmediatamente el siguiente:

Resultado 6.11 *(comparar [93])*
Sea $(f, H, G) \in \mathcal{F}$. Entonces el conjunto $\Sigma_{gc}^1 \subset I\!R^n \times I\!R$ es una C^2-variedad unidimensional y Σ_{gc}^1 es abierto y denso en Σ_{gc}. Los conjuntos $\Sigma_{gc}^\nu, \nu = 2, 3, 4, 5$ se componen respectivamente de puntos aislados, es decir, son variedades cero dimensionales.

El segundo de los resultados globales esclarece la estructura de el conjunto cl Σ_{stat}. Notemos primeramente (de hecho utilizado en la Observación 6.10) que si $(f, H, G) \in \mathcal{F}$ entonces cl $\Sigma_{stat} \subset \Sigma_{gc}$. Para un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ de tipo 1 o 3 se cumple, debido a la permanencia local de los índices lineales, que si $(\bar{x}, \bar{t}) \in$ cl Σ_{stat} entonces $(\bar{x}, \bar{t})$ pertenece al interior relativo de el conjunto Σ_{stat}. Para un punto de tipo 2 perteneciente al conjunto cl Σ_{stat} se obtiene en los dos casos en los que se divide el análisis acerca de la estructura local de Σ_{stat} que el punto de tipo 2 pertenece al interior relativo de Σ_{stat}. Teniendo en cuenta lo anterior, la Proposición 6.7 y las observaciones 6.8 y 6.9 podemos concluir el siguiente:

Resultado 6.12 *(comparar [93])*
Sea $(f, H, G) \in \mathcal{F}$. Entonces el conjunto cl Σ_{stat} es una PC^2-variedad unidimensional con frontera. Ademas, $(\bar{x}, \bar{t}) \in$ cl Σ_{stat} es un punto frontera si y solo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $J_0(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$.

2. *MFCQ no se satisface en el punto* $\bar{x} \in M(\bar{t})$.

Por último , se desea mencionar que la caracterización hecha para definir los puntos de Tipo 3 y 4 se ha tomado de [167]. La equivalencia de este enfoque con las correspondientes definiciones dadas en el trabajo original de [93] se puede lograr fácilmente, en particular con ayuda de la prueba del Teorema 6.18 (teorema de perturbación) que se ofrece en la Sección 6.2.

6.2 Los teoremas de perturbación y de genericidad

En esta sección centraremos nuestra atención en los dos teoremas mencionados. Con ellos se muestra que, genericamente, $(f, H, G) \in \mathcal{F}$ y, por lo tanto, que cada punto crítico generalizado del problema correspondiente $P(t)$ es precisamente un punto de Tipo 1,2,3,4 o 5.

Para ello introduciremos las siguientes notaciones: Sean $k \geq 1$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Considérense las funciones $f_r \in C^k(U, \mathbb{R})$, $r = 1, \ldots, r^1$; $\bar{f}_{\bar{r}} \in C^k(U, \mathbb{R})$, $\bar{r} = 1, \ldots, r^2$ y los conjuntos definidos por:

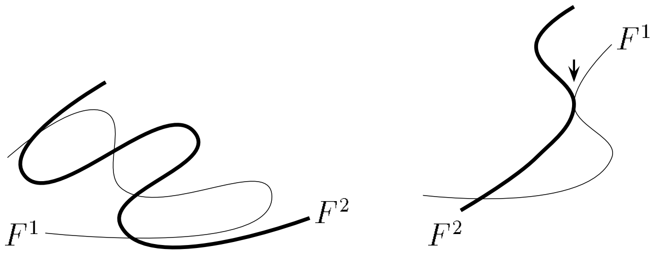
$$\begin{array}{l} F^1 = \{x \in U \mid f_r(x) = 0,\ r = 1, \ldots, r^1\} \\ F^2 = \{\bar{x} \in U \mid \bar{f}_{\bar{r}}(\bar{x}) = 0,\ \bar{r} = 1, \ldots, r^2\} \end{array}$$

Supóngase además que los conjuntos

$$\begin{array}{l} \{Df_r(x),\ r = 1, \ldots, r^1\} \\ \{D\bar{f}_{\bar{r}}(\bar{x}),\ \bar{r} = 1, \ldots, r^2\} \end{array}$$

son linealmente independientes para cada $x \in F^1$ (resp. $\bar{x} \in F^2$).

Entonces se tiene que tanto F^1 como F^2 son C^1-variedades de dimensiones $n - r^1$ (resp. $n - r^2$) y de codimensiones r^1 (resp. r^2). Usaremos la notación: $\dim F^1 = n - r^1$, $\mathrm{cod} F^1 = r^1$. Además , decimos que F^1 interseca transversalmente con F^2 cuando el conjunto $\{Df_r(\tilde{x}), r = 1, \ldots, r^1, D\bar{f}_{\bar{r}}(\tilde{x}), \bar{r} = 1, \ldots, r^2\}$ es linealmente independiente para todo $\tilde{x} \in F^1 \cap F^2$. (Notación: $F^1 \bar{\pitchfork} F^2$.) En la Figura 6.11



(a): $F^1 \bar{\pitchfork} F^2$ (b)

Figura 6.11:

se ha escogido $n = 2, r^1 = r^2 = 1$ y se ha representado dos variedades F^1 y F^2 tales que $F^1 \bar{\pitchfork} F^2$ en (a), mientras que no hay intersección transversal en (b).

Cuando $F^1 \bar{\pitchfork} F^2$ entonces $F^1 \cap F^2$ es una C^1-variedad $n - r^1 - r^2$-dimensional. Las definiciones de los cinco tipos de puntos críticos generalizados responden a determinadas condiciones de transversalidad y en el Resultado 6.11 se da las correspondientes dimensiones de las variedades $\Sigma^r_{gc}, r = 1, \dots, 5$. Ahora estableceremos algunos lemas, necesarios para posteriores análisis y convendremos, para el resto del capítulo, que la expresión -para casi todo- siempre hará referencia a la medida de Lebesgue del espacio correspondiente. (Para detalles sobre los aspectos referentes a la teoría de la medida pueden consultarse por ejemplo, con diferentes grados de profundidad y diferentes objetivos, [85], [177], [179])

Lema 6.13 *(Teorema parametrizado de Sard, [183]).*
Sean $\phi \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}, \mathbb{R}^r)$, $k > max\{0, n-r\}$, $\phi : (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \mapsto \phi(x, z) \in \mathbb{R}^r$. Supóngase además que 0_r es un valor regular de ϕ, es decir, rango$(D\phi(x, z)) = r$ para cada $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}$ que satisface $\phi(x, z) = 0$. Entonces se tiene que 0_r es un valor regular de la función dada por $\phi_{\bar{z}}(\cdot) = \phi(\cdot, \bar{z})$ para casi todo $\bar{z} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$.

En el lema que demostraremos a continuación , denotaremos un conjunto de índices por $\bar{I} \subset \{1, \dots, n\}$ y por $\mathcal{A}(\bar{I}) \subset \mathbb{R}^{1/2n(n+1)}$ al conjunto de todas las matrices simétricas caracterizadas del modo siguiente: $A \in \mathcal{A}(\bar{I})$ si y solo si rango$(A) = \mid \bar{I} \mid$ y, además, las columnas de la matriz A, cuyos índices pertenecen al conjunto $\bar{I}$, son linealmente independientes.

Lema 6.14 *([126])*
El conjunto $\mathcal{A}(\bar{I})$ es una C^1-variedad de cod$\mathcal{A}(\bar{I}) = \frac{1}{2}(n- \mid \bar{I} \mid)(n- \mid \bar{I} \mid +1)$, es decir, $\mathcal{A}(\bar{I})$ queda descrito a través de $\frac{1}{2}(n- \mid \bar{I} \mid)(n- \mid \bar{I} \mid +1)$ igualdades, cuyos gradientes son linealmente independientes en cada punto solución.

Demostración:
Escojamos un subconjunto arbitrario $\bar{I} \subset \{1, \ldots, n\}$ pero que sea fijo. S.p.d.g. sean $\bar{I} = \{\hat{q}+1, \ldots, n\}$, $0 \leq \hat{q} \leq n-1$, $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & D \end{pmatrix}$ y D una matriz simétrica de dimensiones $(n-\hat{q}, n-\hat{q})$. Considérese una matriz $A \in \mathcal{A}(\bar{I})$. Entonces existe una $(n-\hat{q}, \hat{q})$-matriz Λ con las propiedades

$$B = C\Lambda, \quad C^\top = D\Lambda \tag{6.21}$$

Supongamos que fuera posible rango$(D) < n - \hat{q}$. Entonces existiría un vector $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n-\hat{q}}$, $\hat{\xi} \neq 0_{n-\hat{q}}$ con $D\hat{\xi} = 0$. De (6.21) se seguiría que $C = \Lambda^\top D$, es decir, $C\hat{\xi} = \Lambda^\top \hat{\xi} = 0$ y, con ello, $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \hat{\xi} = 0$, lo cual contradeciría el hecho de que $A \in \mathcal{A}(\bar{I})$ y que rango $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (n-\hat{q})$. Por lo tanto, rango$(D) = n - \hat{q}$. Además, de (6.21) obtenemos que $\Lambda = D^{-1}C^\top$ y que

$$B - CD^{-1}C^\top = 0 \tag{6.22}$$

El sistema (6.22) describe la diferencia de matrices simétricas de dimensión $(\hat{q}, \hat{q})$ y está determinado, con ello, por $\frac{1}{2}\hat{q}(\hat{q}+1)$ ecuaciones. Por último, dado que la derivada parcial del sistema (6.22) con respecto a los elementos de B es precisamente la matriz unitaria $I_{\frac{1}{2}\hat{q}(\hat{q}+1)}$, resulta que los gradientes de las ecuaciones que describen el sistema (6.22) son linealmente independientes, de donde se sigue el resultado deseado. $\square$

Ahora mencionaremos dos lemas, los cuales contienen conocidos criterios de la teoría de la medida.

Lema 6.15
La unión numerable de subconjuntos de $I\!R^{\bar{n}}$ *que poseen medida* $\bar{n}$*-dimensional de Lebesgue nula tiene, igualmente, medida nula.*

Lema 6.16
Sea B *una matriz de dimensión* (n, n) *y de rango*$B \geq 1$*. Entonces el conjunto* $\hat{B} = \{x \in I\!R^n \mid x^\top Bx = 0\}$ *posee medida* n*-dimensional de Lebesgue nula.*

<u>Demostración:</u>
La dimensión del subespacio lineal $\hat{B}_0 = \{x \in I\!R^n \mid Bx = 0\}$ es menor que n. Además , $\hat{B} = \hat{B}_0 \cup \hat{B}\backslash\hat{B}_0$. Por otro lado, el conjunto $\hat{B}\backslash\hat{B}_0$ está descrito por el sistema $x^\top Bx = 0$, cuyos gradientes no se anulan si $x \in \hat{B}\backslash\hat{B}_0$. De aquí se sigue que dim$\hat{B}\backslash\hat{B}_0 = n - 1$ y, al mismo tiempo, el resultado buscado. □

Ahora introduciremos perturbaciones especiales de $(f, h_i, g_j)_{i\in I, j\in J}$, utilizando para ello parámetros complementarios. Sean $A_{n\times n}$ una matriz simétrica, la cual se puede considerar, a su vez, como un vector de $I\!R^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ (dado que A posee precisamente $\frac{1}{2}n(n+1)$ entradas independientes), $b_j \in I\!R^n$, $j = 1, \ldots, m+s$, $c \in I\!R^n$, $d \in I\!R^{m+s}$, $d = (d_1, \ldots, d_{m+s})$, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_{m+s}, d)$ y, finalmente, el parámetro $a = (A, c, \mathcal{B})$, de modo que $a \in I\!R^\gamma$ donde $\gamma = \frac{1}{2}n(n+1) + n(m+s+1) + m+s$. Considérese además las funciones definidas por:

$$\begin{aligned} f(x, t, A, c) &= f(x, t) + \frac{1}{2}x^\top Ax + c^\top x \\ h_i(x, t, b_i, d_i) &= h_i(x, t) + b_i^\top x + d_i, \quad i \in I \\ g_j(x, t, b_{m+j}, d_{m+j}) &= g_j(x, t) + b_{m+j}^\top x + d_{m+j}, \quad j \in J \end{aligned}$$

el conjunto:

$$M(\mathcal{B}, t) = \left\{ x \in I\!R^n \;\middle|\; \begin{array}{c} h_i(x, t, b_i, d_i) = 0, i \in I \\ g_j(x, t, b_{m+j}, d_{m+j}) \geq 0, j \in J \end{array} \right\}$$

y el problema uniparamétrico correspondiente:

$$P_a(t) \qquad \min\{f(x, t, A, c) \mid x \in M(\mathcal{B}, t)\}$$

el cual es dependiente del parámetro adicional a. Para cada valor (fijo) del parámetro $\mathcal{B}$ definimos además los conjuntos de índices:

$$J_0(x,t,\mathcal{B}) = \left\{ j \in J \mid g_j(x,t) + b_{m+j}^{\mathsf{T}} x + d_{m+j} = 0 \right\}$$

y

$$\bar{M}(\mathcal{B}) = \left\{ (x,t) \in I\!\!R^n \times I\!\!R \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in M(\mathcal{B},t) \text{ y el conjunto} \\ \{D_x h_i(x,t,b_i,d_i), i \in I, \\ D_x g_j(x,t,b_{m+j},d_{m+j}), j \in J_0(x,t,\mathcal{B})\} \\ \text{es linealmente dependiente, es decir,} \\ \text{no se satisface la condición LICQ.} \end{array} \right\}$$

Para la formulación del teorema de perturbación requerimos además del siguiente lema:

Lema 6.17
Para casi todo $\mathcal{B}$ vale:
(a) El conjunto $\bar{M}(\mathcal{B})$ es la unión finita de variedades cero dimensionales.
(b) Para cada punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \bar{M}(\mathcal{B})$ se tiene que

$$dim\ span \left\{ \begin{array}{c} D_{(x,t)} h_i(\bar{x},\bar{t},b_i,d_i), i \in I, \\ D_{(x,t)} g_j(\bar{x},\bar{t},b_{m+j},d_{m+j}), j \in J_0(\bar{x},\bar{t},\mathcal{B}) \end{array} \right\} = m + |J_0(\bar{x},\bar{t},\mathcal{B})| \tag{6.23}$$

de donde se sigue la existencia de un vector $\bar{\bar{q}} \in I\!\!R^{m+|J_0(\bar{x},\bar{t},\mathcal{B})|}$, unívocamente determinado salvo una constante (análogamente a $\bar{q}$ en (6.12)), con la característica $\bar{\bar{q}} \neq 0_{m+|J_0(\bar{x},\bar{t},\mathcal{B})|}$. Entonces se cumple que:

$$\bar{\bar{q}}_{m+j} \neq 0, \;\; j \in J_0(\bar{x},\bar{t},\mathcal{B}) \tag{6.24}$$

<u>Demostración:</u>
Sea $\bar{J} \subset J$ con $I \cup \bar{J} \neq \emptyset$. Sea $i_0 \in I \cup \bar{J} \neq \emptyset$ arbitrario y fijo y supóngase, s.p.d.g., que $\bar{J} = \{1,\ldots,p\}$ para $p \leq s$ y que $i_0 = p$ (La prueba para $\bar{J} = \emptyset$ es análoga). Sean además $\hat{q}_{m+p} \in I\!\!R$, $\hat{q}_{m+p} \neq 0$, $q \in I\!\!R^{m+p-1}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(x,q,t,\mathcal{B}) \;\; = \;\; & \sum_{i \in I} q_i h_i(x,t,b_i,d_i) + \sum_{j=1}^{p-1} q_{m+j} g_j(x,t,b_{m+j},d_{m+j}) \\ & + \hat{q}_{m+p} g_p(x,t,b_{m+p},d_{m+p}) \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\tilde{G}(x,q,t,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} D_x\tilde{\mathcal{L}}(x,q,t,\mathcal{B}) \\ h_i(x,t,b_i,d_i), i \in I \\ g_j(x,t,b_{m+j},d_{m+j}), j \in \bar{J} \end{bmatrix}, \tag{6.26}$$

Dado que la matriz

$$D_{(b_{m+p},d_1,\ldots,d_{m+p})}\tilde{G}(x,q,t,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \hat{q}_p I_n & 0 \\ 0 & \\ x & I_{m+p} \end{bmatrix}$$

es no singular, 0_{n+m+p} es un valor regular de $\tilde{G}$ y para cada subconjunto $\tilde{J} \subset \{1,\ldots,p-1\}$ vale

$$\tilde{G}^{-1}(0) \,\bar{\pitchfork} \left\{(x,q,t,\mathcal{B}) \mid q_j = 0, j \in \tilde{J}\right\}, \tag{6.27}$$

donde $\tilde{G}^{-1}(0) = \left\{(x,q,t,\mathcal{B}) \mid \tilde{G}(x,q,t,\mathcal{B}) = 0\right\}$. El Lema 6.13 implica lo siguiente, para casi todo valor del parámetro $\mathcal{B}$:

- 0_{n+m+p} es un valor regular de $\tilde{G}_{\mathcal{B}}(\cdot) = \tilde{G}(\cdot,\mathcal{B})$. Es decir, el conjunto $\tilde{G}_{\mathcal{B}}^{-1}(0)$ es una variedad cero dimensional, descrita por $(n+m+q)$ ecuaciones. Lo mismo puede decirse de la proyección de $\tilde{G}^{-1}(0)$ sobre el espacio (x,t), descrita por

$$\left\{ (x,t) \in I\!R^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{c} h_i(x,t,b_i,d_i) = 0, i \in I \\ g_j(x,t,b_{m+j},d_{m+j}) = 0, j = 1,\ldots,p \\ D_x g_p(x,t,b_{m+p},d_{m+p}) \in \operatorname{span}\{D_x h_i(x,t,b_i,d_i), \\ i \in I, D_x g_j(x,t,b_{m+j},d_{m+j}), j = 1,\ldots,p-1\} \end{array} \right\}$$

- $\tilde{G}_{\mathcal{B}}^{-1}(0) \cap \left\{(x,q,t) \in I\!R^{n+m+p} \mid q_j = 0, j \in \tilde{J}\right\} = \emptyset$ para todo $\tilde{J} \subset \{1,\ldots,p-1\}$ con $\tilde{J} \neq \emptyset$, dado que el lado izquierdo queda descrito por $n+m+p+ \mid \tilde{J} \mid$ ecuaciones, cuyos gradientes, según (6.27), son linealmente independientes.

Por lo tanto, para casi todo $\mathcal{B}$ se tiene que

$$\dim \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{c} D_{(x,t)} h_i(\bar{x},\bar{t},b_i,d_i), i \in I, \\ D_{(x,t)} g_j(\bar{x},\bar{t},b_{m+j},d_{m+j}), j \in \bar{J} \end{array} \right\} = m+p$$

y, además, $\bar{q}_{m+j} \neq 0$, $j = 1,\ldots,p-1$, para cada punto $(\bar{x},\bar{q},\bar{t}) \in \tilde{G}_{\mathcal{B}}^{-1}(0)$.

Por último, dado que tanto $\bar{J} \subset J$ como $i_0 \in I \cup \bar{J}$ fueron escogidos arbitrariamente y que J es finito, se concluye, del Lema 6.16, la certeza del enunciado. $\square$

Teorema 6.18 *(Teorema de perturbación [167]).*
Todo subconjunto medible del conjunto

$$\left\{a \in I\!R^\gamma \,\middle|\, (f(x,t,A,c), h_i(x,t,b_i,d_i), g_j(x,t,b_{m+j},d_{m+j}))_{i \in I, j \in J} \notin \mathcal{F}\right\}$$

posee medida nula. Tomamos en consideración naturalmente la medida γ-dimensional de Lebesgue.

Demostración:
La prueba se desarrolla en dos partes.

Primera parte.
Aquí mostraremos que para casi todo parámetro $a = (A, c, \mathcal{B})$ vale lo siguiente: todo punto crítico generalizado (x,t) de $P_a(t)$, para el cual se satisface la condición LICQ en relación con el conjunto $M(\mathcal{B}, t)$, es un punto de Tipo 1, 2 o 3.

Sea $\bar{J} \subset J$ arbitrario y fijo. Supóngase, s.p.d.g. que $\bar{J} = \{1, \ldots, p\}$, para algún $p \leq s$. Consideremos primero las siguientes dos matrices: Para $\lambda \in I\!R^m$, $\mu \in I\!R^p$ y $\eta \in \{0,1\}$ definimos:

$$\begin{aligned} D_x A^0(x,t) &= (D_x h_1^\top, \ldots, D_x h_m^\top, D_x g_1^\top, \ldots, D_x g_{p-1}^\top)\,|_{(x,t)} \\ D_x A^1(x,t) &= (D_x A^0(x,t), D_x g_p(x,t)^\top) \end{aligned}$$

Definamos ahora para $\lambda \in I\!R^m$, $\mu \in I\!R^p$ y $\eta \in \{0,1\}$ las siguientes matrices y aplicaciones:

$$\begin{aligned} M^\eta(x,\lambda,\mu,t) &= \begin{pmatrix} D_x^2 L^1(x,\lambda,\mu,t) & -D_x A^\eta(x,t) \\ D_x A^\eta(x,t)^\top & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{H}^\eta(x,\lambda,\mu,t) &= \begin{bmatrix} D_x L^\eta(x,\lambda,\mu,t) \\ h_1(x,t) \\ \cdots \\ h_m(x,t) \\ g_1(x,t) \\ \cdots \\ g_{p-1}(x,t) \\ (1-\eta)\mu_p + g_p(x,t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $L^\eta(x,\lambda,\mu,t)$ es el Lagrangiano, cuya expresión depende de la siguiente forma de $\eta \in \{0,1\}$.

$$L^\eta(x,\lambda,\mu,t) = f(x,t) - \sum_{i\in I} \lambda_i h_i(x,t) - \sum_{i=1}^{p-1} \mu_j g_j(x,t) - \eta.\mu_p g_p(x,t)$$

Notemos que $\hat{H}^1(x,\lambda,\mu,t)$ es justamente la expresión $H^p(x,\lambda,\mu,t)$ que se utiliza en la Sección 6.1, en (1a), para definir al conjunto Σ^1_{gc}. Además , definimos:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^0_a(x,\lambda,\mu,t) &= \hat{H}^0 + \begin{pmatrix} Ax + c - \sum_{i\in I}\lambda_i b_i - \sum_{j=1}^{p-1}\mu_j b_{m+j} \\ b_1^\top x + d_1 \\ \vdots \\ b_{m+p}^\top x + d_{m+p} \end{pmatrix} \\
\hat{H}^1_a(x,\lambda,\mu,t) &= \hat{H}^1 + \begin{pmatrix} Ax + c - \sum_{i\in I}\lambda_i b_i - \sum_{j=1}^{p}\mu_j b_{m+j} \\ b_1^\top x + d_1 \\ \vdots \\ b_{m+p}^\top x + d_{m+p} \end{pmatrix} \\
M^0_a(x,\lambda,\mu,t) &= M^0(x,\lambda,\mu,t) + \begin{pmatrix} A & -b_i & \dots & -b_{m+p-1} \\ b_1^\top & & & \\ \vdots & & 0 & \\ b_{m+p-1}^\top & & & \end{pmatrix} \\
M^1_a(x,\lambda,\mu,t) &= M^1(x,\lambda,\mu,t) + \begin{pmatrix} A & -b_i & \dots & -b_{m+p} \\ b_1^\top & & & \\ \vdots & & 0 & \\ b_{m+p}^\top & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Con vistas a no repetir demasiado definiciones análogas nos restringiremos a introducir solo notaciones para el caso $\eta = 1$. En el caso $\eta = 0$ debe siempre tenerse en cuenta que la matriz $M^0_a(x,\lambda,\mu,t)$ tiene una fila y una columna de menos y con ello los espacios de las matrices en que se trabja son de dimensión menor.

Finalmente definimos la $(n+m+p, n+m+p)$-matriz simétrica dada por:

$$\bar{M}^\eta_a(x,\lambda,\mu,t) = M^\eta_a(x,\lambda,\mu,t)\begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_{m+p} \end{pmatrix}$$

En analogía con el Lema 6.14 designamos con $\mathcal{A}(\bar{I})$ el conjunto correspondiente de $(n+m+p, n+m+p)$-matrices simétricas, donde $\bar{I} \subset \{1, \ldots, n+m+p\}$. Además , sean $\tilde{p} = (n+m+p+1) + (n+m+p) + \frac{1}{2}(n+m+p)(n+m+p+1)$, $z \in I\!R^{\tilde{p}}$, $z = (z^1, z^2, z^3)$, $z^1 \in I\!R^{n+m+p+1}$, $z^2 \in I\!R^{n+m+p}$, $z^3 \in I\!R^{\frac{1}{2}(n+m+p)(n+m+p+1)}$.

Definamos los conjuntos siguientes de $I\!R^{\tilde{p}}$:

$$\tilde{M}_a^\eta = \left\{ z \in I\!R^{\tilde{p}} \,\middle|\, z^2 = \hat{H}_a^\eta(z^1), z^3 = \bar{M}_a^\eta(z^1) \right\}, \ \eta = 0, 1$$

donde $z^1 = (x, \lambda, \mu, t)$ y

$$M(\bar{I}) = I\!R^{n+m+p+1} \times 0_{n+m+p} \times \mathcal{A}(\bar{I})$$

para $\bar{I} \subset \{1, \ldots, n+m+p\}$.

Es obvio que $M(\bar{I})$ queda descrito por $z^2 = 0$ junto con las ecuaciones análogas a las dadas por (6.22). Considérese el conjunto dado por

$$M(\bar{I}, \tilde{I}) = M(\bar{I}) \cap \left\{ z \in I\!R^{\tilde{p}} \,\middle|\, z_{n+m+j} = 0, j \in \tilde{I} \right\}$$

para $\tilde{I} \subset \{1, \ldots, p\}$.

Es claro que $z^{n+m+j} = \mu_j, j \in \tilde{I}$. Ahora mostraremos que los conjuntos $\tilde{M}_a^\eta$, $\eta = 0, 1$; $M(\bar{I})$ y $M(\bar{I}, \tilde{I})$ son C^1-variedades considerando, en cada caso, ciertas derivadas parciales de las ecuaciones que las definen.

- Para $\tilde{M}_a^\eta$, $\eta = 0, 1$:

Ecuaciones	D_{z^2}	D_{z^3}
$z^2 - \hat{H}_a^\eta(z^1) = 0$	I_{n+m+p}	0
$z^3 - \bar{M}_a^\eta(z^1) = 0$	0	$I_{\frac{1}{2}(n+m+p)(n+m+p+1)}$

Dado que los gradientes son linealmente independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{cod } (\tilde{M}_a^\eta) &= n+m+p+\frac{1}{2}(n+m+p)(n+m+p+1) \\ &= \tilde{p} - (n+m+p+1) \end{aligned}$$

- Para $M(\bar{I})$:

Ecuaciones	D_{z^2}	D_{z^3}
$z^2 = 0$	I_{n+m+p}	0
Análogo a 6.22	0	$\left(I_{\frac{1}{2}(n+m+p-\lvert\bar{I}\rvert)(n+m+p-\lvert\bar{I}\rvert+1)} \mid \bigotimes\right)$

Aquí $\bigotimes$ designa una expresión que no tiene importancia para el análisis.

En este caso

$$\mathrm{cod}(M(\bar{I})) = n+m+p+\frac{1}{2}(n+m+p- \mid \bar{I} \mid)(n+m+p- \mid \bar{I} \mid +1)$$

- Para $M(\bar{I}, \tilde{I})$ intervienen, junto con las ecuaciones que describen a la variedad $M(\bar{I})$, las siguientes:

Ecuaciones	$D_{z_{n+m+j}} (j \in \tilde{I})$
$z_{n+m+j} = 0 \ (j \in \tilde{I})$	$I_{\lvert\tilde{I}\rvert}$

Finalmente,

$$\mathrm{cod}(M(\bar{I}, \tilde{I})) = \mathrm{cod}(M(\bar{I}))+ \mid \tilde{I} \mid$$

Ahora consideramos la matriz jacobiana ampliada, la cual contiene además las derivadas parciales respecto de los parámetros complementarios (A, c, d). En la expresión 6.28 tomamos las siguientes constantes: $\star = \frac{1}{2}(n+m+p- \mid \bar{I} \mid)(n+m+p- \mid \bar{I} \mid +1)$, $\star\star = \frac{1}{2}n(n+1)$,

$\star\star\star = \frac{1}{2}(n+m+p)(n+m+p+1)$ y $\star\star\star\star = n+m+p$.

	D_{z^1}	D_{z^2}	D_{z^3}	D_A	D_c	D_d
$z^2 - \hat{H}_a^\eta(z^1) = 0$	$\otimes$	$I_{\star\star\star\star}$	0	$\otimes$	$\begin{array}{c} -I_n \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \hline -I_{m+p} \end{array}$
$z^3 - \bar{M}_a^\eta(z^1) = 0$	$\otimes$	0	$I_{\star\star\star}$	$\begin{array}{cc} -I_{\star\star} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$	0	0
$z^2 = 0$	0	$I_{\star\star\star\star}$	0	0	0	0
Análogo a 6.22	0	0	$I_\star \mid \otimes$	0	0	0
$z_{n+m+j} = 0$	$I_{\lvert\tilde{I}\rvert} \mid 0$	0	0	0	0	0

(6.28)

Para la demostración utilizamos en esencia el Teorema parametrizado de Sard, enunciado en el Lema 6.13. Además, hacemos la consideración siguiente: Cuando en un punto crítico generalizado $(\bar{x}, \bar{t})$ del problema $P_a(\bar{t})$ se satisface la condición LICQ, donde $J_0(\bar{x}, \bar{t}, \mathcal{B}) = \{1, \ldots, p\}$, entonces existe, obviamente, un conjunto de índices, $\bar{I} \subset \{1, \ldots, n+m+p\}$ con $\{n+1, \ldots, n+m+p\} \subset \bar{I}$ y $\bar{M}_a^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) \subset \mathcal{A}(\bar{I})$, donde $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ son los multiplicadores de Lagrange, unívocamente determinados, para los cuales vale que $\hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) = 0$. En cuanto al sistema (6.28) se sigue, en particular, la siguiente afirmación:

Para todo par de conjuntos de índices $(\bar{I}, \tilde{I})$, con $\{n+1, \ldots, n+m+p\} \subset \bar{I}$, la matriz dada en (6.28) posee rango máximo, es decir, los gradientes de las ecuaciones correspondientes constituyen un conjunto linealmente independiente.

Dado que solo existe un conjunto finito de tales pares de índices, se concluye de los lemas 6.13 y 6.15 que, para casi todo (A, c, d) y, con ello, para casi todo parámetro a:

$$M(\bar{I}, \tilde{I}) \pitchfork \tilde{M}_a^\eta, \quad \eta = 0, 1 \tag{6.29}$$

para todo $(\bar{I}, \tilde{I})$ tal que $\{n+1, \ldots, n+m+p\} \subset \bar{I} \subset \{1, \ldots, n+m+p\}$ e $\tilde{I} \subset \{1, \ldots, p\}$.

En lo que sigue de esta primera parte, supondremos que el parámetro a ha sido escogido de modo tal, que valga (6.29). Y para simplificar las cosas, pondremos $a = 0$, dejaremos a un lado dicho parámetro y nos referiremos solo al problema denotado por $P(t)$.

De nuestras consideraciones sobre las codimensiones obtenemos entonces las siguientes posibilidades para $\eta = 0, 1$:

$$\dim M(\bar{I}, \tilde{I}) \cap \tilde{M}^{\eta} = \begin{cases} 1 & \text{para } \tilde{I} = \emptyset \text{ e } \mid \bar{I} \mid = n+m+p \\ 0 & \text{para } \tilde{I} = \emptyset \text{ e } \mid \bar{I} \mid = n+m+p-1 \\ 0 & \text{para } \mid \tilde{I} \mid = 1 \text{ e } \mid \bar{I} \mid = n+m+p \end{cases} \tag{6.30}$$

Además, para $\frac{1}{2}(n+m+p- \mid \bar{I} \mid)(n+m+p- \mid \bar{I} \mid +1)+ \mid \tilde{I} \mid) > 1$ se tiene que $M(\bar{I}, \tilde{I}) \cap \tilde{M}^{\eta} = \emptyset$, pues el número de ecuaciones resulta ser mayor, en este caso, que la dimensión del espacio correspondiente.

Considérese ahora un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}$, supóngase que se satisface LICQ en $\bar{x}$ respecto del conjunto $M(\bar{t})$, que $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$ y que $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in I\!R^m \times I\!R^p$, con $\hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) = 0$.

A causa de LICQ existe un conjunto de índices $\bar{I}$ con la condición $\{n+1, \ldots, n+m+p\} \subset \bar{I} \subset \{1, \ldots, n+m+p\}$, para el cual se tiene que el vector $((\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}), \hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}), \bar{M}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})) \in I\!R^{\tilde{p}}$ pertenece a la intersección de las variedades $\tilde{M}^1$ y $M(\bar{I}, \{j \in \{1, \ldots, p\} \mid \bar{\mu}_j = 0\})$.

De (6.30) se desprenden las tres posibilidades siguientes para $(\bar{x}, \bar{t})$:

1. $\tilde{I} = \emptyset$, es decir, $\mu_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, p$ y rango$(M^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})) = n+m+p$. En tal caso, $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$.

2. $\tilde{I} = \emptyset$, o sea, $\mu_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, p$, y rango$(M^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})) = n+m+p-1$. La condición de transversalidad (6.29) implica además la condición de no degeneración $(3b)$ de la definición de un punto de Tipo 3, de donde se sigue que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^3_{gc}$. La comprobación de lo anterior requiere un cálculo formal que se deja al lector.

3. $\mid \tilde{I} \mid = 1$, es decir, $\mid J_0(\bar{x}, \bar{t}) \backslash J_+(\bar{\mu}) \mid = 1$, donde, s.p.d.g., suponemos que $J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus J_+ = \{p\}$ y que rango$(M^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})) = n+m+p$. Dado que la condición de transversalidad (6.29) vale en particular para $\eta = 0$ y para $\tilde{I} = \{p\}$, se obtiene (6.5) y que rango$(M^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})) = n+m+p-1$, por lo cual podemos concluir que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^2_{gc}$.

Así hemos completado la prueba de la primera parte. En resumen, hemos mostrado hasta aquí que, para casi toda perturbación cuadrática del problema original; es decir, para casi todo valor del parámetro $a = (A, c, \mathcal{B})$, los puntos críticos generalizados del problema uniparamétrico correspondiente $P_a(t)$ para los que se satisface LICQ son precisamente de Tipo 1, 2 o 3.

Segunda parte:
Para la demostración supondremos que el parámetro $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}$ se ha escogido arbitrario, pero fijo, y de modo que, se cumplan las condiciones siguientes (Ver Lema 6.17). El conjunto $\bar{M}(\bar{\mathcal{B}})$ sea la unión de un número finito de variedades cero dimensionales. Además, que el cero de $I\!R^{n+m+p}$ sea un valor regular de $\tilde{G}_{\bar{\mathcal{B}}}$ y que que las condiciones (6.23) y (6.24) se satisfagan para todo $(\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{M}(\mathcal{B})$.

Conforme al Lema 6.17, tales condiciones se satisfacen para casi todo $\mathcal{B}$. Considérese ahora un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{M}(\bar{\mathcal{B}})$ arbitrario, pero fijo. S.p.d.g. puede considerarse que $J_0(\bar{x}, \bar{t}, \bar{\mathcal{B}}) = \{1, \ldots, p\}$. Ahora mostraremos que $(\bar{x}, \bar{t})$ es un punto crítico generalizado de Tipo 4 o de Tipo 5 del problema $P_{(a,c,\bar{\mathcal{B}})}(t)$, para casi todo (A, c).

Como $\bar{M}(\bar{\mathcal{B}})$ está compuesto de un conjunto numerable de puntos se obtiene, usando el Lema 6.15, que para casi todo (A, c) cada punto del conjunto $\bar{M}(\bar{\mathcal{B}})$ es un punto crítico generalizado de Tipo 4 o 5. De las partes primera y segunda, junto con el Teorema de Fubini (Ver p.e. [85], [177]) se obtiene la tesis del teorema.

En lo que resta de la demostración pondremos, para facilitar las cosas, $\bar{\mathcal{B}} = 0$ y prescindimos de dicha notación. Además , sea $\bar{q} \in I\!R^{m+p}$ determinado como en (6.12) y normalizado de modo que

$$\sum_{i \in I} \bar{q}_i D_t h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_t g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 1 \qquad (6.31)$$

Nótese que tal tipo de normalización es posible gracias a (6.23). Para lo que falta de la demostración, supondremos que todos los valores de las funciones tomadas en consideración se refieren a los puntos fijos $(x, t) = (\bar{x}, \bar{t})$, $q_0 = 0$ y $q_j = \bar{q}_j$, $j = 1, \ldots, m + p - 1$, los cuales, para mayor comodidad, serán dejados de lado.

1a. hipótesis parcial:

Para casi todo $(A, c) \in I\!R^{\frac{1}{2}n(n+1)+n}$ vale que

$$((D_x f)^\top + A\bar{x} + c) \notin \text{span}\left\{D_x h_i, i \in I, D_x g_j, j \in \tilde{J}\right\}$$

para todo $\tilde{J} \subset J$ para el cual dim span $\left\{D_x h_i, i \in I, D_x g_j, j \in \tilde{J}\right\} \leq n - 1$.

Demostración: (de la 1a. hipótesis parcial)
Sean dim span $\left\{D_x h_i, i \in I, D_x g_j, j \in \tilde{J}\right\} = \hat{n} \leq n - 1$; $\hat{I} \subset I$, $\hat{J} \subset \tilde{J}$, $\mid \hat{I} \mid + \mid \hat{J} \mid = \hat{n}$ y

$$\text{span}\left\{D_x h_i, i \in I, D_x g_j, j \in \tilde{J}\right\} = \text{span}\left\{D_x h_i, i \in \hat{I}, D_x g_j, j \in \hat{J}\right\}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$D_x f + A\bar{x} + c + \sum_{i \in \hat{I}} \lambda_i D_x h_i + \sum_{j \in \hat{J}} \mu_j D_x g_j = 0 \qquad (6.32)$$

cuyas variables son $(\lambda, \mu, A, c) \in I\!R^{|\hat{I}|} \times I\!R^{|\hat{J}|} \times I\!R^{\frac{1}{2}n(n+1)} \times I\!R^n$. Tal sistema posee una matriz jacobiana regular, dado que la derivada parcial con respecto al parámetro c es la matriz identidad I_n.

Teniendo en cuenta el Lema 6.13 obtenemos que para casi todo (A, c) el sistema (6.32) posee matriz de rango completo en todo punto solución, pero ahora tomando como variables solo a $(\lambda, \mu) \in I\!R^{|\hat{I}|} \times I\!R^{|\hat{J}|}$. Finalmente, como $\mid \hat{I} \mid + \mid \hat{J} \mid \leq n - 1$ y el sistema 6.32 consta de n ecuaciones, podemos afirmar, que el sistema (6.32) no posee solución en las variables (λ, μ), para casi todo (A, c), lo cual prueba el enunciado propuesto. $\square$

Ahora distinguiremos dos casos. En el primer caso sea $m+p > n$. Se obtienen entonces (5a) y (5b) a partir de lo supuesto y especialmente de (6.23) y (6.24). La 1a. hipótesis parcial implica, además, que se satisface la condición (5c), para casi todo (A, c), y, con ello, que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^5_{gc}$.

En el segundo caso sea $m + p \leq n$. A causa de (6.31) se tiene que $\bar{q} \neq 0$. S.p.d.g. supóngase que $\bar{q}_{m+p} \neq 0$. Sustitúyase $\hat{q}_{m+p} = \bar{q}_{m+p}$ en la definición de $\tilde{\mathcal{L}}$ en (6.25). De la ecuación (6.31) se sigue que $D_t \tilde{\mathcal{L}} \neq 0$. Dado que, por hipótesis, 0_{n+m+p} es un valor regular de $\tilde{G}(= \tilde{G}_{\mathcal{B}})$, obtenemos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} D_x^2 \tilde{\mathcal{L}} & D_x A^0 \\ (D_x A^0)^\top & 0 \end{pmatrix} = n + m + p - 1 \qquad (6.33)$$

Sea ahora W una $(n, n-m-p+1)$-matriz cuyas columnas constituyan una base del espacio

$$\{\tilde{x} \in I\!R^n \mid D_x h_i \tilde{x} = 0, i \in I, D_x g_j \tilde{x} = 0, j = 1, \dots, p-1\}$$

.

El Lema 6.1, junto con (6.33) implican que

$$\text{rango}\left(W^\top D_x^2 \tilde{\mathcal{L}} W\right) = n - m - p + 1 \tag{6.34}$$

Además , sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{L}$ determinadas como en $(4c)$, conforme a la definición de un punto de Tipo 4, donde $\bar{q}_j, j = 1, \dots, m+p$ satisface la normalización (6.31) y $q_0 = 0$. Entonces se tiene que $D_x^2\mathcal{L} = D_x^2\tilde{\mathcal{L}}$. De la 1a. hipótesis parcial y de $m + p \leq n$ se sigue

$$(D_x f)^\top + A\bar{x} + c \notin \text{ span}\{D_x h_i, i \in I, D_x g_j, j = 1, \dots, p\} \tag{6.35}$$

para casi todo (A, c).

<u>2a. hipótesis parcial:</u>
Para casi todo $(A, c) \in I\!R^{\frac{1}{2}n(n+1)+n}$ vale que

$$((D_x f)^\top + A\bar{x} + c)^\top W (W^\top D_x^2 \mathcal{L} W)^{-1} W^\top ((D_x f)^\top + A\bar{x} + c) \neq 0 \tag{6.36}$$

<u>Demostración:</u> (de la 2a. hipótesis parcial)
Teniendo en cuenta la definición de W puede comprobarse fácilmente que la matriz $\tilde{W} = W(W^\top D_x^2 \mathcal{L} W)^{-1} W^\top$ no es nula. De acuerdo al Lema 6.16 el conjunto

$$\left\{x \in I\!R^n \mid x^\top \tilde{W} x = 0\right\} \tag{6.37}$$

posee medida nula.

Mediante el teorema de Fubini (Ver p.e. [85], [177]) puede probarse ahora que el conjunto de los puntos (A, c) para los cuales el vector $((D_x f)^\top + A\bar{x} + c)^\top$ está incluido en (6.37) tiene también medida nula, lo cual prueba la 2a. hipótesis parcial. $\Box$

Notemos solamente de modo indicativo, que al fijar A, el conjunto de los vectores $c \in I\!R^n$ para los cuales (A, c) no cumple (6.36) es la traslación del conjunto (6.37) hasta el punto $-(D_x f)^\top - A\bar{x}$ y, por tanto, es también de medida nula (en $I\!R^n$). $\Box$

Nuestro objetivo consiste ahora en mostrar la condición $(4c)$ correspondiente a la definición de un punto de Tipo 4, para casi todo (A, c). Para ello, sean (A, c) de tal modo que (6.35) y (6.36) se satisfagan y que, s.p.d.g., $A = 0$ y $c = 0$. Así mismo, prescindiremos de las notaciones (A, c) en lo que falta de la prueba.

Dado que 0_{n+m+p} es un valor regular de $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}}$, se deduce que

$$\text{rango}(D\mathcal{G}) = n + m + p$$

y que

$$\text{rango}(D_x A^1) = m + p - 1.$$

De ello se desprende la existencia de un vector $w = (w^1, w^2, w^3, w^4)$, unívocamente determinado, tal que $w \neq 0$, $w^1 \in I\!R^n$, $w^2 \in I\!R^{m+p-1}$ y $D\mathcal{G}w = 0$. Entonces

$$D\mathcal{G}w = \left\{ \begin{array}{lcl} D_x^2\mathcal{L}w^1 + D_xA^0w^2 + D_{tx}\mathcal{L}w^3 + D_xfw^4 = 0 & & \\ (D_xA^1)^\top w^1 \quad + \begin{pmatrix} D_th_1 \\ \vdots \\ D_th_m \\ D_tg_1 \\ \vdots \\ D_tg_p \end{pmatrix} w^3 & = 0 & \end{array} \right\} \tag{6.38}$$

Dado que $\text{rango}(D_xA^1) = m + p - 1$ se tiene $w^3 = 0$. Por lo tanto, $w^1 \in \{\tilde{x} \in I\!R^n \mid D_xh_i\tilde{x} = 0, i \in I, D_xg_j\tilde{x} = 0, j = 1, \ldots, p\}$ y, de aquí se sigue la existencia de un vector $b \in I\!R^{n-m-p+1}$ con $w^1 = Wb$ y W definido como en (6.34). De la primera fila de (6.38) se obtiene, multiplicando desde la izquierda por $W^\top$, que

$$W^\top D_x^2\mathcal{L}Wb + W^\top D_xfw^4 = 0$$

y de (6.34) se sigue entonces que

$$b = -\left(W^\top D_x^2\mathcal{L}W\right)^{-1} W^\top D_xfw^4 \tag{6.39}$$

De (6.35) se obtiene que $w^1 \neq 0$ y $b \neq 0$ y, con ello,

$$w^4 \neq 0. \tag{6.40}$$

S.p.d.g. ponemos $w^4 = 1$. Conforme a $(4c)$ deseamos mostrar ahora que $(\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$ es un punto crítico no degenerado del problema $(\hat{\mathcal{P}})$. Este punto es obviamente un punto estacionario de $(\hat{\mathcal{P}})$, dado que

$$D\hat{\mathcal{F}} - (D\mathcal{G})^{\top} \begin{pmatrix} 0_n \\ \bar{q} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0_{n+m+p-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{i \in I} \bar{q}_i \begin{pmatrix} D_x h_i \\ 0 \\ D_t h_i \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} \begin{pmatrix} D_x g_j \\ 0 \\ D_t g_j \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.41)$$

Dado que rango$(D\mathcal{G}) = n + m + p$ se tiene LICQ en el punto $(\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$ con relación al problema $\hat{\mathcal{P}}$. Ahora consideramos la derivada de (6.41) restringida al subespacio $\{w \in \mathbb{R}^{n+m+p+1} \mid D\mathcal{G}w = 0\}$, para el cual $(Wb, w^2, 0, 1)$ constituye precisamente una base:

$$\begin{aligned} & -(Wb, w^2, 0, 1)^{\top} \left[(D^2\mathcal{G})^{\top} \begin{pmatrix} 0_n \\ \bar{q} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Wb \\ w^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ & = -b^{\top} W^{\top} \left[\sum_{i \in I} \bar{q}_i D_x^2 h_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_x^2 g_j \right] Wb = \\ & = D_x f^{\top} W \left(W^{\top} D_x^2 \mathcal{L} W \right)^{-1} W^{\top} D_x^2 \mathcal{L} W \left(W^{\top} D_x^2 \mathcal{L} W \right)^{-1} W^{\top} D_x f, \end{aligned} \qquad (6.42)$$

esto se obtiene teniendo en cuenta primeramente que:

$$\left[(D^2\mathcal{G})^{\top} \begin{pmatrix} 0_n \\ \bar{q} \end{pmatrix} \right] = \left[\sum_{i \in I} \bar{q}_i D \begin{pmatrix} D_x h_i \\ 0 \\ D_t h_i \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D \begin{pmatrix} D_x g_i \\ 0 \\ D_t g_i \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left[\sum_{i \in I} \bar{q}_i \begin{pmatrix} D_x^2 h_i & 0 & D_{xt} h_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{xt}^2 h_i & 0 & D_t^2 h_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} \begin{pmatrix} D_x^2 g_j & 0 & D_{xt} g_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{xt}^2 g_j & 0 & D_t^2 g_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

y luego haciendo uso de (6.39) y de que $D_x^2\mathcal{L} = -\sum_{i\in I}\bar{q}_i D_x^2 h_i - \sum_{j=1}^{p}\bar{q}_{m+j}D_x^2 g_j$. A causa de (6.36) la expresión (6.42) no se anula y, por lo tanto, $(\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$ es un punto crítico no degenerado del problema $(\hat{\mathcal{P}})$. Con ello se satisface la condición $(4c)$. Por otra parte, las condiciones $(4a)$ y $(4b)$ se satisfacen a causa de (6.23) y (6.24), de todo lo cual se sigue que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$. Con esto se completa la demostración. □

En la nota siguiente, se considera algunas propiedades topológicas del conjunto Σ_{gc} en una vecindad de un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$.

Observación 6.19

Sea $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$. Entonces el vector w que aparece en la segunda parte de la prueba del Teorema 6.18, concretamente en (6.38), es precisamente un vector tangencial al conjunto $\mathcal{G}^{-1}(0)$, el cual, por su parte (a causa de (4c)), es una C^1-variedad unidimensional en una vecindad del punto $(x, q, t, q_0) = (\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$. De la representación (6.42) y del caracter no degenerado del punto crítico $(\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$, correspondiente al problema $(\hat{\mathcal{P}})$, se obtiene

$$D_x f(\bar{x}, \bar{t}) \notin span\{D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), j = 1, \ldots, p\}, \quad (6.43)$$

pues, de lo contrario, se anularía la expresión en (6.42).

Las propiedades (4b) y (6.43) implican la existencia de una vecindad $U(\bar{x}, \bar{t}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ del punto $(\bar{x}, \bar{t})$, de modo que $g_j(x, t) = 0$, $j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$, para todo $(x, t) \in \Sigma_{gc} \cap U(\bar{x}, \bar{t})$ y, con ello, $\Sigma_{gc} \cap U(\bar{x}, \bar{t})$ resulta ser idéntico con la proyección del conjunto factible del problema $(\hat{\mathcal{P}})$ sobre el (x, t)-espacio. De (6.38) y de la no degeneración se sigue que la última componente de w no se anula, lo cual indica que q_0 cambia de signo al traspasar el valor cero.

Por último, dado que el término en (6.42) no desaparece, (6.39) y (6.42) nos proporcionan precisamente $D_x f(\bar{x}, \bar{t})Wb \neq 0$, donde Wb son las primeras n componentes del vector w. De todo esto se sigue que f, restringida al conjunto $\Sigma_{gc} \cap U(\bar{x}, \bar{t})$, es estrictamente creciente o estrictamente decreciente (Ver Figura 6.12).

Observación 6.20

De la primera parte de la prueba del Teorema 6.18 se sigue que el

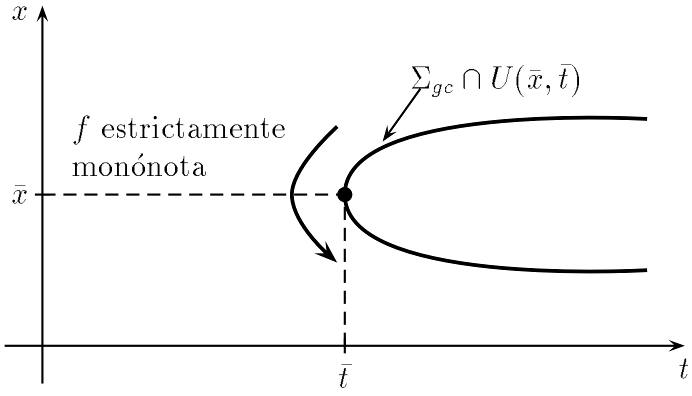


Figura 6.12: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^4_{gc}$

problema $\mathcal{P}_{(A,c,0,d)}(t)$ solo posee puntos de Tipo 1,2,3 cuando se satisface la condición LICQ, para casi todo (A, c, d). Por lo tanto, no se requiere de perturbaciones lineales del tipo $b_i^\top x$, $i \in I$ (resp. $b_{m+j}^\top x$, $j \in J$), cuando se desea aproximar puntos que satisfacen LICQ. Por otra parte, cuando elegimos un parámetro $\mathcal{B}$ conforme a los criterios utilizados en la segunda parte de la prueba del Teorema 6.18, se sigue que cada punto contenido en el conjunto $\bar{M}(\mathcal{B})$ es un punto crítico generalizado del problema $\mathcal{P}_{(0,c,\mathcal{B})}(t)$ de Tipo 4 o 5, para casi todo $c \in \mathbb{R}^n$. Esto se debe a que las condiciones (6.35) y (6.36) se satisfacen para casi todo $c \in \mathbb{R}^n$, cualquiera sea la matriz simétrica fija A.

El Teorema 6.18 nos dice que las funciones que describen al problema $\mathcal{P}_a(t)$ pertenecen a la clase $\mathcal{F}$ para casi todo valor del parámetro a, incluyendo, por tanto, que dicho parámetros puedan ser escogidos arbitrariamente pequeños . Sin embargo, dada una C^3_S-vecindad $\mathcal{V}$ de (f, H, G), no existe, en general, un parámetro a, pequeño y fijo, de modo tal que

$$(f(x, t, A, c), h_i(x, t, b_i, d_i), g_j(x, t, b_{m+j}, d_{m+j}))_{i \in I, j \in J} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{V}$$

Esto se debe a que el ínfimo de las funciones $\varepsilon(x)$ que caracterizan a una C^3_S-vecindad $\mathcal{V}$ puede ser nulo, mientras que las componentes del parámetro a aparecen como constantes en las normas de la primera y segunda derivadas de las funciones que describen al problema $\mathcal{P}_a(t)$. Del Teorema 6.18 no se sigue, por lo dicho anteriormente, que la clase $\mathcal{F} \subset C^3(I\!\!R^n \times I\!\!R, I\!\!R)^{1+m+s}$ sea C^3_S-abierta. Esto lo mostraremos en el Teorema 6.25 (Teorema de genericidad). Pero antes debemos poner atención a otro teorema de perturbación, en el cual son utilizados igualmente parámetros complementarios.

En [110] se ha considerado el sistema de ecuaciones

$$\mathcal{H}(x, \lambda, \mu, t) = 0 \tag{6.44}$$

donde $\lambda \in I\!\!R^m$, $\mu \in I\!\!R^s$,

$$\mathcal{H}(x, \lambda, \mu, t) = \begin{bmatrix} D_x f(x,t) - \sum_{i \in I} \lambda_i D_x h_i(x,t) - \sum_{j \in J} \mu_j^+ D_x g_j(x,t) \\ h_1(x,t) \\ \vdots \\ h_m(x,t) \\ \mu_1^- + g_1(x,t) \\ \vdots \\ \mu_s^- + g_s(x,t) \end{bmatrix}$$

aquí, $\mu_j^+ = \max\{0, \mu_j\}$ y $\mu_j^- = \min\{0, \mu_j\}$ con $j \in J$.

El sistema (6.44) está íntimamente relacionado con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema $P(t)$. En efecto, se cumple que $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) = 0$ si y solo si $\bar{x}$ es un punto estacionario de $P(\bar{t})$ con multiplicadores de Lagrange correspondientes $\lambda_i, i \in I$, $\mu_j^+, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$ y $\mu_j^- = -g_j(\bar{x}, \bar{t})$, $j \in J$.

Se dice que 0_{n+m+s} es un valor regular de la aplicación $\mathcal{H}$, la cual suponemos derivable a trozos, cuando en cada punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) \in \mathcal{H}^{-1}(0)$ se satisfacen las tres condiciones siguientes (supongamos , s.p.d.g. que $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$):

(RW1) $\mid J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus J_+(\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p) \mid \leq 1$.

(RW2) Si $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = J_+((\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p))$ entonces

$$\text{rango } D\hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p, \bar{t}) = n + m + p$$

donde $\hat{H}^1$ se define como en la primera parte de la prueba del Teorema 6.18.

(RW3) Si $\mid J_0(\bar{x},\bar{t}) \setminus J_+(\bar{\mu}_1,\ldots,\bar{\mu}_p) \mid = 1$, supóngamos, s.p.d.g., que $J_+(\bar{\mu}_1,\ldots,\bar{\mu}_p) = \{1,\ldots,p-1\}$. Entonces

$$\text{rango}\begin{pmatrix} D\hat{H}^1(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}_1,\ldots,\bar{\mu}_p,\bar{t}) \\ e^{n+m+p} \end{pmatrix} =$$
$$\text{rango}\begin{pmatrix} D\hat{H}^0(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}_1,\ldots,\bar{\mu}_p,\bar{t}) \\ e^{n+m+p} \end{pmatrix} = n+m+p+1$$

donde $\hat{H}^0$ y $\hat{H}^1$ se definen como en la primera parte de la prueba del Teorema 6.18 y $e^{n+m+p} \in I\!\!R^{n+m+p+1}$ con

$$e_i^{n+m+p} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = n+m+p \\ 0 & \text{en los demas casos} \end{cases}$$

En el resultado siguiente veremos que de la propiedad de 0_{n+m+s} de ser un valor regular para la aplicación $\mathcal{H}$, se sigue, bajo la condición MFCQ, que el conjunto Σ_{stat} posea una estructura apropiada para métodos de seguimiento.

Resultado 6.21 *(cfr. [110], Capítulo 4).*
Sea 0_{n+m+s} un valor regular de $\mathcal{H}$ y supóngase que la condición MFCQ se satisface en el punto $\bar{x}$ en relación con el problema $P(\bar{t})$, para todo $(\bar{x},\bar{t}) \in cl\ \Sigma_{stat}$,. Entonces Σ_{stat} es una variedad unidimensional y, para cada componente conexa S de Σ_{stat} homeomorfa a $I\!\!R$, existe un homeomorfismo $u \in I\!\!R \mapsto (x(u),t(u))$ tal que $\|(x(u),t(u))\| \mapsto \infty$ para $\mid u \mid \mapsto \infty$ y $S = \{(x(u),t(u)) \mid u \in I\!\!R\}$. En particular, existe una correspondencia biunívoca entre las componentes conexas de Σ_{stat} y de $\mathcal{H}^{-1}(0)$.

Cuando la condición MFCQ se satisface en cada $(\bar{x},\bar{t}) \in$ cl Σ_{stat}, sucede que el conjunto cl Σ_{stat} no posee puntos de Tipo 4 ni ningún punto de Tipo 5 en el cual no se satisfaga MFCQ. Bajo esta condición quedan excluidos, a priori, precisamente los delicados casos en los cuales una componente conexa del conjunto factible se hace vacía (al variar t) y la componente conexa correspondiente de cl Σ_{stat} posee un puntos frontera, que la termina. Tal y como ya lo hemos mencionado en la Sección 6.1, los métodos de seguimiento no pueden emplearse con éxito en tales casos. Presentamos a continuación el resultado anunciado anteriormente.

Resultado 6.22
Para casi todo $(c,d) \in I\!R^n \times I\!R^{m+s}$*, el vector* 0_{n+m+s} *es un valor regular de la aplicación* $\mathcal{H}_{(c,d)}$*, obtenida de* $\mathcal{H}$ *al sustituir las funciones* $(f(x,t), h_i(x,t), g_j(x,t))_{i\in I, j\in J}$ *por las funciones*

$$(f(x,t) + c^{\mathsf{T}}x, h_i(x,t) + d_i, g_j(x,t) + d_{m+j})_{i\in I, j\in J}$$

La prueba de esta aserción utiliza basicamente los lemas 6.13 y 6.15 y se deja al lector. Para la discusión que tendrá lugar en el Capítulo 8, introducimos ahora las siguientes notaciones:

Definición 6.23
1. Un problema uniparamétrico $P(t)$ *se denomina regular, en el sentido de Jongen, Jonker y Twilt (en breve JJT-regular), si* $(f,H,G) \in \mathcal{F}$*.*
2. $P(t)$ *se denomina regular, en el sentido de Kojima e Hirabayashi (o KH-regular), si* 0_{n+m+s} *es un valor regular de* $\mathcal{H}$*.*

Nótese que la JJT-regularidad es una condición que controla la estructura del conjunto Σ_{gc}, mientras que la KH-regularidad establece, en principio, propiedades sobre el conjunto $\mathcal{H}^{-1}$ y, eventualmente, rige la estructura de $\Sigma_{stat} \subset \Sigma_{gc}$. Desde este punto de vista la KH-regularidad establece condiciones sobre un conjunto mas pequeño. El siguiente resultado nos indica mas claramente la relación existente entre ambas condiciones de regularidad.

Resultado 6.24 *([164])*
Si $P(t)$ *es JJT-regular entonces es también KH-regular.*

<u>Demostración:</u>
Sea $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) \in \mathcal{H}^{-1}(0)$ arbitrario y fijo y supóngase, s.p.d.g. que $J_0(\bar{x},\bar{t}) = \{1,\dots,p\}$. Si $\mid J_0(\bar{x},\bar{t}) \setminus J_+(\bar{\mu}_1,\dots,\bar{\mu}_p) \mid = 1$, sea $J_0(\bar{x},\bar{t}) \setminus J_+(\bar{\mu}) = \{p\}$. Para cada $\nu \in \{1,2,3,4,5\}$ tomamos en cada caso $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^{\nu}$ y mostramos que se satisfacen las condiciones $(RW1)$, $(RW2)$ y $(RW3)$.

Sea $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^1$. De $(1b)$ se desprende la condición $(RW1)$ y de $(1c')$ la condición $(RW2)$.

Sea $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$. De $(2b)$ se sigue la condición $(RW1)$ y de $(2a)$, $(2c)$ y (6.5) se sigue la condición $(RW3)$.

Sea $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^3_{gc}$. De $(3a)$ se obtiene la condición $(RW1)$ y de $(3b)$ se sigue la condición $(RW2)$.

Sea $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^5_{gc}$. De $(5c)$ se obtiene la condición $(RW1)$. Si $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = J_+(\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p)$, obtenemos de $(5a)$ y del Lema 6.1 la condición $(RW2)$. Supóngase ahora que $\mid J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus J_+((\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p)) \mid = 1$. Entonces $(5a)$ implica precisamente que

$$\text{rango } D\hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p, \bar{t}) = \text{rango } D\hat{H}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p, \bar{t}) = 2n+1$$

y que

$$D\hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p, \bar{t}) \begin{pmatrix} 0_n \\ \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

donde $\bar{q}$ está determinado como en (6.12). De $(5b)$ se sigue entonces que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} D\hat{H}^1(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p, \bar{t}) \\ e^{n+m+p} \end{pmatrix} = 2n+2$$

De (5a) y (6.27) con $j_0 = p$ se obtiene que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} D\hat{H}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p, \bar{t}) \\ e^{n+m+p} \end{pmatrix} = 2n+2$$

Hemos obtenido $(RW2)$ y la demostración queda concluida. $\Box$

Ahora mostraremos el tantas veces anunciado.

Teorema 6.25 *(Teorema de genericidad [93]).*
El conjunto $\mathcal{F}$ es abierto y denso en $C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)^{1+m+s}$ para la C^3_S-topología.

<u>Demostración:</u>
La prueba transcurre en dos partes. En la primera mostraremos que el conjunto es abierto y, en la segunda, que es denso. Para simplificar nos limitaremos al caso $m = s = 0$. La demostración se puede trasladar sin dificultad al caso general, aunque con una considerable cantidad de formalismos. En lo que sigue, el índice ρ recorrerá el conjunto de los números naturales $I\!N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Primera parte:
Sea $\bar{f} \in \mathcal{F}$. Con una técnica análoga a la empleada en la prueba del Lema 6.3 (Ver también Observación 6.4), se obtiene, para cada punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in I\!\!R^n \times I\!\!R$, la existencia de una vecindad $U(\bar{x}, \bar{t}) \subset I\!\!R^n \times I\!\!R$ de $(\bar{x}, \bar{t})$ y una C^3_S-vecindad $\mathcal{V}(\bar{x}, \bar{t})$ de $\bar{f} \in C^3(I\!\!R^n \times I\!\!R, I\!\!R)$, caracterizado a su vez por $\varepsilon^{(\bar{x},\bar{t})} \in C^0(I\!\!R^n \times I\!\!R, I\!\!R_+)$, tal que, para todo $\tilde{f} \in \mathcal{V}(\bar{x}, \bar{t})$, se tiene:

- Si $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}(\bar{f})$ entonces
$$\Sigma_{gc}(\tilde{f}) \cap U(\bar{x}, \bar{t}) \subset \cup_{\nu=1}^{5} \Sigma^{\nu}_{gc}(\tilde{f}) \left(= \Sigma^1_{gc}(\tilde{f}) \cup \Sigma^3_{gc}(\tilde{f})\right)$$
donde las notaciones corresponden a las empleadas en el Lema 6.3.

- Si $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{gc}(\bar{f})$ entonces $\Sigma_{gc}(\tilde{f}) \cap U(\bar{x}, \bar{t}) = \emptyset$.

Como vemos tenemos en la mano una propiedad localmente estable. Solo nos queda extender lo anterior a un resultado global sobre todo $I\!\!R^n \times I\!\!R$. Para ello escogemos un subcubrimiento localmente finito
$$\{U^{\rho}(= U(x^{\rho}, t^{\rho})) \mid (x^{\rho}, t^{\rho}) \in I\!\!R^n \times I\!\!R\}$$
del espacio $I\!\!R^n \times I\!\!R$, el cual siempre existe. La propiedad del subcubrimiento de ser localmente finito implica la existencia de una función $\varepsilon \in C^0(I\!\!R^n \times I\!\!R, I\!\!R_+)$, tal que, para cada punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in I\!\!R^n \times I\!\!R$ y todo $\tilde{\rho}$ con $(\bar{x}, \bar{t}) \in U^{\tilde{\rho}}$ vale precisamente que $\varepsilon(\bar{x}, \bar{t}) \leq \varepsilon^{(x^{\tilde{\rho}}, t^{\tilde{\rho}})}(\bar{x}, \bar{t})$. Tal función ε define claramente una C^3_S-vecindad $\mathcal{V}$ de $\bar{f} \in C^3(I\!\!R^n \times I\!\!R)$, de modo que $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ para todo $\tilde{f} \in \mathcal{V}$.

Segunda parte:
Sea ahora $f \in C^3(I\!\!R^n \times I\!\!R)$ arbitraria pero fija y $\bar{\mathcal{V}}$ una C^3_S-vecindad de $f \in C^3(I\!\!R^n \times I\!\!R)$. Obtendremos una función $\tilde{f} \in \bar{\mathcal{V}} \cap \mathcal{F}$ y con ello queda probado el teorema.

Sea $B_{\rho} = \{(x, t) \in I\!\!R^n \times I\!\!R \mid \|(x, t)\| < \rho\}$. Consideremos el cubrimiento abierto de $I\!\!R^n \times I\!\!R$ dado por $\{B_3, I\!\!R^n \times I\!\!R \backslash \mathrm{cl} B_2\}$. Considérese también una partición de la unidad correspondiente a dicho recubrimiento (El lector no familiarizado con las particiones de la unidad puede remitirse por ejemplo, entre muchos, al libro [179]). O sea, un par de C^{∞}-funciones $\xi^1_1, \xi^1_2 : I\!\!R^n \times I\!\!R \mapsto [0, 1]$, las cuales poseen las siguientes propiedades:

- $\text{supp}\ \xi_1^1 \subset B_3$, $\text{supp}\ \xi_2^1 \subset I\!R^n \times I\!R \setminus \text{cl}\ B_2$, donde
$$\text{supp}\ \xi_1^1 = \text{cl}\ \{(x,t) \in I\!R^n \times I\!R \mid \xi_1^1(x,t) > 0\}$$
- $\xi_1^1(x,t) + \xi_2^1(x,t) = 1$ para todo $(x,t) \in I\!R^n \times I\!R$.

Entonces obtenemos que $\xi_1^1|_{\text{cl}B_2} \equiv 1$ y $\xi_1^1|_{I\!R^n \times I\!R \setminus B_3} \equiv 0$.

Esta partición de la unidad existe independientemente de f y $\bar{\mathcal{V}}$. Ahora escogemos, conforme al Teorema 6.18, un parámetro $a^1 \in I\!R^\gamma$ (para $m = s = 0$ se tiene que $a^1 = (A^1, c^1)$) tan pequeño que la función

$$f^1(x,t) = \xi_1^1(x,t)[f(x,t) + \frac{1}{2}x^\top A^1 x + (c^1)^\top x] + \xi_2^1(x,t)f(x,t)$$

satisfaga las siguientes condiciones

- $f^1 \in \bar{\mathcal{V}}$
- $\Sigma_{gc}(f^1) \cap \text{cl}B_2 \subset \bigcup_{\nu=1}^5 \Sigma_{gc}^\nu(f^1)$.

Ahora consideramos el cubrimiento abierto de $I\!R^n \times I\!R$ dado por

$$\{B_4 \setminus \text{cl}B_1, B_2 \cup \{I\!R^n \times I\!R \setminus \text{cl}B_3\}\}$$

y una correspondiente partición de la unidad, la cual también existe independientemente de f, f^1 y $\bar{\mathcal{F}}$. Tomando en consideración la primera parte y el Teorema 6.18 escogemos otro parámetro pequeño $a^2 \in I\!R^\gamma$, de modo que la función

$$f^2(x,t) = \xi_1^2(x,t)[f^1(x,t) + \frac{1}{2}x^\top A^2 x + (c^2)^\top x] + \xi_2^2(x,t)f^1(x,t)$$

satisfaga que:

- $f^2 \in \bar{\mathcal{V}}$, $f^2|_{cl\ B_1} \equiv f^1|_{cl\ B_1}$
- $\Sigma_{gc}(f^2) \cap \text{cl}\ B_3 \subset \bigcup_{\nu=1}^5 \Sigma_{gc}^\nu(f^2)$.

De un modo análogo podemos construir una sucesión de funciones $\{f^\rho\}$ con las propiedades siguientes:

- $f^\rho \in \bar{\mathcal{V}}$, $f^\rho|_{cl\ B_{\rho-1}} \equiv f^{\rho-1}|_{cl\ B_{\rho-1}}$ y

- $\Sigma_{gc}(f^\rho) \cap \mathrm{cl}\ B_{\rho+1} \subset \bigcup_{\nu=1}^{5} \Sigma_{gc}^{\nu}(f^\rho)$.

Para $(x,t) \in I\!R^n \times I\!R$ sea $\rho(x,t) = \min\{\rho \mid (x,t) \in B_\rho\}$. Por último definimos $\tilde{f}(x,t) := f^{\rho(x,t)}(x,t)$, la cual satisface claramente $\tilde{f} \in \bar{\mathcal{V}} \cap \mathcal{F}$. Con ello se termina la prueba. $\Box$

En el Resultado 6.21 hemos supuesto que MFCQ se satisface en $\bar{x}$ en relación con el problema $P(\bar{t})$ para todo $(\bar{x},\bar{t}) \in \mathrm{cl}\ \Sigma_{stat}$. Con esta suposición hemos descartado la situación según la cual Σ_{stat} posee un punto en la frontera. El teorema de genericidad muestra, en particular, que tal suposición, en el caso general, no se satisface, dado que pueden aparecer puntos de Tipo 4 y 5.

Observación 6.26
Acerca de la importancia de tomar la tpología fuerte de Whitney puede anotarse a manera de motivación, la exitencia de ejemplos que prueban que la clase $\mathcal{F}$ no es abierta al tomarse por ejemplo la C^k topología débil. (Ver [91]).

Finalmente, referimos al lector a dos trabajos en los cuales se ha investigado singularidades en el conjunto solución de problemas de optimización paramétrica. En [188] se ha estudiado el conjunto de puntos mínimos locales de $P(t)$. Ahí se ha formulado las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema $P(t)$ como un sistema de ecuaciones no lineales y se ha aplicado la teoría de bifurcación a dicho sistema. La clasificación de las singularidades que aparecen en dicho sistema se logra a través de siete tipos diferentes de condiciones. Por último, en [164] se logra obtener una partición del conjunto Σ_{stat} en siete clases disjuntas bajo la condición de que $P(t)$ sea KH-regular.

Capítulo 7

Métodos de continuación y saltos

7.1 Notas introductorias

El punto de partida de este capítulo es el problema uniparamétrico

$$P(t) \quad \min \{f(\cdot, t) \mid x \in M(t)\}$$

el cual ha sido definido y tratado detalladamente en los capítulos precedentes. Cuando $P(t)$ satisface alguna de las condiciones de regularidad dadas en la Definición 6.23, es decir, es JJT-regular (resp. KH-regular), entonces el conjunto que nos interesa Σ_{gc} (resp. Σ_{stat}) posee una estructura adecuada para la utilización de métodos de continuación. Bajo las condiciones del Resultado 6.11 (resp. Resultado 6.21) tal conjunto es, localmente, la unión de un número finito de variedades unidimensionales (resp. es una variedad unidimensional). El planteamiento de un método de tal tipo se puede hacer del siguiente modo: Partiendo de un parámetro que recorra un intervalo compacto, el cual supondremos, s.p.d.g., que es el [0,1] y de una solución conocida x^0 (p.e. la parte x de un punto crítico generalizado, de un punto estacionario o de un punto de mínimo local) de $P(0)$ debe encontrarse una discretización del intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{\bar{N}-1} < t_{\bar{N}} = 1$$

así como alguna de las variantes siguientes:

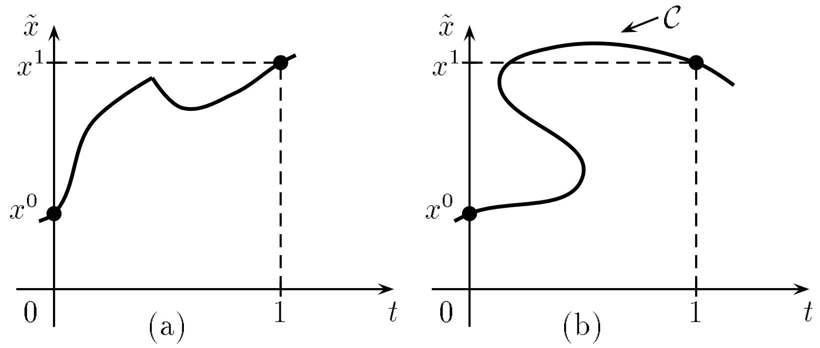


Figura 7.1: $(x^0, 0)$ y $(x^1, 1)$ están unidos por una curva solución

- Puntos críticos generalizados $(x(t_k), t_k)$ de $P(t_k)$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$,
- Puntos estacionarios $x(t_k)$ de $P(t_k)$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$,
- Puntos mínimos locales $x(t_k)$ de $P(t_k)$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$.

Tal planteamiento puede realizarse bajo la condición de que exista una función contínua

$$\tilde{x} : t \in [0, 1] \mapsto \tilde{x}(t) \in I\!R^n$$

para la cual $\tilde{x}(0) = x^0$ y, además, $\tilde{x}(t)$ sea una solución de $P(t)$ para $t \in [0, 1]$ (Ver Figura 7.1(a)).

Cuando solo se está interesado en encontrar una solución de $P(1)$, se puede modificar correspondientemente el planteamiento del problema y debilitar la última condición mencionada, exigiendo solo la existencia de una curva $\mathcal{C} \subset I\!R^n \times I\!R$ que conecte la solución conocida $(x^0, 0)$ con una solución buscada $(x^1, 1)$ del problema que nos interesa $P(1)$. En tal caso $\hat{x}$ debe ser solución de $P(\hat{t})$ y $\hat{t} \in [0, 1]$ para cada punto $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathcal{C}$ (Ver Figura 7.1(b)).

Cuando dicha condición y ciertas suposiciones para la factibilidad de la ejecución numérica están satisfechos entonces se puede aproximar la curva solución $\{(\tilde{x}(t), t) \mid t \in [0, 1]\}$ (resp. $\mathcal{C}$) mediante un procedimiento de continuación y computar una aproximación adecuada de la solución buscada x^1 de $(P(1))$, la cual puede ser utilizada, a su vez, como punto de partida para un procedimiento de convergencia local, el cual genere una sucesión convergente a x^1. En la Sección 7.3 aclararemos este procedimiento con más precisión.

Desgraciadamente, para el caso no-convexo no existe, en general, una curva solución. En el ejemplo siguiente el conjunto $\Sigma_{stat}\ |_{[-1,1]}$ es una variedad unidimensional. Sin embargo, no existe una curva solución "que una los valores de los parámetros 0 y 1", por lo cual no se dispone de una estructura cómoda para la utilización de métodos de continuación.

Denominamos con

$$\Sigma_{loc} = \{(x,t) \in \Sigma_{stat} \mid x \text{ es un punto mínimo local de } P(t)\}$$

Ejemplo 7.1 *(Ejemplo 5.1.1 en [61])*
Consideramos el problema sin restricciones dado por

$$min \quad \{f(x,t) \mid x \in I\!R\}, \quad t \in I\!R$$

donde

$$f(x,t) = xSen\ x - 4tArctan\ [6t(x+3.5)] + 4tArctan\ [3(2t-1)(x+1))].$$

La estructura de Σ_{stat} se ilustra en la Figura 7.2 (Los términos en inglés y las pequeñas escrituras fuera del marco de la figura están asociadas, como se explicó en la introducción, a el uso de el programa PAFO para generar la curva, y la figura presentada). La curva contínua representa a $\Sigma_{loc}|_{[-1,1]}$ y la curva punteada representa a $\Sigma_{stat}|_{[-1,1]} \setminus \Sigma_{loc}|_{[-1,1]}$.

Ahora queremos ilustrar, con ayuda de los así llamados métodos de inmersión (como una posible aplicación de los métodos de continuación), cuán restrictiva es la suposición de la existencia de una tal curva solución. Para ello, consideremos el problema de optimización (no paramétrico) siguiente:

$$(P) \quad \min\ \{f(x) \mid x \in M\}$$

donde $M = \{x \in I\!R^n \mid h_i(x) = 0, i \in I, g_j(x) \geq 0, j \in J\}$, I y J están definidas como en el problema $P(t)$ y $(f, h_i, g_j)_{i \in I, j \in J} \in C^2(I\!R^n, I\!R)^{1+m+s}$.

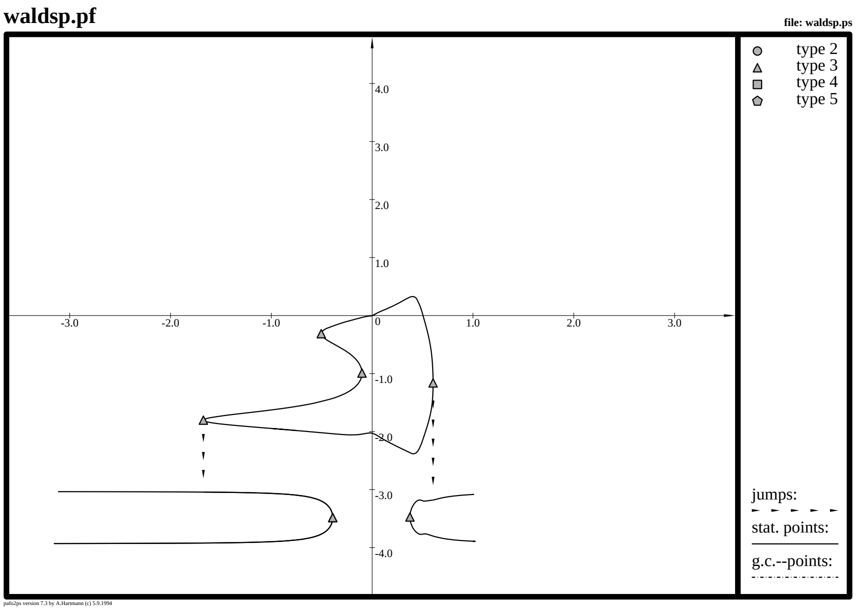


Figura 7.2: Los valores 0 y 1 del parámetro t “no están conectados entre sí” mediante $\Sigma_{stat}|_{[-1,1]}$

La idea principal consiste en la construcción de un problema uniparamétrico auxiliar de la forma $P(t)$, de modo tal que una solución de partida x^0 de $P(0)$ sea conocida y que los problemas (P) y $P(1)$ sean idénticos. Asumiendo que se dispone de alguna de las curvas que conectan ambas soluciones, discutidas con anterioridad, se puede hallar una solución de (P) $(\equiv P(1))$ partiendo de un punto x^0 solución de $P(0)$.

Tales métodos de inmersión serán objeto del Capítulo 8. Como problema uniparamétrico auxiliar podemos escoger, por ejemplo, la así llamada inmersión standard

$$P_s(t) \quad \min \left\{ tf(x) + (1-t)\|x - x^0\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} h_i^{x^0}(x,t) = 0, i \in I \\ g_j^{x^0}(x,t) \geq 0, j \in J \end{array} \right\}$$

donde $x^0 \in I\!R^n$ y

$$\begin{array}{rcl} h_i^{x^0}(x,t) & = & h_i(x) + (1-t)h_i(x^0), \; i \in I \\ g_j^{x^0}(x,t) & = & g_j(x) + (1-t)|g_j(x^0)|, \; j \in J \end{array}$$

Obviamente, el punto x^0 es una solución de $P_s(0)$ (incluso es un punto mínimo global) y los problemas $P_s(1)$ y (P) son idénticos. Dado que el punto $x^0 \in I\!R^n$ es arbitrario, el principio de inmersión puede considerarse, en este sentido, como un método para la globalización de procedimientos localmente convergentes. (Ver Sección 7.3).

En el teorema siguiente serán dadas condiciones suficientes para la existencia de una curva solución $\mathcal{C}$ de el problema uniparamétrico general $P(t)$.

Teorema 7.2 *([47], Theorem 4.1)*
Supóngase que para el problema de optimización $P(t)$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) *Se conoce un punto $(x^0, 0) \in \Sigma_{stat}$.*

(ii) *Para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $M(t) \neq \emptyset$ y $M(t) \subset C$, donde $C \subset I\!R^n$ es un conjunto compacto.*

(iii) *$P(t)$ es KH-regular respecto al intervalo $[0,1]$.*

(iv) *Existe una vecindad $W \subset I\!R$ de $t = 0$, tal que, para cada $t \in W$, existe un único punto estacionario de $P(t)$.*

(v) *Para todo $t \in [0,1]$ vale: Para cada $x \in M(t)$ se satisface la condición MFCQ respecto de $M(t)$.*

Entonces existe un PC^1-camino $\mathcal{C} \subset \Sigma_{stat}|_{[0,1]}$, el cual vincula el punto estacionario conocido x^0 de $P(0)$ con un punto estacionario x^1 del problema de partida $P(1)$.

Uno se puede convencer fácilmente de que la existencia de la curva $\mathcal{C}$ no queda garantizada cuando alguna de las condiciones (ii)-(v) del Teorema 7.2 no se satisface o no se le sustituye adecuadamente.

Una manera sencilla de asegurar la condición (iv) consiste en construir $P(t)$ de modo que $M(0)$ sea un conjunto convexo y que la función objetivo $f(\cdot, 0)$ de $P(0)$ sea estrictamente convexa. Ejemplos de inmersiones tomadas de esta forma se encuentran en el Capítulo 8 (ver la inmersión de penalización como muestra de ello). Nótese ademas que el anterior ejemplo de inmersión $P_s(t)$ (inmersión standard) no esta construida satizfaciendo esta dicha convexidad de el problema $P(0)$.

Es importante señalar sin embargo que la aparentemente util y sencilla idea de tomar $P(0)$ convexo se convierte en una resticción mucho mas fuerte cuando se combina con las suposiciones (ii) y (v). Para explicar lo anterior nos apresamos a señalar la siguiente

Observación 7.3
De el importante Teorema de Estabilidad ([71], Theorem B), mencionado brevemente al final del Capítulo 4, se concluye que si el conjunto factible paramétrico $M(t)$ satizface las condiciones (ii) y (v) del Teorema 7.2 entonces $M(t^1)$ y $M(t^2)$ son homeomorfos para todo $t^1, t^2 \in [0,1]$.

En particular, se sigue de la anterior observación , que el conjunto factible $M(= M(1))$, del problema de partida (P) es homeomorfo con el conjunto convexo $M(0)$ si suponemos las condiciones (ii) y (v) y utilizamos la idea de garantizar la condición (iv) tomado $P(0)$ convexo.

Esta equivalencia topológica <u>no se satisface</u>, en general, para problemas no convexos. Su caracter limitado puede notarse por el hecho de que M debe consistir de una única componente conexa. Podemos concluir pues, que las condiciones (ii) y (iv) corresponden a una clase de problemas muy limitada cuando $P(0)$ se toma convexo.

De hecho la Observación 7.3 nos complica la construcción de inmersiones que satizfagan las hipótesis del Teorema 7.2. Desde este punto de vista resulta trabajoso verificar la existencia de una curva solución $\mathcal{C}$, con vistas a utilizar métodos de continuación.

Una posibilidad alternativa, que no supone la existencia de una curva solución $\mathcal{C}$, la ofrecen los así llamados "métodos de continuación con saltos". La idea principal consiste en lo siguiente:

Para ciertos puntos $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}$ (resp. $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{stat}$) se puede construir un salto en $(\bar{x}, \bar{t})$, es decir, una dirección factible de descenso en el punto $\bar{x}$ y para el problema $P(\bar{t})$. Un procedimiento de descenso que parta del punto $\bar{x}$ converge, bajo ciertas circunstancias, a un punto $\tilde{x}$ con $(\tilde{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$. Tal $(\tilde{x}, \bar{t})$ podría pertenecer a otra componente conexa de $\Sigma_{gc}|_{[0,1]}$ (resp. $\Sigma_{stat}|_{[0,1]}$), la cual, a su vez, podría ser desconocida. De esta manera, se habría "saltado" a una nueva componente conexa, la cual podría ser seguida para valores crecientes de $t(\geq \bar{t})$.

En la Figura 7.3 se ha ilustrado este procedimiento. Allí, los puntos $(\bar{x}^1, \bar{t}^1) \in \Sigma^3_{gc}$ y $(\bar{x}^2, \bar{t}^2) \in \Sigma^2_{gc}$ son puntos de retorno en Σ_{stat}. En tales puntos un procedimiento de continuación sobre Σ_{stat} no trabaja exitosamente para valores crecientes de t. Sin embargo, mediante un salto en $(\bar{x}^1, \bar{t}^1)$ (resp. $(\bar{x}^2, \bar{t}^2)$), es decir, mediante el cómputo en cada caso de una dirección factible de descenso en $\bar{x}^1$ (resp. $\bar{x}^2$ para los problemas $P(t^1)$ (resp. $P(t^2)$) y mediante la aplicación de los procedimientos de descenso correspondientes, habrán de ser computados los puntos $(\bar{\bar{x}}, \bar{t}^1)$ (resp. $(\bar{\bar{x}}, \bar{t}^2)$, los cuales, en cada caso, pertenecen a otras tantas componentes conexas de $\Sigma_{stat}|_{[0,1]}$. A su vez, en tales puntos puede aplicarse un método de continuación, para valores crecientes de $t \geq \bar{t}^1$ hasta $\bar{t}^2$ (resp. $t \geq \bar{t}^2$ hasta $t = 1$). De este modo alcanzamos una solución x^1 del problema $P(1)$ partiendo del punto $(x^0, 0)$.

Con este propósito, en la Sección 7.2 calcularemos una dirección de descenso factible para el problema $P(\bar{t})$ en el punto $\bar{x}$, suponiendo que tal dirección exista. Todo nuestro análisis tendrá como sustento la suposición de que el problema $P(t)$ es JJT-regular relativo al intervalo $[0, 1]$.

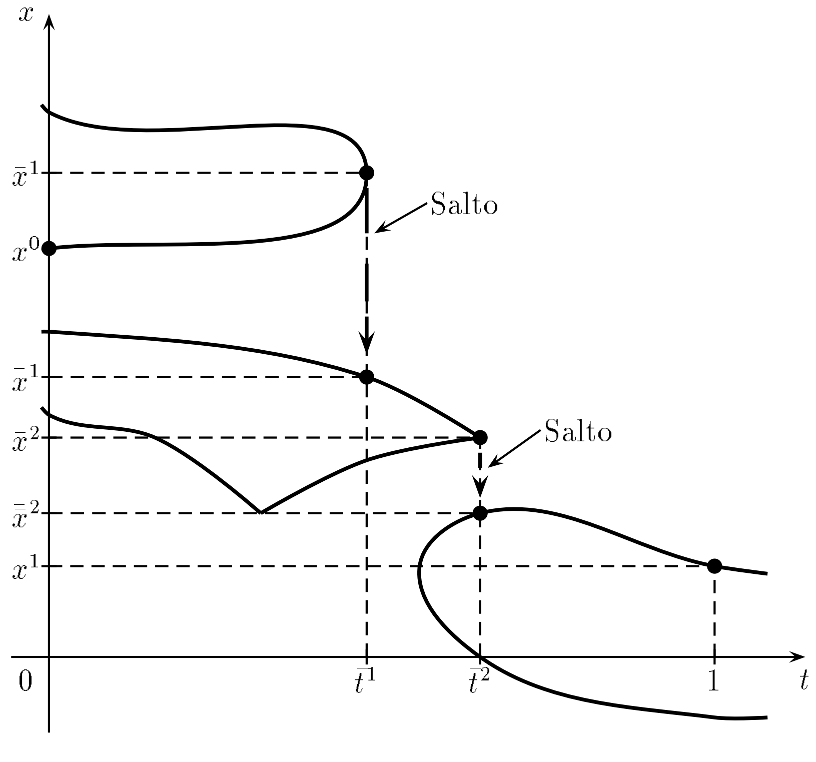


Figura 7.3: Continuación con saltos

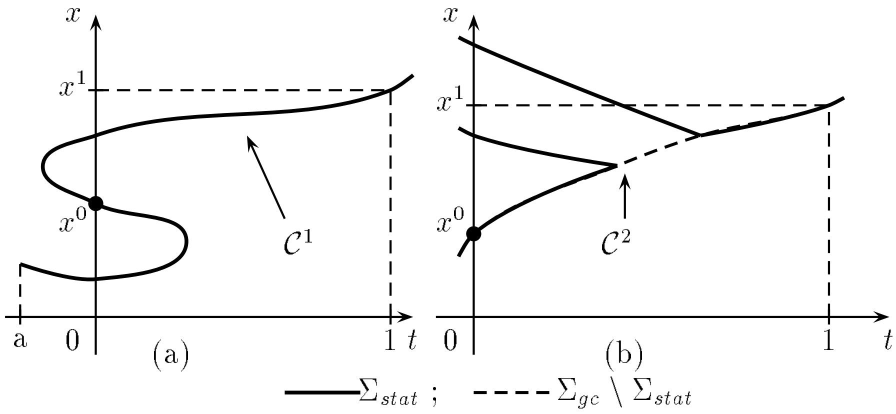


Figura 7.4:

Cuando no existe una curva $\mathcal{C} \subset \Sigma_{stat}|_{[0,1]}$ que conecte los valores $t = 0$ y $t = 1$ es en todo caso posible que

- para $a < 0$ exista una curva $\mathcal{C}^1 \subset \Sigma_{stat}|_{[a,1]}$ (Ver Figura 7.4(a)) o
- exista una curva $\mathcal{C}^2 \subset \Sigma_{stat}|_{[0,1]}$ (Ver Figura 7.4(b))

que en cada caso conecte un punto $(x^0, 0) \in \Sigma_{gc}$ con un punto $(x^1, 1) \in \Sigma_{gc}$.

De hecho, existen problemas uniparamétricos para los cuales fracasa el método de inmersión original. No obstante, tales problemas pueden ser resueltos mediante alguna de las dos posibilidades antes mencionadas, o mediante el método de continuación con saltos. En todo caso, tampoco con tales estrategias es posible alcanzar, en general, el valor deseado del parámetro $t = 1$. *En el peor caso deberían ser seguidas todas las componentes conexas de* $\Sigma_{gc}|_{[0,1]}$.

Para finalizar esta sección, hacemos notar que junto al método de inmersión para la solución del problema (P) coexisten una amplia gama de otras aplicaciones de los métodos de continuación (con saltos), a saber: para la solución de problemas que, de un modo natural, dependen de un parámetro t (v.g. tiempo, temperatura, etc.), o para el problema de la búsqueda de puntos factibles de (P), el cual está íntimamente relacionado con el problema de la optimización global. Para un estudio más detallado referimos al lector a [61] y a la literatura allí mencionada.

Como ya hemos anunciado, en la siguiente sección elaboraremos el concepto de salto para los puntos de Tipo ν, $\nu \in \{1,2,3,4,5\}$, en caso de que tal salto exista. Procediendo constructivamente, ofreceremos en la Sección 7.3 una visión de conjunto sobre algunos métodos de continuación.

7.2 Saltos

A lo largo de esta sección supondremos que el problema $P(t)$ es JJT-regular relativo al intervalo $[0,1]$. Supondremos también que $M(t) \subset C$ para cada $t \in [0,1]$, donde $C \subset I\!R^n$ es un conjunto compacto. Esto último asegura que una sucesión de puntos factibles de $M(\bar{t})$, $\bar{t} \in [0,1]$ generada por algún procedimiento de descenso sea acotada.

En esta sección escogeremos, sucesivamente, puntos $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{gc}^{\nu}$, para $\nu = 2,3,4,5$. Cuando $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto de retorno en Σ_{stat} (resp. Σ_{gc}), investigaremos si existe un salto $w \in I\!R^n$ en dicho punto $(\bar{x},\bar{t})$ y, en caso de existir, la posibilidad de calcularlo.

Definición 7.4
Diremos que un punto $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto de retorno en Σ_{stat} (resp. Σ_{gc}) cuando existe una vecindad $U \subset I\!R^n \times I\!R$ de $(\bar{x},\bar{t})$ y, además, $t \leq \bar{t}$ para todo $(x,t) \in \Sigma_{stat} \cap U$ (resp. $\Sigma_{gc} \cap U$).

Hacemos notar que todas las posteriores consideraciones se pueden trasladar al caso en que $t \geq \bar{t}$, para todo $(x,t) \in \Sigma_{stat} \cap U$ (resp. $\Sigma_{gc} \cap U$). Dado que el parámetro t crece monótonamente, basta pues considerar solamente el caso $t \leq \bar{t}$. Para otros desarrollos en la misma dirección, referimos al lector a los trabajos [61, 74, 87].

Decimos que w es una dirección descendiente de 1er. orden en el punto $\bar{x}$ cuando vale:

$$\begin{array}{rcl} D_x f(\bar{x},\bar{t})w & < & 0 \\ D_x h_i(\bar{x},\bar{t})w & = & 0, \ i \in I \\ D_x g_j(\bar{x},\bar{t})w & \geq & 0, \ j \in J_0(\bar{x},\bar{t}) \end{array} \tag{7.1}$$

Mostraremos cómo es un salto en el punto $(\bar{x}, \bar{t})$ cuando tenemos la forma canónica de un punto de tipo ν, dada en el Capítulo 6. En tales casos sea la transformación de coordenadas ψ definida como en el Capítulo 6 y $(f, H, G) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^{1+m+s}$.

En algunas aplicaciones se siguen solamente trozos de curvas de cl Σ_{loc}. Por ejemplo, la inmersión standard $P_s(t)$ dada en la Sección 7.1 parte de un punto mínimo local x^0 de $P(0)$ y, por lo tanto, dicho punto pertenece a un segmento de curva de cl Σ_{loc}. Nos referiremos solo a las situaciones definidas por $(\bar{x}, \bar{t}) \in$ cl $\Sigma_{loc} \cap \Sigma_{gc}^\nu$, $\nu \in \{2, 3, 4, 5\}$, pues en el caso $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$ *no existe*, para el problema $P(\bar{t})$, ninguna dirección de descenso factible en el punto $\bar{x}$. Para la exposición de este problema utilizaremos las notaciones empleadas con anterioridad en el Capítulo 6. En particular, sea $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$.

Comenzaremos con el supuesto de que $\underline{(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^1 \setminus \Sigma_{loc}}$. Conforme a 6.2 obtenemos la forma normal

$$-\sum_{i_1} y_{i_1} + \sum_{i_2} y_{i_2} - \sum_{i_3} y_{i_3}^2 + \sum_{i_4} y_{i_4}^2 + \delta(v),\ y_{i_1} \geq 0, y_{i_2} \geq 0$$

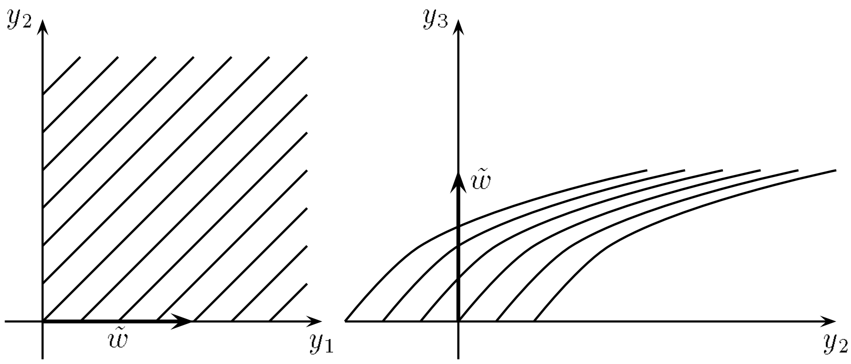
donde $i_1 + i_2 = p$, $i_3 + i_4 = n - m - p$ y los índices recorren, al igual que en 4.24 y 6.2: i_1 las LI-coordenadas, así como i_2, i_3, i_4 las correspondientes LCI, QI, QCI- coordenadas. Como $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{loc}$ se sigue, en particular, que $LI + LCI > 0$.

Ahora diferenciamos dos casos.

Cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc} \setminus \Sigma_{stat}$, se tiene que $LI > 0$ y, por lo tanto, $i_1 > 1$. Del Lema de Farkas (Ver Capítulo 5, Teorema 5.4) se sigue la existencia de una solución w de 7.1, la cual puede escogerse, en coordenadas normales, precisamente de la forma $\tilde{w} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-m}$. En la Figura 7.5(a) se ha tomado $i_1 = i_2 = 1$, $i_3 = i_4 = 0$ y se ha representado algunas curvas de nivel de la función objetivo, así como la dirección descendiente.

Cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{stat}$ se tiene que $LI = 0$ y $QI > 0$. Según el Lema de Farkas no existe solución para 7.1, pero se tiene que

$$\min \left\{ \frac{w^\top \left[D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t}) - \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i D_x^2 h_i(\bar{x}, \bar{t}) - \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j D_x^2 g_j(\bar{x}, \bar{t}) \right] w}{w \in \mathbb{R}^n,\ \|w\| = 1,\ w \in T_{\bar{x}} M(\bar{t})} \right\} < 0$$



(a) $-y_1 + y_2$; $\tilde{w} = (1,0)^\mathsf{T}$ (b) $y_2 - y_3^2$; $\tilde{w} = (0,1)$

Figura 7.5:

de donde se sigue la existencia de una dirección factible de descenso de 2do. orden en el punto $\bar{x}$. En las coordenadas de la forma canónica podemos por lo tanto escoger $\tilde{w} = (0_{LCI}, 1, 0) \in \mathbb{R}^{n-m}$ (Ver Figura 7.5(b) para $i_2 = i_3 = 1$, $i_1 = i_4 = 0$).

Por lo tanto, para un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc} \setminus \Sigma_{loc}$ siempre existe un salto. Es decir, una dirección descendiente en el punto $\bar{x}$ para el problema $P(\bar{t})$, gracias a la cual se puede iniciar un procedimiento de descenso convergente (compacticidad de $M(\bar{t})$) hacia un punto $(\hat{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$ (Ver Figura 7.6).

Es obvio que un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc} \setminus \Sigma_{loc}$ no puede ser punto de retorno en Σ_{stat} (resp. Σ_{gc}), pues existe, en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$, una continuación en Σ_{stat} (resp. Σ_{gc}) para valores creciente de t ($\geq \bar{t}$). No obstante, cuando estudiemos el caso $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^4_{gc}$, y en la Sección 7.3, tendremos necesidad de un salto de tal tipo.

Sea ahora $\underline{(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^2_{gc}}$ y $(\bar{x}, \bar{t})$ un punto de retorno en Σ_{stat}. Conforme a la Sección 6.1 , $(\bar{x}, \bar{t})$ no es un punto de retorno en Σ_{gc} (Ver Figura 6.3). Observamos en la Figura 7.7 los valores de la tupla de índices (LC,LCI,QI,QCI) correspondientes a las tres ramas de Σ_{gc}, visto localmente. En dicha figura $\alpha + 1 = p$, $\beta + \gamma = n - m - p$, y el conjunto Σ_{stat} (resp.$\Sigma_{gc} \setminus \Sigma_{stat}$) se ha representado con una linea contínua (resp.

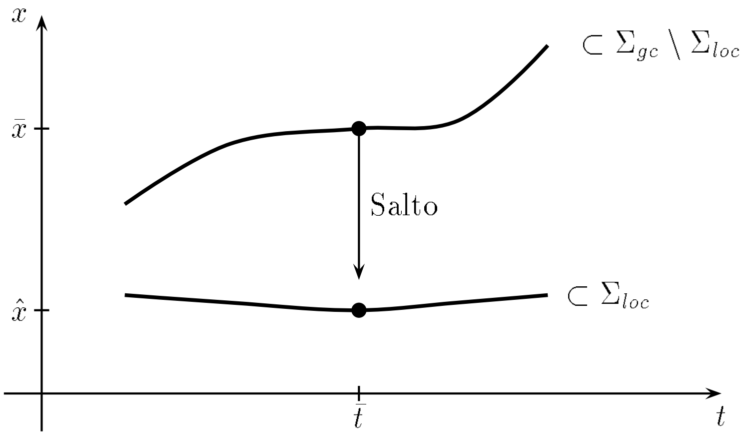


Figura 7.6: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^1 \setminus \Sigma_{loc}$, $(\hat{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$

segmentada).

Cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathrm{cl}\ \Sigma_{loc}$, se tiene claramente que $\gamma = 0$. Dado que el cálculo de una dirección factible de descenso en el punto $\bar{x}$ se desprende de las propiedades <u>locales</u> del punto $(\bar{x}, \bar{t})$, supondremos, s.p.d.g.(como en la Sección 6.1 según la fórmula 6.5) que $I = \emptyset$ y que $p = 1$. Por lo tanto, sean las funciones x^0, x^1, μ^0 y μ^1 definidas como en la mencionada Sección 6.1.

De $(2a)$, $(2c)$ y las relaciones entre los índices allí definidas se obtiene que el número de valores propios negativos de $D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t})$ y el de $D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}} M(\bar{t})}$ no coinciden, donde $T_{\bar{x}} M(\bar{t}) = \{z \in I\!R^n \mid D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) z = 0\}$. Del Lema 6.6 se sigue que

$$D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t})^{-1} D_x g_1(\bar{x}, \bar{t})^\top < 0 \tag{7.2}$$

y de las definiciones de las funciones que intervienen se tiene que

$$\left.\begin{array}{llrcl}
D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t}) D x^0(\bar{t})^\top & & +D_{tx} f(\bar{x}, \bar{t})^\top & = & 0 \\
D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) D x^0(\bar{t})^\top & +D\mu^0(\bar{t}) & +D_t g_1(\bar{x}, \bar{t}) & = & 0 \\
D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t}) D x^1(\bar{t})^\top & -D\mu^1(\bar{t}) D_x g_1(\bar{x}, \bar{t})^\top & +D_{tx} f(\bar{x}, \bar{t})^\top & = & 0 \\
D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) D x^1(\bar{t})^\top & & +D_t g_1(\bar{x}, \bar{t}) & = & 0
\end{array}\right\} \tag{7.3}$$

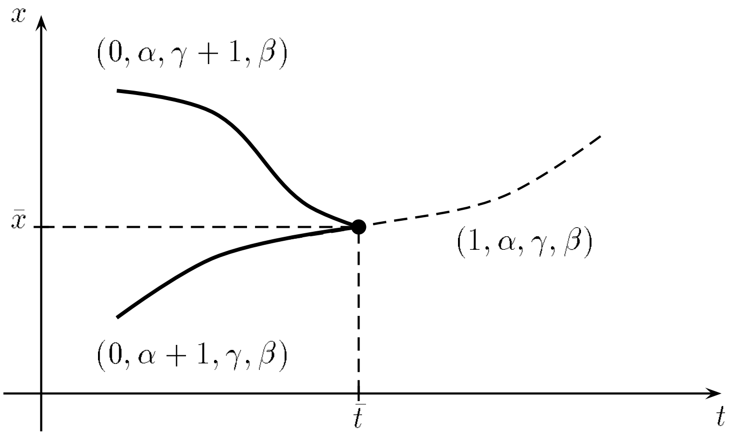


Figura 7.7: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$ es un punto de retorno en Σ_{stat}

Ahora definimos $\dot{x} = Dx^1(\bar{t}) - Dx^0(\bar{t})$, lo cual conduce, bajo el hecho de que $x^0(\bar{t}) = x^1(\bar{t})$ a:

$$\lim_{t \to \bar{t}, t < \bar{t}} \frac{x^0(t) - x^1(t)}{\|x^0(t) - x^1(t)\|} = \frac{\dot{x}^\top}{\|\dot{x}\|}$$

De 7.3 y $D\mu^1(\bar{t}) < 0$ (Ver Figura 6.4(a)) se sigue que

$$D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t})[Dx^1(\bar{t})^\top - Dx^0(\bar{t})^\top] - D\mu^1(\bar{t}) D_x g_1(\bar{x}, \bar{t})^\top = 0$$

y, por tanto

$$\frac{1}{D\mu^1(\bar{t})} D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t}) \dot{x}^\top = D_x g_1(\bar{x}, \bar{t})^\top \tag{7.4}$$

Sustituyendo 7.4 en 7.2 se obtiene

$$\dot{x} D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t}) \dot{x}^\top < 0$$

y, luego de multiplicar 7.4 a la izquierda por $\dot{x}$:

$$\dot{x} D_x g_1(\bar{x}, \bar{t})^\top > 0$$

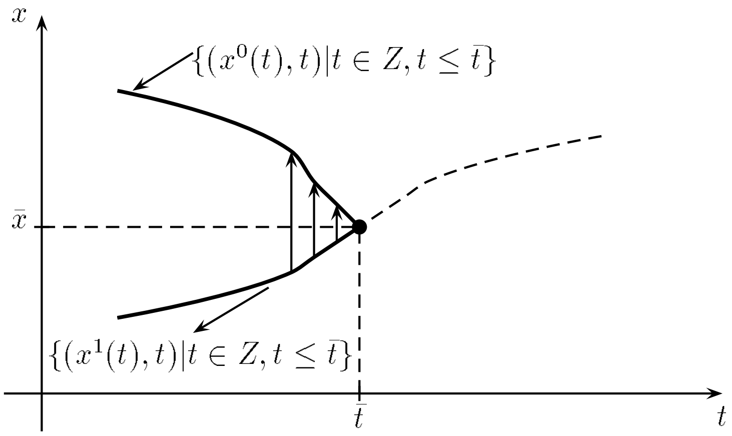


Figura 7.8: $\lim_{t\to\bar{t},t<\bar{t}} \frac{x^0(t)-x^1(t)}{\|x^0(t)-x^1(t)\|}$ es un salto en $(\bar{x},\bar{t})$

Las anteriores dos fórmulas implican que existe

$$\lim_{t\to\bar{t},t<\bar{t}} \frac{x^0(t)-x^1(t)}{\|x^0(t)-x^1(t)\|} \tag{7.5}$$

y que dicho límite representa una dirección factible de descenso de 2do. orden en $\bar{x}$ para el problema $P(\bar{t})$ (Ver Figura 7.8).

En $(\bar{x},\bar{t})$ existe por lo tanto un salto, de donde se sigue, en particular, que $\bar{x}$ no es un mínimo de $P(\bar{t})$.

Ejemplo 7.5
Sea $n=1$ y

$$P(t) \quad \min \{-x^2 \mid x - t + \frac{1}{2} \geq 0,\ \frac{1}{2} - x \geq 0\}$$

Se tiene que

$$\Sigma_{stat} = \{(o,t) \mid t \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(t-\frac{1}{2},t) \mid t \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(\frac{1}{2},t) \mid t \leq 1\}$$

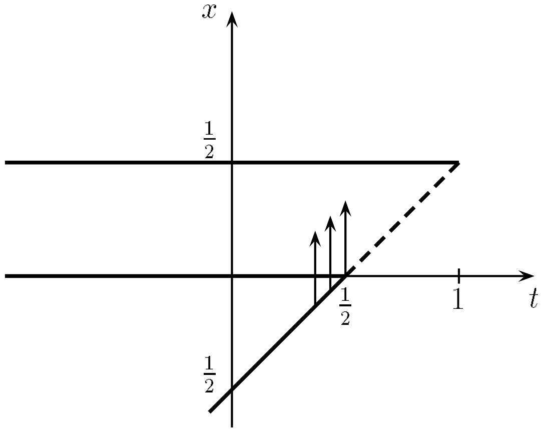


Figura 7.9: 1 es un salto en $(\frac{1}{2}, 0) \in \Sigma^2_{gc}$

y que $(0, \frac{1}{2}) \in \Sigma^2_{gc}$ *es un punto de retorno en* Σ_{stat}*. Utilizando las notaciones dadas anteriormente, se tiene que* $x^0(t) = 0$*,* $x^1(t) = t - \frac{1}{2}$ *(para* $t \leq \frac{1}{2}$*) y*

$$\lim_{t \to \bar{t}, t < \bar{t}} \frac{x^0(t) - x^1(t)}{\|x^0(t) - x^1(t)\|} = 1$$

Un procedimiento de descenso que comience en $x = 0$*, con la dirección* $w = 1$*, converge al punto de mínimo local* $x = \frac{1}{2}$ *del problema* $P(\frac{1}{2})$*. Tal punto pertenece a la componente conexa de* $\Sigma_{stat}(\cap \Sigma_{loc})$ *dada por* $\{(\frac{1}{2}, t) \mid t \leq 1\}$*, la cual, a su vez, puede ser continuada desde* $t \geq \frac{1}{2}$ *hasta* $t = 1$*.*

Observación 7.6

Para la aproximación numérica de la dirección de descenso 7.5 puede considerarse las siguientes posibilidades. Por un lado puede aproximarse los puntos $x^0(t)$ *y* $x^1(t)$ *mediante un método de continuación sobre* Σ_{stat}*, y luego utilizar* $\frac{x^0(t) - x^1(t)}{\|x^0(t) - x^1(t)\|}$*, para* t *cercano a* $\bar{t}$*, como aproximación de 7.5. Por otro lado, se puede calcular* $\dot{x}$ *directamente de*

7.4, lo cual, no obstante, puede ser numéricamente difícil debido a la presencia de la matriz inversa $(D_x^2 f(\bar{x}, \bar{t}))^{-1}$.

Cuando $\bar{x} \in \text{cl}\ \Sigma_{loc}$ se sigue, de la Figura 7.7 lo siguiente (nótese que ahora suponemos $|I| \geq 0$, $|J_0(\bar{x}, \bar{t})| \geq 1$ y g_p determinado como en la Sección 6.1):

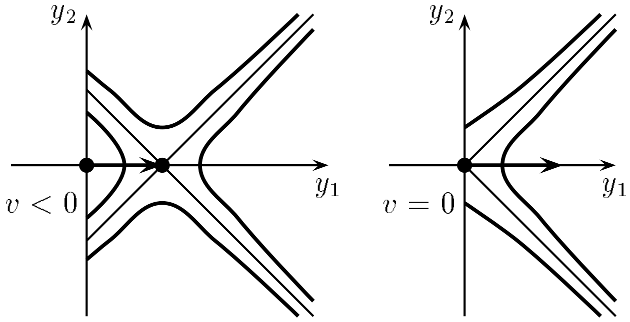
- $\gamma = 0$
- La rama de Σ_{stat}, cuya tupla de índices es $(0, \alpha+1, 0, \beta)$ consiste de puntos mínimos locales. En la caracterización de dicha rama aparece g_p como una restricción de igualdad.
- La rama de Σ_{stat}, cuya tupla de índices es $(0, \alpha, 1, \beta)$ (en esta caracterización g_p no aparece como restricción) consiste de puntos de ensilladura o, cuando $n - m = 1$ de puntos máximos locales (como en el Ejemplo 7.5).

Un método de continuación con saltos que solo realice continuaciones sobre curvas de cl Σ_{loc} se aproximaría a la rama del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ caracterizada por $(0, \alpha+1, 0, \beta)$ y, desde allí, con un procedimiento de descenso, saltaría hacia otra curva de cl Σ_{loc}.

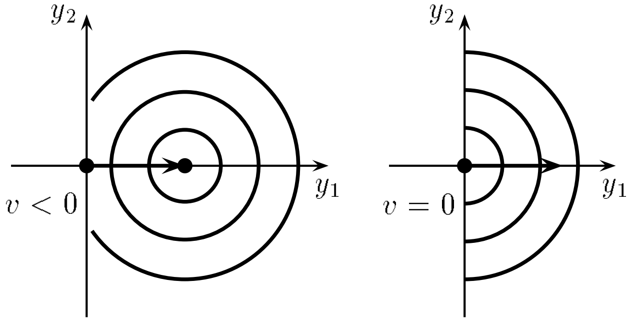
La forma canónica dada en 6.7 para un punto de Tipo 2 se simplifica para nuestro caso especial, en el cual $(\bar{x}, \bar{t})$ es un punto de retorno de Σ_{stat}, a la forma siguiente (cfr. [100]):

$$-(y_1 + v)^2 + \sum_{i=2}^{p} y_i \pm \sum_{j=p+1}^{n-m} y_j^2 + \delta(v),\ y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p$$

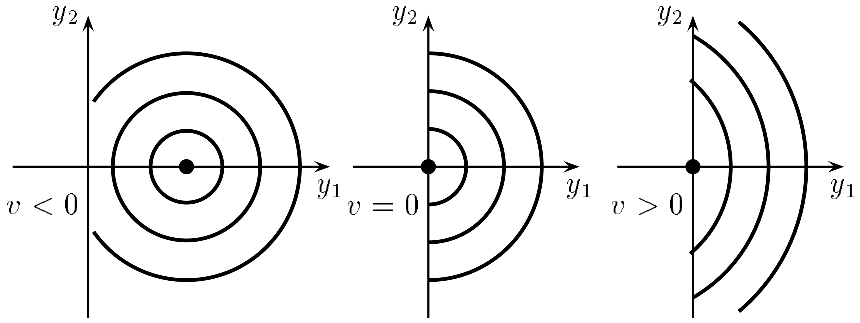
La segunda derivada parcial en y_1 de la función objetivo es -2 y representa precisamente el aumento en QI - de γ a $\gamma + 1$- de la rama en la cual $y_1 = 0$ no aparece como restricción. En la Figura 7.10 se ha representado los puntos estacionarios, así como los saltos correspondientes en los puntos antes considerados ((a) y (b)), para $n = 2$ y $m = 0$. Para completar el análisis, se ha representado también en dicha figura (7.10(c)) el caso en que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$ no es punto de retorno en Σ_{stat} y para el cual vale que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$, o sea una situación, presentada en la



(a): $-(y_1+v)^2+y_2^2$ $(\gamma = 0)$: $\tilde{w} = (1,0)$



(b): $-(y_1+v)^2-y_2^2$ $(\gamma = 1)$: $\tilde{w} = (1,0)$



(c): $(y_1+v)^2+y_2^2$

Figura 7.10:

Figura 6.4(b), favorable para métodos de continuación (sin saltos), en la cual se tiene continuación local en Σ_{loc} para $t \geq \bar{t}$.

Sea ahora $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^3_{gc}$. De la caracterización dada en la Sección 6.1 se sigue que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ es un mínimo local o un máximo local del problema $(\mathcal{P})$ ahí introducido. En el último caso mencionado, $(\bar{x}, \bar{t})$ es un punto de retorno en Σ_{gc} (lo mismo puede decirse para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{stat}$). De las consideraciones hechas en la secciones 4.4 (Del caso sin restricciones $I = J = \emptyset$) y 6.1, así como especialmente de 6.9 se desprende la existencia de una dirección factible de descenso de 3er. orden para $P(\bar{t})$. En efecto, tal dirección está dada unívocamente, salvo el signo, por el vector $w \in I\!R^n$ (resp. $-w$) que satisface

$$wD^3_x f(\bar{x}, \bar{t})ww \neq 0, \quad \|w\| = 1$$

Dado que el vector $(w^{\mathsf{T}},\ 0)$ da, conforme a 6.8, la dirección tangencial de Σ_{gc} en el punto $(\bar{x}, \bar{t})$, tal vector puede describirse como el valor límite para $(t \to \bar{t})$ de la diferencia normada de las x-componentes entre dos puntos de Σ_{gc} que posean la misma t-componente y se encuentren suficientemente cerca de $(\bar{x}, \bar{t})$. En este sentido el análisis es análogo al ya realizado para un punto de Tipo 2. (Ver Figura 7.11, en la cual se ha tomado los valores $\alpha + \alpha^1 = p$ y $\gamma + \beta + 1 = n - m - p$)

De todo esto se sigue, en particular, que $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{loc}$. En efecto, de la Sección 4.4, sabemos que si $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathrm{cl}\ \Sigma_{loc}$ entonces precisamente una rama de Σ_{gc} pertenece, localmente, a Σ_{loc}. En la Figura 7.11 se asume que dicha rama posee la tupla de índices $(\alpha, \alpha^1, \gamma, \beta+1)$, con los valores $\gamma = \alpha = 0$ (Con ello le corresponden a la otra rama los valores $\alpha^1 = p$, $\beta + 1 = n - m - p$). Un procedimiento que solo trabajase sobre cl Σ_{loc} se aproximaría a $(\bar{x}, \bar{t})$ sobre tal rama, para valores crecientes de t, y saltaría desde $(\bar{x}, \bar{t})$ hacia otra curva de cl Σ_{loc}. La rama correspondiente a $(0, \alpha^1, 1, \beta)$ consiste entonces de puntos de ensilladura (resp. de máximos locales para $n - m = 1$).

Para la forma canónica dada en 6.10:

$$\sum_{i=1}^{p} \pm y_i + y^3_{p+1} + v y_{p+1} \pm \sum_{j=p+2}^{n-m} y_j^2 + \delta(v),\ y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p$$

se obtiene precisamente $\tilde{w} = (0_p, -1, 0_{n-m-p-1}) \in I\!R^{n-m}$ como dirección de descenso. En la Figura 7.12 se ha visualizado a $\tilde{w}$ para el caso $p = 0$, $n - m = 2$ y $\gamma = 0$

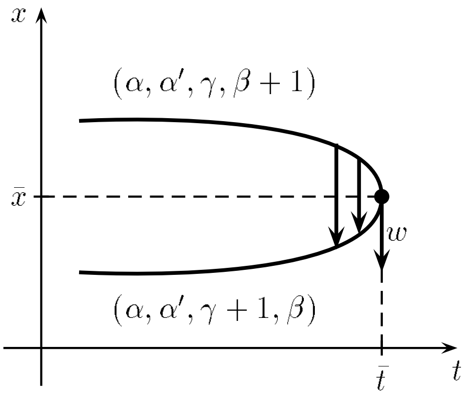


Figura 7.11: : w o $-w$ es un salto en $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^3_{gc}$

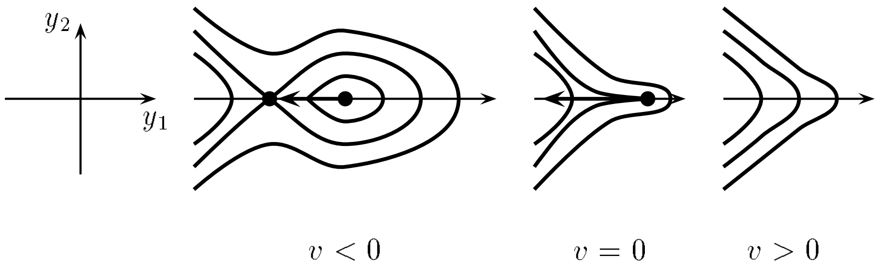


Figura 7.12: : $y_1^3 + vy_1 + y_2^2$: $\tilde{w} = (-1, 0)$

Sea ahora $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma^4_{gc}$. Conforme a la caracterización dada en la Sección 6.1 existe un vector $\bar{q} \in I\!R^{m+p}\backslash\{0_{m+p}\}$ unívocamente determinado, salvo un múltiplo, con

$$\sum_{i\in I} \bar{q}_i D_x h_i(\bar{x},\bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_x g_j(\bar{x},\bar{t}) = 0. \tag{7.6}$$

De $(4c)$ se sigue, además, que el punto $(\bar{x}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$, para un $\bar{q}$ fijo, es un mínimo local o un máximo local del problema ahí definido $(\hat{\mathcal{P}})$. En el caso que nos interesa (máximo local) $(\bar{x},\bar{t})$ es un punto de retorno en Σ_{gc}. Tal situación ha sido representada, con los índices correspondientes, en la Figura 6.5. En particular, vale que $(\bar{x},\bar{t}) \notin \Sigma_{stat}$. Al igual que en la Sección 6.1, nos limitaremos, para comenzar, al caso dado por $I = \emptyset$ y $J_0(\bar{x},\bar{t}) = \{1\}$. Es decir, cuando $p = 1$ y $g = g_1$. De tal Sección adoptamos también $q_0 \in \bar{W} \subset R$, $\bar{W}$ vecindad de $q_0 = 0$ y la C^1-función dada por:

$$(\tilde{x},\tilde{t}) : q_0 \in \bar{W} \mapsto (\tilde{x}(q_0), \tilde{t}(q_0)) \in I\!R^n \times I\!R$$

con $(\tilde{x}(0),\tilde{t}(0)) = (\bar{x},\bar{t})$ y $\mathcal{G}(\tilde{x}(q_0),\tilde{t}(q_0),q_0) = 0$, donde

$$\mathcal{G}(x,t,q_0) = \begin{pmatrix} q_0 D_x f(x,t) - \bar{q} D_x g(x,t) \\ g(x,t) \end{pmatrix}$$

Designando por $(\dot{x}, 0, -1)$ al vector tangente a $\mathcal{G}^{-1}(0)$ en el punto $(\bar{x},\bar{t},0)$ y con $(\dot{x},0)$ al vector tangente a Σ_{gc} en $(\bar{x},\bar{t})$, se sigue que

$$D_x f(\bar{x},\bar{t})\dot{x} = D_x f(\bar{x},\bar{t}) \left(-\bar{q} D_x^2 g(\bar{x},\bar{t})\right)^{-1} D_x f(\bar{x},\bar{t})^{\mathsf{T}} \tag{7.7}$$

De la Observación 6.19 se tiene que $D_x f(\bar{x},\bar{t})\dot{x} \neq 0$. Podemos extraer dos consecuencias más:

- q_0 cambia su signo al atravesar el valor cero y, como consecuencia de que

$$D_x f(x,t) - \frac{\bar{q}}{q_0} D_x g(x,t) = 0, \quad \text{para } q_0 \neq 0. \tag{7.8}$$

  tambien el multipicador $\frac{\bar{q}}{q_0}$ cambia su signo junto con q_0.

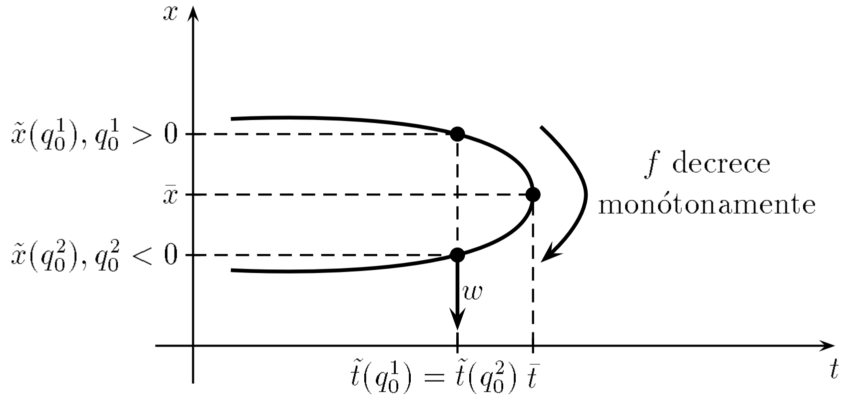


Figura 7.13: Existe un salto w en $(\tilde{x}(q_0^2), \tilde{t}(q_0^2)) \in \Sigma_{gc} \setminus \Sigma_{loc}$

- La función f restringida a Σ_{gc} es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$.

Asúmase ahora, s.p.d.g., que $D_x f(\bar{x}, \bar{t})\dot{x} < 0$ (dado que signo $\bar{q}$ es arbitrario y fijo). En tal caso, f decrece estrictamente a lo largo de Σ_{gc} para q_0 decreciente (Ver Figura 7.13).

Cuando $\{(\tilde{x}(q_0), q_0) \mid q_0 < 0, q_0 \in \bar{W}\} \in \Sigma_{gc} \setminus \Sigma_{loc}$ ($LI + QI > 0$ en la rama inferior de la Figura 7.13), entonces existe en el punto $(\tilde{x}(q_0^2), \tilde{t}(q_0^2))$, $q_0^2 < 0$ (el cual es de Tipo 1) un salto w (Ver Figura 7.13) y un procedimiento de descenso correspondiente converge a un mínimo local de $P(\tilde{t}(q_0^2))$. Tal procedimiento, sin embargo, no converge a $\tilde{x}(q_0^1)$, con $q_0^1 > 0$ y $\tilde{t}(q_0^1) = \tilde{t}(q_0^2)$, dado que $f(\tilde{x}(q_0^1), \tilde{t}(q_0^1)) > f(\tilde{x}(q_0^2), \tilde{t}(q_0^2))$. Finalmente, hemos mostrado que *existe un salto para todo punto* $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \setminus cl\ \Sigma_{loc}$.

En lo que sigue, supongamos que $\underline{(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \cap \text{cl}\ \Sigma_{loc}}$. Haremos la investigación utilizando la forma canónica correspondiente al caso $J_0(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$ (Ver 6.13). Las consideraciones para el caso $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \emptyset$ transcurren de modo análogo (cfr. [87]).

De $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl}\ \Sigma_{loc}$ se desprenden las siguientes propiedades:

- $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl}\ \Sigma_{stat}$. Con ello no se satisface MFCQ en el punto $\bar{x}$

relativo a $P(\bar{t})$.

- signo $\bar{q}_{m+j}$ es constante para todo $j = 1, \ldots, p$, donde $\bar{q}_{m+j}$ queda determinado como en 7.6.

- Sean $\bar{q}_{m+j} > 0$, $j = 1, \ldots, p$, fijos. Entonces, de acuerdo a 7.8, la matriz dada por

$$\left((-\sum_{i \in I} \bar{q}_i D_x^2 h_i(x,t) - \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_x^2 g_j(x,t))|_{T_x M(t)} \right) \tag{7.9}$$

solo posee valores propios positivos para todo $(x,t) \in \Sigma_{gc} \backslash \{(\bar{x},\bar{t})\}$, (x,t) cercano a $(\bar{x},\bar{t})$.

Tomando en cuenta estas propiedades se desprende de 6.13 la forma canónica siguiente para el conjunto factible $\tilde{M}(v)$, en una vecindad de $(0_n, 0)(= \psi(\bar{x},\bar{t}))$:

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\delta} v & \geq & -\sum\limits_{i_1=1}^{k} y_{i_1}^2 + \sum\limits_{i_2=k+1}^{n-m-p+1} y_{i_2}^2 + \sum\limits_{i_3=n-m-p+2}^{n-m} y_{i_3} \\
y_{i_3} & \geq & 0, \quad i_3 = n-m-p+2, \ldots, n-m \\
y_{i_4} & = & 0, \quad i_4 = n-m+1, \ldots, n
\end{array}$$

donde $\tilde{\delta} \in \{1, -1\}$. Dado que las restricciones correspondientes a las desigualdades lineales son activas en un vecinadario $\tilde{U} \subset I\!\!R^n \times I\!\!R$ del punto $(0_n, 0)$, para todo $(y,v) \in \tilde{U}$, con $\Psi^{-1}(y,v) \in \Sigma_{gc}$, podemos limitarnos otra vez, s.p.d.g., al caso $m = 0$ y $p = 1$ si se utiliza argumentos ya mencionados.

Sean, por lo tanto,

$$\tilde{g}(y,v) = \tilde{\delta} v + \sum_{i_1=1}^{k} y_{i_1}^2 - \sum_{i_2=k+1}^{n} y_{i_2}^2 \tag{7.10}$$

y $\bar{q} > 0$, donde $\bar{q}$ está determinada como en 7.8. Las afirmaciones siguientes valen siempre para una vecindad suficientemente reducido $\tilde{U} \subset I\!\!R^n \times I\!\!R$ de $(0_n, 0)$ y para todo $(y,v) \in \tilde{U}$ para los cuales $\Psi^{-1}(y,v) \in \Sigma_{gc} \setminus \{(\bar{x},\bar{t})\}$.

De 7.8 se sigue para la función objetivo $\tilde{f}(y,v)(=f(\psi^{-1}(y,v)))$ que

$$\text{signo } \tilde{\delta} v = -\text{signo} \left[\sum_{i_1=1}^{k} \left(D y_{i_1} \tilde{f}(y,v) \right)^2 - \sum_{i_2=k+1}^{n} \left(D y_{i_2} \tilde{f}(y,v) \right)^2 \right] \tag{7.11}$$

De 7.9 se deduce, además, que en la expresión 7.10 pueden aparecer los siguientes cuatro casos:

1er.Caso: $\tilde{\delta} = -1,\ k = 0.$

2do.Caso: $\tilde{\delta} = 1,\ k = 1.$

3er.Caso: $\tilde{\delta} = 1,\ k = 0.$

4to.Caso: $\tilde{\delta} = -1,\ k = 1.$

Primero consideramos los casos 3ero. y 4to. En el 3er.Caso obtenemos $\sum_{i_2=1}^{n} y_{i_2}^2 = v$ y, con ello, $\tilde{M}(v) = \emptyset$ para $v < 0$ en una vecindad de $(0_n, 0)$, lo cual se encuentra en contradicción con nuestra hipótesis de partida. En efecto, hemos supuesto que para valores crecientes de t, nos aproximamos, sobre una curva de Σ_{gc}, al punto $\Psi^{-1}(0_n, 0) = (\bar{x}, \bar{t})$. Y dado que $D\psi(t) > 0$ se tiene lo mismo para valores crecientes de v.

En el 4to.Caso vale que $\sum_{i_2=2}^{n} y_{i_2}^2 - y_1^2 = -v$. Entonces, para $v < 0$ vale que:

$$\frac{1}{2} D_y \tilde{g}(y,v) \left[-D_y^2 \tilde{g}(y,v) \right]^{-1} D_y \tilde{g}(y,v)^{\mathsf{T}} = -y_1^2 + \sum_{i_2=2}^{n} y_{i_2}^2 = -v \ (>0) \tag{7.12}$$

Dado que $-D_y^2 \tilde{g}(y,v)$ es no singular y que posee precisamente un valor propio negativo, la ecuación 7.12 contradice, según el Lema 6.6, la condición 7.9. De todo esto se deduce que los casos 3ero. y 4to. no son posibles. Consideremos pues los casos 1ero. y 2do.

1er.Caso: Obtenemos $\sum_{i_2=1}^{n} y_{i_2}^2 = -v$, de donde se sigue que $\tilde{M}(0) = \{0_n\}$ y $\tilde{M}(v) = \emptyset$, para $v > 0$ en una vecindad de $v = 0$. En la Figura 7.14(a) se ha ilustrado dicha situación para $n = 2$, incluyendo los puntos críticos generalizados que intervienen en ella. Para $v < 0$ vemos que los valores de la función objetivo correspondientes a mínimos locales son menores que aquellos de los puntos máximos. Esta propiedad se satisface también para $n \geq 2$, pues de 7.7 se sigue que $D_x f(\bar{x}, \bar{t})\dot{x} > 0$ (Ver Figura 7.14(b)). Un tipo de salto antes descrito (Ver Figura 7.13) comenzaría entonces en un máximo local y un procedimiento de descenso aproximaría el mínimo local ya conocido. En este sentido, *no existe en el 1er.Caso un salto* (adecuado).

2do.Caso: Se tiene que $\sum_{i_2=2}^{n} y_{i_2}^2 - y_1^2 = v$. En la Figura 7.15(a) se ha visualizado la situación correspondiente para $n = 2$. En ella se observa el cono, obtenido de 7.11, en el cual está ubicada $D_y \tilde{f}(0_2, 0)$. De nuevo tenemos que existe un mínimo local y un máximo local para $v < 0$, v cercano a 0, pero en este caso se sigue, de 7.7 y 7.9, precisamente que $D_x f(\bar{x}, \bar{t})\dot{x} < 0$. Por lo tanto, el valor de la función en el punto máximo es *menor* que en el punto mínimo (Ver Figura 7.15(b)). Un procedimiento descendiente que parta de un punto máximo genera una sucesión que converge a un mínimo local, el cual debe pertenecer a otra componente conexa. Por lo tanto, *en este 2do.Caso existe un salto.*

El estudio anterior tiene como consecuencia que se puede decidir, para un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \cap \mathrm{cl}\ \Sigma_{loc}$ y mediante el calculo de $\tilde{\delta}$, si se está en presencia de un caso desfavorable ($\tilde{\delta} = -1$) o ante un caso en el cual existe un salto ($\tilde{\delta} = 1$). De todo esto se obtiene, para $D\psi_2(\bar{t}) > 0$ el

Resultado 7.7
Sean $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4 \cap cl\ \Sigma_{loc}$, $J_0((\bar{x}, \bar{t})) = \{1, \ldots, p\}$, $\bar{q} \in I\!R^{m+p}$ fija, definida como en (7.6) con $\bar{q}_{m+j} > 0$, $j = 1, \ldots, p$ y

$$\tilde{\delta} = signo\left(\sum_{i \in I} \bar{q}_i D_t h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_t g_j(\bar{x}, \bar{t})\right)$$

Si $\tilde{\delta} = 1$ (resp. $\tilde{\delta} = -1$) entonces existe (resp. no existe) un salto para $(\bar{x}, \bar{t})$.

Para terminar debe hacerse la observación de que, al aproximarse un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ a lo largo de $\Sigma_{gc} \backslash \{(\bar{x}, \bar{t})\}$, el valor absoluto de los multiplicadores no nulos se vuelve ilimitado. Tal situación se ha representado en la Figura 7.16 para $\frac{\bar{q}}{q_0}$ obtenido de 7.8 (con $\bar{q} > 0$).

Cuando se aplica procedimientos de continuación, el hecho antes mencionado permite decidir, al menos teoricamente, si se está en presencia de un punto de Tupo 4, dado que al aproximarnos a puntos de Tipo

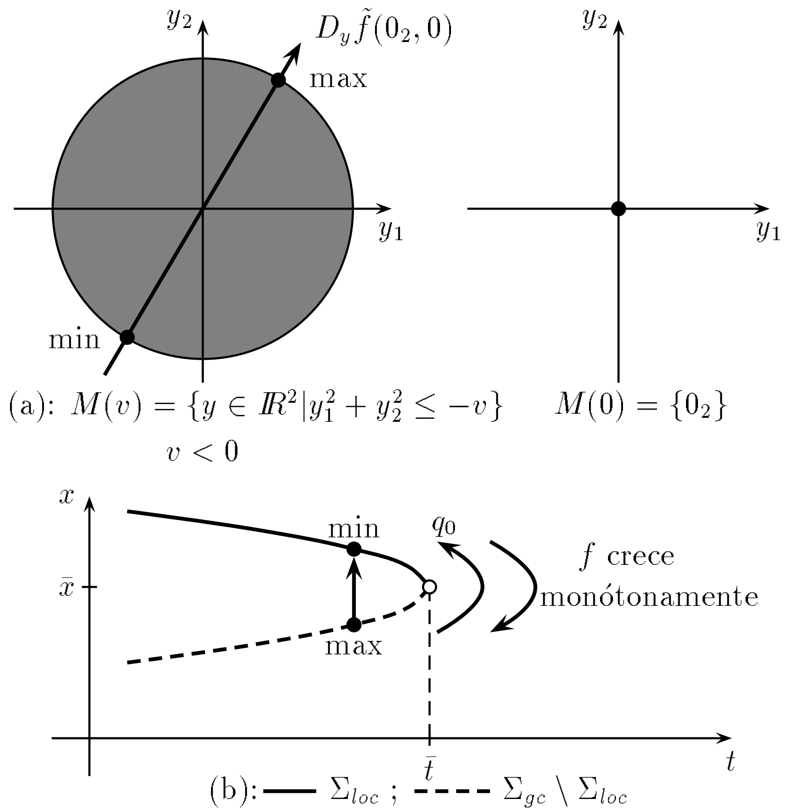
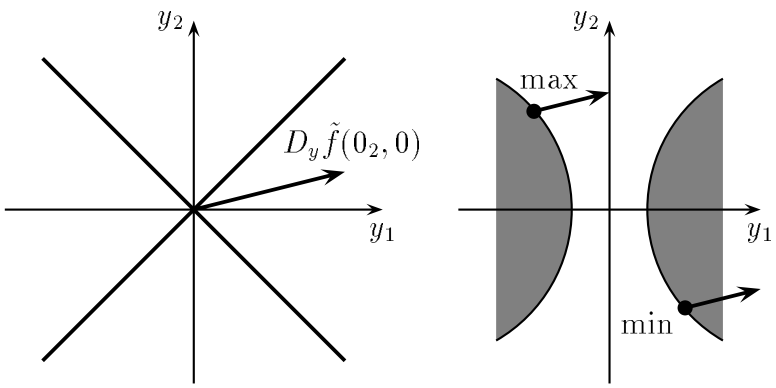
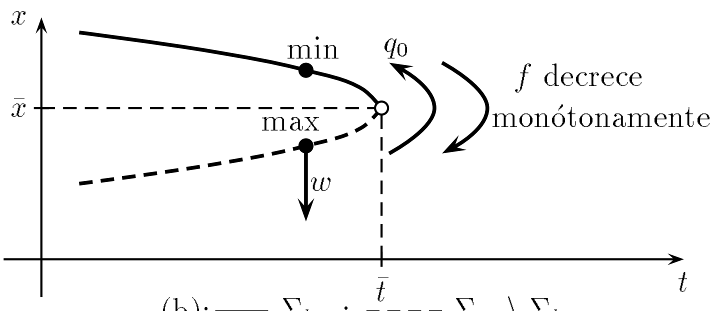


Figura 7.14: En el 1.er caso no existe salto hacia otra componente conexa



(a): $M(v) = \{y \in I\!R^2 | y_1^2 - y_2^2 \le v\}$



(b): —— Σ_{loc} ; - - - $\Sigma_{gc} \setminus \Sigma_{loc}$

Figura 7.15: En el 2do. caso existe un salto w como en la Figura 7.13

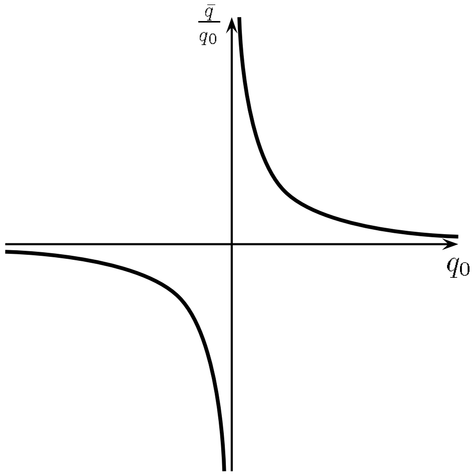


Figura 7.16: $\lim_{q_0 \to 0} |\frac{\bar{q}}{q_0}| = \infty$

2, 3 o 5 los multiplicadores de Lagrange correspondientes permanecen acotados.

Sea ahora $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$. Cuando se satisface MFCQ en $\bar{x} \in M(\bar{t})$ entonces existe localmente, de acuerdo a la Sección 6.1, una continuación en Σ_{gc} para $t > \bar{t}$. Más aún, cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$, la continuación en Σ_{stat} está incluso unívocamente determinada (ver Figura 6.10). Cuando, por el contrario, MFCQ no se satisface en $\bar{x} \in M(\bar{t})$, sabemos de todos modos que localmente $M(\psi_2^{-1}(0)) = \{0_n\}$ (Sección 6.1 y especialmente Figura 6.9). Esto quiere decir que el conjunto factible se reduce localmente a un solo elemento $\{(\bar{x}, \bar{t})\}$ y que, para $t > \bar{t}$, se hace vacío. Además, vale que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{stat}$ y, por lo tanto, no existe un salto hacia otra componente conexa de Σ_{loc}.

Con todo esto hemos analizado la posibilidad de saltos para los cinco tipos de puntos de la clase de Jongen-Jonker-Twilt. Resumiendo, debemos dejar dicho que un método de continuación con saltos trabaja eficientemente, para valores crecientes del parámetro $t \geq \bar{t}$, en la medida en que la componente conexa actual del conjunto factible no se haga vacía para $t \geq \bar{t}$. En los casos $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ ($\tilde{\delta} = -1$) y $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$ (no se satisface MFCQ) tal componente se hace vacía en $\bar{x} \in M(\bar{t})$)

y no existe una dirección de descenso factible en $\bar{x}$ para $P(\bar{t})$ (puesto que todas las direcciones son inadmisibles). En tales casos, un procedimiento de descenso que comience en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$ aproximaría un mínimo local ya conocido. Desdichadamente, no es posible eliminar tales casos mediante pequeñas C^2-perturbaciones, pues segun el Teorema 6.25 (Teorema de Genericidad) la existencia de los puntos de Tipo 4 y 5 es estable en el sentido allí definido.

Una alternativa para las situaciones en las cuales no existe un salto, consiste en utilizar un método de continuación para recorrer la componente conexa actual de Σ_{gc} según valores decrecientes de t (es decir, recorrerla en sentido inverso respecto del eje t) con la esperanza de que el valor de $\bar{t}$ pueda sobrepasarse en otro trozo de la componente conexa. Finalmente, como ya se ha mencionado, no existe, en general, absoluta certeza de alcanzar el valor deseado $t = 1$. Para ello sería preciso, en el peor de los casos, realizar la continuación sobre todas las componentes conexas de $\Sigma_{gc}|_{[0,1]}$, lo cual no es, en general, practicamente posible, al menos hasta el momento presente.

Basándonos en las consideraciones anteriores ofreceremos en la sección próxima las ideas algorítmicas fundamentales de algunos métodos de continuación (con saltos).

7.3 Resumen de algunos procedimientos

Esta sección contiene resumidamente los fundamentos conceptuales de los algoritmos PATHI, PATHII, PATHIII y JUMPI, descritos detalladamente en [61] además de una versión modificada de JUMPII. En lo que sigue utilizaremos el intervalo $[t_A, t_B] \subset I\!R$, $(t_A < t_B)$. Así podremos considerar tanto el caso de una extensión de $[0, 1]$ ($[0, 1] \subset [t_A, t_B]$, ver Figura 7.4(a)), como el de una restricción de $[0, 1]$ ($[t_A, t_B] \subset [0, 1]$); esto último para cuando la curva considerada no esté definida sobre todo el intervalo $[0, 1]$.

7.3.1 Continuación de una curva de clase C^1.

Sean $J^0 = \{1, \ldots, p\}$, $p \leq s$, $\lambda \in I\!R^n$, $\mu \in I\!R^p$. Definamos el problema

$$P^{J^0}(t) \quad \min\{f(x,t) \mid h_i(x,t) = 0, i \in I, g_j(x,t) = 0, j \in J^0\}, \quad (7.13)$$

Consideremos el siguiente sistema asociado a dicho problema

$$H^{J^0}(x,\lambda,\mu,t) = \left[\begin{array}{l} D_x L^{J^0}(x,\lambda,\mu,t) \\ h_i(x,t)=0,\ i\in I \\ g_j(x,t)=0,\ j\in J^0 \end{array} \right], \tag{7.14}$$

donde $L^{J^0} = f(x,t) - \sum_{i\in I}\lambda_i h_i(x,t) - \sum_{j\in J^0}\mu_j g_j(x,t)$

Supóngase que el problema $P^{J^0}(t)$ es KH-regular relativo a $[t_A,t_B]$, $(x^0,\lambda^0,\mu^0,t_A)\in(H^{J^0})^{-1}(0)$ y $\hat{\mathcal{C}}$ es una componente conexa compacta de $(H^{J^0})^{-1}(0)\cap(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p\times[t_A,t_B])$, con $(x^0,\lambda^0,\mu^0,t_A)\in\hat{\mathcal{C}}$.

Entonces la propiedad de valor regular junto con el teorema de la función implícita proporcionan la existencia de un intervalo $[\hat{z}^1,\hat{z}^2]\subset\mathbb{R}$, de un conjunto abierto $Z\subset\mathbb{R}$ con $[\hat{z}^1,\hat{z}^2]\subset Z$, así como de una C^1-función unívocamente determinada

$$\hat{u}: z\in Z\mapsto \hat{u}(z)=(\hat{x}(z),\hat{\lambda}(z),\hat{\mu}(z),\hat{t}(z))$$

con $\hat{u}(\hat{z}^1)=(x^0,\lambda^0,\mu^0,t_A)$, $\hat{t}(z^2)\in\{t_A,t_B\}$, $\hat{\mathcal{C}}=\{\hat{u}(z)\mid z\in[\hat{z}^1,\hat{z}^2]\}$ y $\hat{u}(z)|_{[\hat{z}^1,\hat{z}^2]}:[\hat{z}^1,\hat{z}^2]\mapsto\hat{\mathcal{C}}$ es un homeomorfismo (Ver Figura 7.17).

Cuando $P^{J^0}(t)$ es JJT-regular relativo al intervalo $[t_A,t_B]$ entonces el conjunto $\{(\hat{x}(z),\hat{t}(z))\mid z\in[\hat{z}^1,\hat{z}^2]\}$ solo contiene, obviamente, puntos de Tipo 1 o de Tipo 3. Además, quedan excluidos puntos como el (x,λ,μ,t) de la Figura 7.17 (cuyo vector tangencial posee una t-componente nula).

En esta sección entenderemos por "método de continuación a lo largo de la curva $\hat{\mathcal{C}}$", la construcción de una discretización

$$\hat{z}^1 = z_1 < z_2 < \ldots < z_{\hat{N}-1} < z_{\hat{N}} = \hat{z}^2$$

del intervalo $[\hat{z}^1,\hat{z}^2]$, así como el cálculo de los correspondientes puntos solución $\hat{u}(z_k)\in\hat{\mathcal{C}}$ (resp. aproximaciónes adecuadas $\bar{u}^k$ de $\hat{u}(z_k)$), $k=1,\ldots,\hat{N}$.

En un método de continuación partiendo de $\hat{u}^{k-1}$, se calcula el $\hat{u}^k$ utilizando un esquema de Predicción-Corrección. Tales esquemas pueden descomponerse en dos partes:

(a) <u>El paso de predicción:</u> Determinamos un paso $\delta^{k-1}\in\mathbb{R}$, así como una dirección $w^{k-1}\in\mathbb{R}^{n+m+p+1}$ y definimos

$$u^{k,0}=\bar{u}^{k-1}+\delta^{k-1}w^{k-1}$$

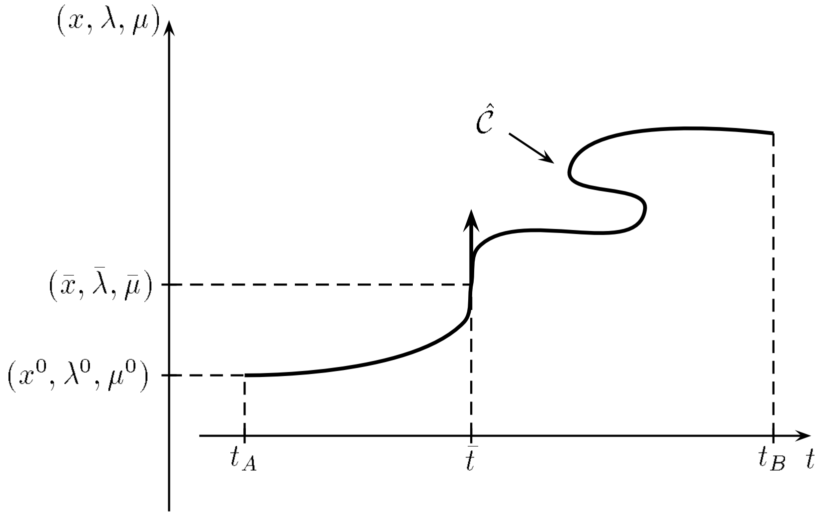


Figura 7.17: Se cumple $H^{J^0}(\hat{u}(z)) = 0$ para todo $z \in [\hat{z}^1, \hat{z}^2]$

donde w^{k-1} representa una solución del sistema

$$A^{k-1}w = 0, \quad \|w\| = 1, \quad \text{signo det} \begin{pmatrix} A^{k-1} \\ w \end{pmatrix} = \pi^{k-1}$$

$\pi^{k-1} = \{-1, 1\}$ y A^{k-1} es una aproximación de la matriz jacobiana $DH^{J^0}(\bar{u}^{k-1})$ (w^{k-1} es claramente una aproximación del vector tangente a $\hat{\mathcal{C}}$ en el punto $\hat{u}(z_{k-1})$ normalizado, ver Figura 7.18).

(b) <u>El paso de corrección:</u> Ahora utilizamos el punto $u^{k,0}$, calculado en el paso de predicción, como punto de partida de una sucesión $\{u^{k,\rho}\}$, la cual obtenemos iterativamente del sistema siguiente:

$$\begin{aligned} A^{k,\rho-1}(u^{k,\rho} - u^{k,\rho-1}) + H^{J^0}(u^{k,\rho-1}) &= 0 \\ w^{k,\rho-1}(u^{k,\rho} - u^{k,\rho-1}) &= 0, \;\; \rho = 1, \ldots, \rho_k. \end{aligned}$$

aquí las $A^{k,\rho-1}$ representan aproximaciones de las matrices jacobianas $DH^{J^0}\left(u^{k,\rho-1}\right)$ y $w^{k,\rho-1}$ es por ejemplo w^{k-1} o alguno de

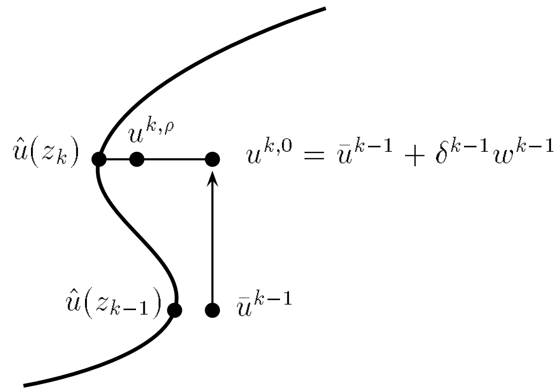


Figura 7.18: Un paso de predicción corrección con $w^{k-1} = w^{k,\rho}$, $\rho = 1, \ldots, \rho_k$

los vectores unitarios de $I\!R^{n+m+p+1}$.

(c) <u>Determinación de $\bar{u}^k$:</u> Ponemos $\bar{u}^k = u^{k,\rho_k}$ y $\pi^k = \pi^{k-1}$ para el siguiente paso de predicción-corrección (En 7.3.2 ofreceremos una variación para π^k).

La clase de procedimientos del tipo predicción-corrección antes definida contiene, entre otros, la predicción de Euler ($A^{k-1} = DH^{J^0}\left(\bar{u}^{k-1}\right)$), la correción de Newton ($A^{k,\rho-1} = DH^{J^0}\left(u^{k,\rho-1}\right)$), así como técnicas de tipo quasi-Newton. Referimos al lector a [2] para un estudio detallado. Aquí baste decir que, bajo las condiciones antes dadas, se dispone actualmente de procedimientos numéricamente realizables de tipo predicción-corrección, los cuales generan, en el último paso de corrección, una sucesión $\left\{u^{\hat{N},\rho}\right\}_{\rho \in I\!N}$ convergente a $\hat{z}^2$, cuya velocidad de convergencia queda determinada por el procedimiento, localmente convergente, que se adopte (por ejemplo convergencia cuadrática en el caso del método de Newton o convergencia superlineal en el caso de ciertas técnicas quasi-newton).

7.3.2 Continuación de una curva solución $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{H}^{-1}(0)$

Sean

- $\mathcal{H}$ definida como en 6.44, $\lambda \in I\!R^m$, $\mu \in I\!R^s$,
- El problema $P(t)$, correspondiente a la aplicación $\mathcal{H}$, es KH-regular relativo al intervalo $[t_A, t_B]$,
- $(x^0, \lambda^0, \mu^0, t_A) \in \mathcal{H}^{-1}(0)$ y
- $\tilde{\mathcal{C}}$ es un trozo de curva de $(\mathcal{H}^{-1}(0) \cap (I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s \times [t_A, t_B])$ conexa, compacta y tal que $(x^0, \lambda^0, \mu^0, t_A) \in \hat{\mathcal{C}}$.

De la definición de valor regular y especialmente de la propiedad de transversalidad (RW3), obtenemos las siguientes propiedades para $\tilde{\mathcal{C}}$ (cfr. [61], teoremas 4.2.1,4.2.2,4.2.3):

(i) Existe un intervalo $[\tilde{z}^1, \tilde{z}^2] \subset I\!R$ y una función contínua

$$\tilde{u} : z \in [\tilde{z}^1, \tilde{z}^2] \mapsto \tilde{u}(z) = (\tilde{x}(z), \tilde{\lambda}(z), \tilde{\mu}(z), \tilde{t}(z))$$

con $\tilde{u}(\tilde{z}^1) = (x^0, \lambda^0, \mu^0, t_A)$, $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{u}(z) \mid z \in [\tilde{z}^1, \tilde{z}^2]\}$ y, además, $\tilde{u} : [\tilde{z}^1, \tilde{z}^2] \mapsto \tilde{\mathcal{C}}$ es un homeomorfismo.

(ii) Existe una partición de $[\tilde{z}^1, \tilde{z}^2]$, unívocamente determinada, en un número finito de subintervalos

$$[\tilde{z}^1, \tilde{z}^2] = \bigcup_{l=1}^{L} [z^{l-1}, z^l],\ z^{l-1} \neq z^l,\ l = 1, \ldots, L$$

y conjuntos de índices correspondientes, J^l, $l = 1, \ldots, L$ con las propiedades siguientes:

- $J_0(\tilde{x}(z), \tilde{t}(z)) = J^l$ para todo $z \in [z^{l-1}, z^l]$.
- $\Big|\mid J^l \mid - \mid J^{l-1} \mid\Big| = 1$.
- para todo $z \in (z^{l-1}, z^l)$ vale que $\tilde{\mu}_j(z) \neq 0,\ j = 1, \ldots, s$ (Ver Figura 7.19(a), donde se ha tomado $L = 4$).

(iii) Para cada índice $l \in \{1, \ldots, L\}$ existe una vecindad abierto $Z^l \subset \mathbb{R}$, con $[z^{l-1}, z^l] \subset Z^l$ y una C^1-función, unívocamente determinada

$$\begin{array}{rcl} \hat{u}^l : Z^l & \mapsto & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{|J^l|} \times \mathbb{R} \\ z \in Z^l & \mapsto & \hat{u}^l(z) = \left(\hat{x}^l(z), \hat{\lambda}^l(z), \hat{\mu}^l(z), \hat{t}^l(z)\right) \end{array}$$

con las propiedades siguientes:

- para todo $z \in [z^{l-1}, z^l]$ se tiene que $\hat{x}^l(z) = \tilde{x}(z)$, $\hat{\lambda}^l(z) = \tilde{\lambda}(z)$, $\hat{t}^l(z) = \tilde{t}(z)$ y las componentes de $\tilde{\mu}(z)$ y $\hat{\mu}^l(z)$ que pertenecen a J^l son igualmente idénticas
- $\{\hat{u}^l(z) \mid z \in Z^l\} \subset \left(H^{J^l}\right)^{-1}(0)$, donde H^{J^l} queda definida como en 7.14 con $J^0 = J^l$.

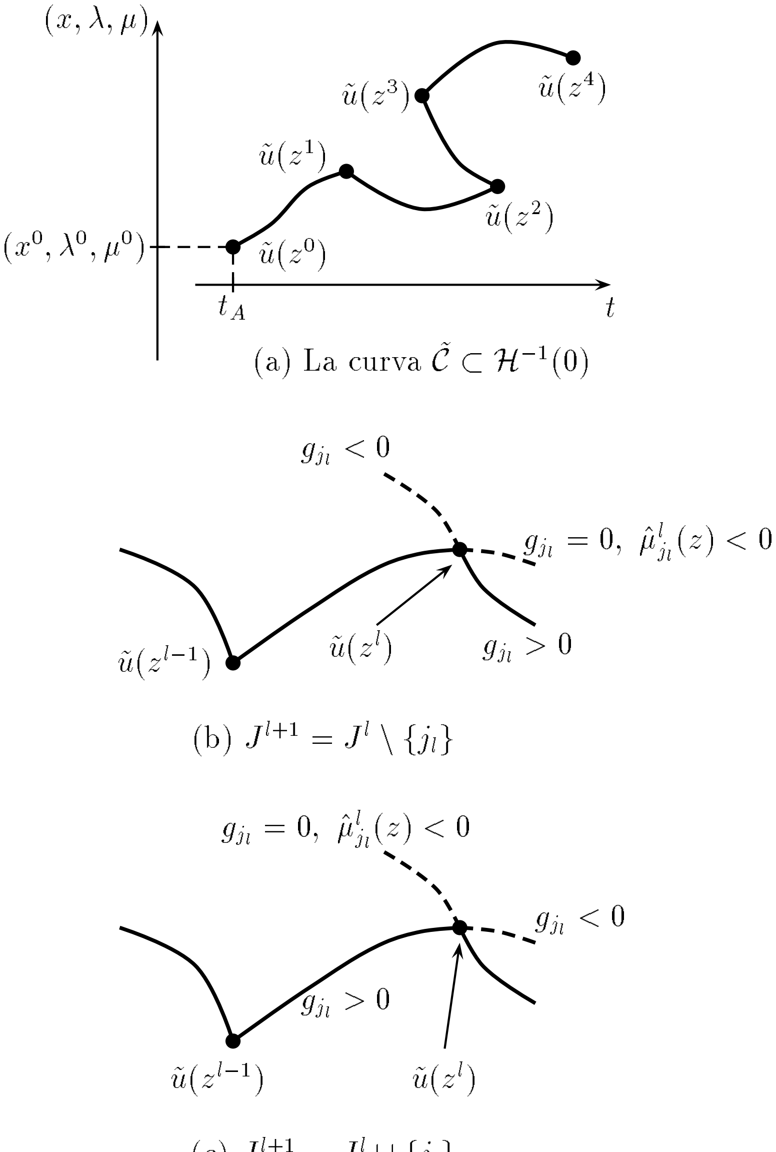
(iv) Para cada índice $l \in \{1, \ldots, L-1\}$ existe un índice unívocamente determinado $j_l \in J$ para el cual vale una de las dos siguientes posibilidades:

- $j_l \in J^l$ y $\tilde{\mu}_{j_l}(z) = 0$ (Ver Figura 7.19(b)) o
- $j_l \in J \setminus J^l$ y $g_{j_l}(\tilde{x}(z^l), \tilde{t}(z^l)) = 0$ (Ver Figura 7.19(c)) y además, se tiene que

$$J^{l+1} = \begin{cases} J^l \setminus \{j_l\}, & \text{cuando } j_l \in J^l \\ J^l \cup \{j_l\}, & \text{cuando } j_l \in J \setminus J^l. \end{cases}$$

Los conjuntos J^l, $l = 1, \ldots, L$ han sido denominados en la literatura como conjuntos de índices activos o como conjuntos de estabilidad local. Para la continuación del trozo de curva $\{\tilde{u}(z) \mid z \in [z^{l-1}, z^l]\}$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ (más precisamente el trozo de curva $\{\tilde{u}^l(z) \mid z \in [z^{l-1}, z^l]\}$ de $\left(H^{J^l}\right)^{-1}(0)$) puede utilizarse un procedimiento del tipo predicción-corrección dado en 7.3.1. Análogamente a 7.3.1, el problema de continuación de $\tilde{\mathcal{C}}$ se puede formular del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Encontrar una discretización del intervalo } [\tilde{z}^1, \tilde{z}^2] \\ \qquad \tilde{z}^1 = \tilde{z}_1 < \tilde{z}_2 < \ldots < \tilde{z}_{\tilde{N}-1} < \tilde{z}_{\tilde{N}} = \tilde{z}^2 \\ \text{así como puntos solución correspondientes} \\ \tilde{u}(\tilde{z}_k) \in \tilde{\mathcal{C}} \text{ (resp. aproximaciones adecuadas } \tilde{u}^k \\ \text{de } \tilde{u}(\tilde{z}_k)), k = 1, \ldots, \tilde{N} \end{array}\right\} \tag{7.15}$$



(a) La curva $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{H}^{-1}(0)$

(b) $J^{l+1} = J^l \setminus \{j_l\}$

(c) $J^{l+1} = J^l \cup \{j_l\}$

Figura 7.19:

Sean ahora $\tilde{u}^{k-1} = \left(\tilde{x}^{k-1}, \tilde{\lambda}^{k-1}, \tilde{\mu}^{k-1}, \tilde{t}^{k-1}\right)$ y, además,

$$\left(\tilde{x}^{k-1}, \tilde{\lambda}^{k-1}, \tilde{\mu}_j^{k-1}, j \in \tilde{J}^{k-1}, \tilde{t}^{k-1}\right) \in I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^{|\tilde{J}^{k-1}|} \times I\!R$$

una aproximación de una solución de $H^{\tilde{J}^{k-1}}(x, \lambda, \mu, t) = 0$, tal que $g_j(\tilde{x}^{k-1}, \tilde{t}^{k-1}) \geq 0$ para todo $j \in J \backslash \tilde{J}^{k-1}$ y $\tilde{\mu}_j^{k-1} \geq 0$ para todo $j \in \tilde{J}^{k-1}$.

Partiendo de $\tilde{u}^{k-1}$ se introducirá, para el cálculo de $\tilde{u}^k$ un paso de predicción (a) y un paso de corrección (b) con $J^0 = \tilde{J}^{k-1}$, como en 7.3.1. En vez del paso (c), se procesará el paso (c') dado a continuación, con lo cual será posible chequear un cambio de los conjuntos de índices activos $\tilde{J}^{k-1}$. Para ello sea $u^k = u^{k,\rho_k}$ con $u^k = (x^k, \lambda^k, \mu^k, t^k)$, $\mu^k \in I\!R^{|\tilde{J}^{k-1}|}$, donde $u^k = u^{k,\rho_k}$ se determina como en 7.3.1.

(c') <u>Chequeo del conjunto de índices activo.</u>

Cuando $g_j(x^k, t^k) \geq 0$ para todo $j \in J \setminus \tilde{J}^{k-1}$ y vale que $\mu_j^k \geq 0$ para todo $j \in \tilde{J}^{k-1}$ entonces ponemos $\tilde{x}^k = x^k$, $\tilde{\lambda}^k = \lambda^k$, $\tilde{t}^k = t^k$,

$$\tilde{\mu}_j^k = \begin{cases} \mu_j^k, & j \in \tilde{J}^{k-1} \\ -g_j(x^k, t^k), & j \in J \setminus \tilde{J}^{k-1} \end{cases}, \quad \tilde{u}^k = (\tilde{x}^k, \tilde{\lambda}^k, \tilde{\mu}^k, \tilde{t}^k)$$

con $\tilde{\mu}^k \in I\!R^s$, $\tilde{J}^k = \tilde{J}^{k-1}$ y $\pi^k = \pi^{k-1}$ para el paso de predicción-corrección posterior (en tal caso el conjunto de índices activos permanece constante).

Cuando existe un índice $j_k \in J$, para el cual se tiene alguna de las dos siguientes condiciones

- $g_j(x^k, t^k) < 0$ y $j_k \in J \backslash \tilde{J}^{k+1}$
- $\mu_{j_k}^k < 0$ y $j_k \in \tilde{J}^{k-1}$

entonces ponemos

$$\tilde{J}^k = \begin{cases} \tilde{J}^{k-1} \cup \{j_k\} & \text{cuando } j_k \in J \setminus \tilde{J}^{k-1} \\ \tilde{J}^{k-1} \setminus \{j_k\} & \text{cuando } j_k \in \tilde{J}^{k-1} \end{cases}$$

junto con $\tilde{x}^k = x^k$, $\tilde{\lambda}^k = \lambda^k$, $\tilde{t}^k = t^k$,

$$\tilde{\mu}_j^k = \begin{cases} \mu_j^k, & j \in \tilde{J}^{k-1} \cap \tilde{J}^k \\ 0, & j \in \tilde{J}^k \setminus \tilde{J}^{k-1} \\ -g_j(x^k, t^k), & j \in J \setminus \tilde{J}^k \end{cases}$$

$\tilde{u}^k = (\tilde{x}^k, \tilde{\lambda}^k, \tilde{\mu}^k, \tilde{t}^k)$ con $\tilde{\mu}^k \in I\!R^s$, así como $\pi^k = -\pi^{k-1}$ para el paso de predicción-corrección siguiente.

En ([61], Lemma 4.2.1) se ha demostrado que la determinación del signo de π^k garantiza precisamente que la curva solución de $\left(H^{\tilde{J}^k}\right)^{-1}(0)$ sea continuada en la dirección correcta (Ver Figura 7.19). Análogamente a 7.3.1 existen procedimientos de predicción-corrección numéricamente realizables, cuyas iteraciones quedan descritas por los pasos parciales (a), (b) y (c').

Los métodos de continuación antes mencionados pueden aplicarse al principio de inmersión descrito en la Sección 7.1. Bajo las condiciones del Teorema 7.2 existe una curva solución $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{H}^{-1}(0)$, cuya proyección en el espacio (x, t) pertenece a Σ_{stat} y conecta una solución conocida $(x^0, 0) \in \Sigma_{stat}$ con un punto $(x^1, 1)$, donde x^1 es un punto estacionario del problema de original P. Por medio del método de continuación se generará, en el último paso de corrección, una sucesión que converge superlinealmente al vector solución (Aquí se impone la utilización de ciertas técnicas de tipo quasi-Newton). En este sentido, el principio de inmersión viene a ser un método para la globalización de procedimientos localmente convergentes (superlinealmente).

Para concluir dejamos en claro lo siguiente: Cuando el problema $P(t)$ es regular en el sentido de JJT, relativo al intervalo $[t_A, t_B]$ entonces cada uno de los puntos $\left(\tilde{x}(z^l), \tilde{t}(z^l)\right)$, $l = 1, \ldots, L-1$, en los cuales cambia el conjunto de índices activos es de Tipo 2 o de Tipo 5. Ver figuras 7.19(a) y 6.4 para notar los puntos de cambio del conjunto de índices activos y para analizar el caso de los puntos de Tipo 2 respectivamente. Conforme a la caracterización de Tipo 5 dada en la Sección 6.1, ofrecemos en la Figura 7.20 una representación local de la curva $\tilde{\mathcal{C}}$, en una vecindad de $\tilde{u}(z^l)$, con $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (\tilde{x}(z^l), \tilde{t}(z^l))$ y $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^5_{gc}$. Cuando MFCQ no se satisface en $\tilde{x}$ para el problema $P(\tilde{t})$ entonces el conjunto $\{(\lambda, \mu) \in I\!R^m \times I\!R^s \mid H(\tilde{x}, \lambda, \mu, \tilde{t}) = 0\}$ no es acotado (Ver Figura 7.20(a)).

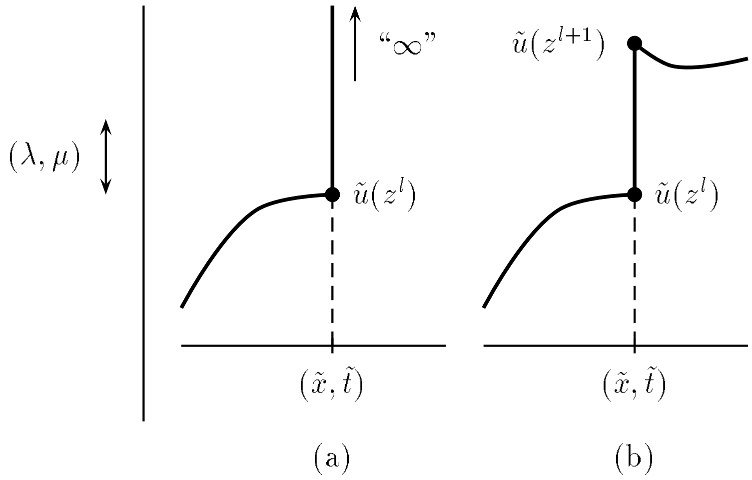


Figura 7.20: En (a) no se cumple MFCQ respecto a $P(\tilde{t})$ y en (b) sí se cumple

7.3.3 Continuación de una componente conexa compacta $\tilde{\mathcal{C}}(x^0)$ de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$

En esta sección consideramos que $P(t)$ es JJT-regular relativo al intervalo $[t_A, t_B]$.

Bajo las hipótesis hechas en 7.3.2 puede existir un punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{t}) \in \tilde{\mathcal{C}}$, con $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \Sigma^5_{gc}$ para el cual MFCQ no se satisfaga en $\tilde{x}$ relativo al problema $P(\tilde{t})$ (Ver Figura 7.20(a)). La proyección de $\tilde{\mathcal{C}}$ en el (x,t)-espacio que pertenece a Σ_{stat}, tiene a $(\tilde{x}, \tilde{t})$ como punto final. Por lo tanto, una continuación sobre Σ_{stat} es imposible. Sin embargo, existe una continuación sobre Σ_{gc} (Ver Sección 6.1). En tal caso, es posible que podamos encontrar, mediante una continuación en Σ_{gc} (Ver Figura 6.8), diversas componentes conexas de Σ_{stat}. Discutiremos pues la continuación de una componente conexa compacta $\mathcal{C}(x^0)$ de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$, donde $(x^0, t_A) \in \Sigma^1_{gc} \cap \mathcal{C}(x^0)$.

En general, $\mathcal{C}(x^0)$ no será una variedad unidimensional, pues en los puntos de Tipo 2 y de Tipo 5, un número finito de acuerdo al Resultado

6.11, aparecen bifurcaciones. Cada una de tales ramas será continuada por separado. Para ello supondremos que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^{\nu} \cap \mathcal{C}(x^0)$, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ y elaboraremos el concepto de continuación para cada caso, el cual se basa en las técnicas de 7.3.1 y 7.3.2.

Sean por lo tanto, para la discusión que sigue, $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathcal{C}(x^0)$ y $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$.

$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^1$ (resp.$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^3$): $\mathcal{C}(x^0)$ es una C^1-variedad unidimensional en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ (Ver Figura 6.2 y Figura 4.14), por lo cual puede recorrerse del modo descrito en 7.3.1 con $J^0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$.

$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$. El punto $(\bar{x}, \bar{t})$ es una bifurcación en Σ_{gc} con tres ramas diferentes (Ver Figura 6.3(c)). La aparición de un punto de Tipo 2 se reconoce cuando se emplea un método de continuación por las siguientes características:

- o bien se anula exactamente un multiplicador de Lagrange
- o una restricción de desigualdad, hasta el momento inactiva, se hace activa

Sea pues $\bar{\mu}_p = 0$, caracterizado como en $(2c)$ de la Sección 6.1. Dos de las tres ramas forman la proyección sobre el (x, t)-espacio del conjunto solución del problema $P^{J^0}(t)$ dado en 7.3.1, para $J^0 = \{1, \ldots, p\}$ y, por tanto, pueden ser seguidas mediante los procedimientos dados en 7.3.1. Por su parte, la tercera rama debe escudriñarse mediante un test de factibilidad para g_p, tal y como se propone en 7.3.2. Una vez determinada la dirección de factibilidad de g_p, se efectúa la continuación con el procedimiento propuesto en 7.3.1, solo que en esta ocasión con $J^0 = \{1, \ldots, p-1\}$.

$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$.De acuerdo a la Sección 6.1, Σ_{gc} es una variedad unidimensional en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ (véase Figura 6.5). A diferencia de los puntos de Tipo 3 la proximidad a un punto de Tipo 4 se reconoce en el hecho de que la suma de los valores absolutos de los multiplicadores de Lagrange converge a ∞. De ahí que para efectuar una continuación sobre la componente conexa $\mathcal{C}(x^0)$ no se recurre al sistema 7.14 sino el sistema siguiente (cfr. también [148]):

$$\begin{aligned} \lambda_0 D_x f(x,t) - \sum_{i\in I} \lambda_i D_x h_i(x,t) - \sum_{j=1}^{p} \mu_j D_x g_j(x,t) &= 0 \\ h_i(x,t) &= 0,\ i \in I \\ g_j(x,t) &= 0,\ j = \overline{1,p} \\ \lambda_0^2 + \sum_{i\in I} \lambda_i^2 + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7.16}$$

La matriz jacobiana del sistema 7.16 posee rango completo en cada punto solución $(x, \lambda_0, \lambda, \mu, t) \in I\!R^n \times I\!R \times I\!R^m \times I\!R^p \times I\!R$ y la proyección del conjunto solución sobre el (x,t)-espacio coincide, localmente, con Σ_{gc}. Por lo tanto, la curva solución de 7.16 puede ser seguida, localmente, con una técnica análoga a la descrita en 7.3.1 (ver [61] para la demostración correspondiente).

$\underline{(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5}$. De la caracterización dada en la Sección 6.1 para un punto de Tipo 5 se sigue que $m + p = n + 1$ y que para cada índice $\hat{\jmath} \in \{1, \ldots, p\}$:

- El conjunto
$$M^{\hat{\jmath}} = \left\{ (x,t) \in I\!R^n \times I\!R \;\middle|\; \begin{array}{c} h_i(x,t) = 0, i \in I \\ g_j(x,t) = 0, j \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{\hat{\jmath}\} \end{array} \right\}$$
es una C^1-variedad unidimensional en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ (ver Figura 6.7 para $\hat{\jmath} = p$).

- En una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t})$ el conjunto Σ_{gc} es idéntico a $\bigcup_{\hat{\jmath}=1}^{p} \bar{M}^{\hat{\jmath}}$, donde $\bar{M}^{\hat{\jmath}} = \left\{ (x,t) \in M^{\hat{\jmath}} \,|\, g_{\hat{\jmath}}(x,t) \geq 0 \right\}$.

Por lo tanto, para cada índice $\hat{\jmath} \in \{1, \ldots, p\}$ existe precisamente una rama de Σ_{gc} dada de hecho por $\bar{M}^{\hat{\jmath}} \cup \{(\bar{x}, \bar{t})\}$ (Ver p.e. Figura 6.8). Mediante las técnicas propuestas en 7.3.1 y 7.3.2 se puede tanto continuar $M^{\hat{\jmath}}$, $\hat{\jmath} \in \{1, \ldots, p\}$, (con $J^0 = \{1, \ldots, p\} \setminus \{\hat{j}\}$ en 7.3.1), como determinar la rama factible $\bar{M}^{\hat{\jmath}}$. De tal modo obtenemos las p ramas posibles.

Debe señalarse, sin embargo, que la determinación exacta del conjunto de índices activos $J_0(\bar{x}, \bar{t})$ de un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ de Tipo 5 y, por lo tanto, la continuación sobre Σ_{gc} en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$, no es, en sentido estricto, numéricamente realizable. ([61], Remark 4.5.1)

7.3.4 Los procedimientos PATH

Ahora haremos un resumen de algunas propiedades importantes de los procedimientos PATHI, PATHII y PATHIII, los cuales han sido detalladamente presentados en [61].

PATHI: Continuación sobre una curva compacta de $(\mathbb{R}^n \times [t_A, t_B]) \cap \Sigma_{loc}$.

- Hipótesis:

(I-1) Existe una función contínua $x_{loc} : t \in [t_A, t_B] \mapsto x_{loc}(t)$ con $\{(x_{loc}(t), t) \mid t \in [t_A, t_B]\} \subset \Sigma_{loc}$.

(I-2) $x_{loc}(t_A)$ es conocido o fácil de calcular.

(I-3) Para todo $t \in [t_A, t_B]$ se satisface LICQ en $x_{loc}(t)$ respecto al problema $P(t)$. Además, sean $\lambda_i(t)$, $i \in I$, $\mu_j(t)$, $j \in J_0(x_{loc}(t), t)$, los multiplicadores de Lagrange, unívocamente determinados, con $D_x L(x_{loc}(t), \lambda(t), \mu(t), t) = 0$, donde:

$$L(x, \lambda, \mu, t) = f(x, t) - \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(x, t) - \sum_{j \in J_0(x_{loc}(t), t)} \mu_j g_j(x, t)$$

(I-4) Para todo $t \in [t_A, t_B]$ se tiene que

$$(D_x^2 L(x_{loc}(t), \lambda(t), \mu(t), t))|_{T^+(t)}$$

es positiva definida para $x = x_{loc}(t)$, donde

$$T^+(t) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} D_x h_i(x_{loc}(t), t)\xi = 0, i \in I, \\ D_x g_j(x_{loc}(t), t)\xi = 0, \\ j \in \{\tilde{j} \in J_0(x_{loc}(t), t) \mid \mu_{\tilde{j}}(t) > 0\} \end{array} \right\}$$

- Resultados (cfr. también [122, 46]):

Dadas constantes $\epsilon > 0$ y $\Delta > 0$ puede calcularse, mediante un procedimiento de predicción-corrección, una discretización

$$t_A = t_0 < t_1 < \ldots, t_{\bar{N}-1} < t_{\bar{N}} = t_B$$

del intervalo $[t_A, t_B]$, con $\mid t_k - t_{k-1} \mid \leq \Delta$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$, así como aproximaciónes $\tilde{x}^k$ de $x_{loc}(t_k)$ con error $\|\tilde{x}^k - x_{loc}(t_k)\| < \epsilon$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$.

- Observaciones:

  - Como hemos visto en la Sección 7.1 la condición (I-1) se satisface, en general, solo para una clase muy restringida de problemas.
  - En el algoritmo de predicción-correción puede utilizarse, en vez de 7.3.1(a), el predictor trivial $w^{k-1} = (0_{n+m+p}, 1)$.
  - Puede suceder, aún bajo las condiciones (I-3) y (I-4), que se tenga
  $$| \{j \in J_0(x_{loc}(t_k), t_k) \mid \mu_j(t) = 0\} | > 1$$
  para ciertos t_k, $k \in \{1, \ldots, \bar{N}\}$. Sin embargo, es posible chequear todos los índices $j \in J$ basándonos en 7.3.2 y calcular el nuevo conjunto de índices activos mediante un procedimiento modificado convenientemente.

<u>PATHII</u>: Continuación sobre una curva compacta $\tilde{\mathcal{C}} \subset H^{-1}(0)$.

- Hipótesis:

(II-1) $P(t)$ es KH-regular relativo al intervalo $[t_A, t_B]$.

(II-2) $\tilde{\mathcal{C}} \subset I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s \times [t_A, t_B] \cap \mathcal{H}^{-1}(0)$ es compacto y conexo.

(II-3) $(x^0, \lambda^0, \mu^0, t_A) \in \tilde{\mathcal{C}} \cap \mathcal{H}^{-1}(0)$ es un punto conocido o fácil de calcular.

- Resultados:

  El problema 7.15 se puede resolver en un número finito de pasos mediante un procedimiento de predicción-corrección con $\|\tilde{u}(z_k) - \tilde{u}^k\| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ arbitrario (ver 7.3.2).

<u>PATHIII:</u> Continuación de una componente conexa compacta $\mathcal{C}(x^0, t^0)$ de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$.

- Hipótesis:

(III-1) $P(t)$ es JJT-regular relativo al intervalo $[t_A, t_B]$.

(III-2) $\mathcal{C}(x^0, t^0)$ es una componente conexa y compacta del conjunto $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$.

(III-3) $(x^0, t^0) \in \Sigma^1_{gc} \cap \mathcal{C}(x^0, t^0)$ es un punto conocido o fácil de calcular, donde $t_A \leq t^0 < t_B$.

- Resultados:

  Con ayuda de las técnicas dadas en 7.3.1, 7.3.2 y 7.3.3 se logra una descripción numérica del conjunto $\mathcal{C}(x^0, t^0)$ en un número finito de pasos.

7.3.5 Los Procedimientos JUMPI y JUMPII*

Como ya sabemos no es posible garantizar la existencia, en general, de una curva en Σ_{loc}, Σ_{stat} o Σ_{gc} que conecte los valores de los parámetros $t = 0$ y $t = 1$. Por otra parte los llamados métodos de continuación con saltos no requieren del mencionado supuesto (Ver [61]). Tales métodos combinan técnicas de los procedimientos PATH con los saltos descritos en la Sección 7.2. En lo que sigue expondremos las ideas principales de los procedimientos JUMPI y JUMPII*, donde este último representa una modificación del procedimiento JUMPII descrito en [61].

En lo que sigue de este Capítulo partimos de las siguientes hipótesis:

(J-1) $P(t)$ es JJT-regular relativo al intervalo $[t_A, t_B]$.

(J-2) Se conoce un punto $(x^0, 0) \in \Sigma^1_{gc}$ o es fácil de calcularlo.

(J-3) Existe un conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M(t) \subset C$ para todo $t \in [t_A, t_B]$.

Observación 7.8
El Resultado 6.11, así como las condiciones (J-1) y (J-3), implican que $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ se compone de un número finito de componentes conexas y, además, que $\bigcup_{\nu=2}^{5} \Sigma^{\nu}_{gc} \cap \Sigma_{gc|[t_A,t_B]}$ es un conjunto finito. En lo que respecta a los autores del presente libro, no se conoce, por lo pronto, ninguna aproximación del número de componentes conexas de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ (para el caso general).

Observación 7.9
Considérese , como se ha descrito en la Sección 6.2, un salto w en el punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$. Un procedimiento de descenso que comience

en el punto $\bar{x}$ y utilice, para $P(\bar{t})$, la dirección de descenso w, converge bajo ciertas condiciones hacia un mínimo local $\hat{x}$ de $P(\bar{t})$, el cual existe gracias a la compacticidad de $M(\bar{t})$. Aquí no entraremos a considerar tales condiciones de convergencia. Pero mencionaremos al menos que tales procedimientos operan muy eficientemente, en la mayoría de los casos. No obstante, los siguientes algoritmos de salto no son numéricamente implementables, en sentido estricto. En particular, para ellos no es posible lograr convergencia superlineal, como en el paso de corrección

Mediante los procedimientos de continuación con saltos es posible calcular o aproximar una solución de $P(1)$, para una clase mayor de problemas $P(t)$, partiendo de una solución conocida $(x^0, 0) \in \Sigma^1_{gc}$. Sin embargo tal propósito no está garantizado, en el caso general, en la medida en que no se dispone de saltos para todas las singularidades. En efecto, conforme a la Sección 7.2, no existen saltos para las situaciones $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^4_{gc}(\tilde{\delta} = 1)$ y $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^5_{gc}$ (cuando se viola MFCQ).

Considérese ahora el conjunto:

$$\Sigma^{NJ} = \{(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^4_{gc} \cup \Sigma^5_{gc} \mid \text{en } (x, t) \text{ no existe salto}\}$$

Comenzaremos brindando un resumen sobre los cinco tipos de puntos en Σ_{gc}. Para ello, sean $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}|_{[t_A, t_B]}$, $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$,

$$\lambda_0 D_x f(\bar{x}, \bar{t}) - \sum_{i \in I} \lambda_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) - \sum_{j=1}^{p} \mu_j D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \tag{7.17}$$

y, para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{stat} \cap \Sigma^5_{gc}$:

$$\Lambda = \left\{ (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in I\!R^{m+p} \;\middle|\; \begin{array}{l} (1, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \text{ satizface 7.17 y} \\ \tilde{\mu}_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, p. \end{array} \right\}$$

Las tablas 7.21 y 7.23 y las figuras correspondientes 7.22 y 7.24 contienen la siguiente información sobre cada punto crítico generalizado $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^{\nu}_{gc}$, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$:

- Una representación geométrica de los conjuntos Σ_{gc}, cl Σ_{stat} y de cl Σ_{loc} en una vecindad del punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc} \setminus$ cl Σ_{stat}, $(\bar{x}, \bar{t}) \in$ cl Σ_{stat} y $(\bar{x}, \bar{t}) \in$ cl Σ_{loc} respectivamente.

- Una caracterización del comportamiento de $\sum_{i\in I}\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right| + \sum_{j=1}^{p}\left|\frac{\mu_j}{\lambda_0}\right|$ cuando se aproxima al punto $(\bar{x},\bar{t})$ a lo largo de Σ_{gc}. (Columna (λ,μ) de las tablas 7.21 y 7.23).

- Finalmente, una observación acerca de la continuación sobre Σ_{gc}, cl Σ_{stat}, cl Σ_{loc} y sobre la existencia de saltos. (Columna "Posibilidad de continuación ó de salto" de las tablas 7.21 y 7.23).

Debe tomarse en cuenta que nos hemos limitado a representar solamente aquellas situaciones que aparecen para valores crecientes de t. El caso general se puede deducir sin dificultad.

Ahora considérese el conjunto $K \subset [t_A, t_B]$ y defínase $\Sigma_{loc}|_K = (I\!R^n \times K) \cap \Sigma_{loc}$. Para $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma_{loc}|_K$ sea $\mathcal{C}_{loc}(\bar{x},\bar{t})$ la componente conexa de cl $\Sigma_{loc}|_{[t_A,t_B]}$ que contiene al punto $(\bar{x},\bar{t})$. Entonces para $(\bar{x},\bar{t}) \in$ cl $\Sigma_{loc}|_{[t_A,t_B]}$ existe un intervalo $[\bar{t}, t(\bar{x},\bar{t})]$, con $t(\bar{x},\bar{t}) \leq t_B$ y una función contínua

$$x^{(\bar{x},\bar{t})} : [\bar{t}, t(\bar{x},\bar{t})] \mapsto I\!R^n$$

tal que $\mathcal{C}_{loc}(\bar{x},\bar{t}) = \left\{(x^{(\bar{x},\bar{t})}(t), t) \mid t \in [\bar{t}, t(\bar{x},\bar{t})]\right\}$

En los procedimientos JUMPI y JUMPII descritos en [61] solo se lleva a cabo un salto cuando se alcanza un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in \bigcup_{\nu=1}^{4}\Sigma_{gc}^{\nu}$, si dicho punto satisface $(\bar{x},\bar{t}) \in$ cl Σ_{loc}.

Ahora daremos, de modo resumido, importantes propiedades de JUMPI yJUMPII*. Aquí JUMPII* representa una modificación de JUMPII, la cual permite saltar cuando se alcanzan puntos en $(\bar{x},\bar{t}) \in \bigcup_{\nu=1}^{4}\Sigma_{gc}^{\nu} \setminus \left\{\Sigma^{NJ} \cup \Sigma_{loc}\right\}$.

<u>JUMPI</u>: Continuación con saltos dentro del conjunto $\Sigma_{loc}|_{[0,1]}$.

- Hipótesis:

  1. $[t_A, t_B] = [0, 1]$.
  2. (J-1), (J-2) con $(x^0, 0) \in \Sigma_{loc}$ y (J-3).

- Concepción del procedimiento:

  S0 Poner $(\bar{x},\bar{t}) = (x^0, 0)$.

Tipo	Conjunto al que pertenece $(\bar{x}, \bar{t})$	Posibilidad de continuación ó de salto	$\|(\lambda, \mu)\|$
1	$\Sigma_{gc} \setminus$ cl Σ_{stat} (1a)	PATHIII	acotado
	cl Σ_{stat} (1b)	PATHII	
	cl Σ_{loc} (1c)	PATHI	
2	$\Sigma_{gc} \setminus$ cl Σ_{stat} (2a)	PATHIII	acotado
	cl Σ_{stat} (2b) y (2c)	PATHII y PATHII en (2b) y (2c) Salto es posible en (2c)	
	cl Σ_{loc} (2d) y (2e)	PATHI en (2d). Salto es posible en (2e)	
3	$\Sigma_{gc} \setminus$ cl Σ_{stat} (3a)	PATHIII. Salto es posible	acotado
	cl Σ_{stat} (3b)	PATHII. Salto es posible	
	cl Σ_{loc} (3c)	Salto es posible	

Tabla 7.21: Tipos 1, 2 y 3. (Ver Figura 7.22)

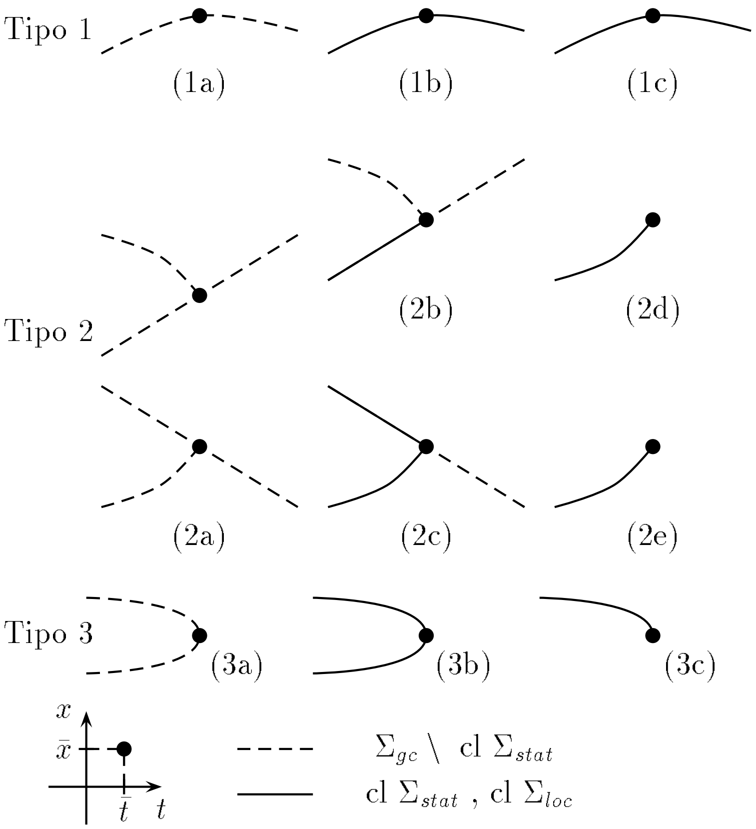


Figura 7.22: Figuras de la Tabla 7.21

Tipo	Conjunto al que pertenece $(\bar{x}, \bar{t})$	Posibilidad de continuación ó de salto	$\|(\lambda, \mu)\|$
4	$\Sigma_{gc} \setminus$ cl Σ_{stat} (4a)	PATHII. Salto es posible	no acotado
	cl Σ_{stat} (4b)	PATHII Salto es posible excepto cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}$ y $\tilde{\delta} = -1$	
	cl Σ_{loc} (4c)	Salto es posible excepto cuando $\tilde{\delta} = -1$	
5 *sin* $MFCQ$	cl Σ_{stat} (5a) ó cl Σ_{loc} (5b)	PATHII. Salto no es posible	acotado pero Λ no acotado
5 *con* $MFCQ$	$\Sigma_{gc} \setminus$ cl Σ_{stat} (5c)	PATHIII	acotado y Λcompacto
	cl Σ_{stat} (5d) ó cl Σ_{loc} (5e)	PATHII (III)	

Tabla 7.23: Tipos 4 y 5. (Ver Figura 7.24)

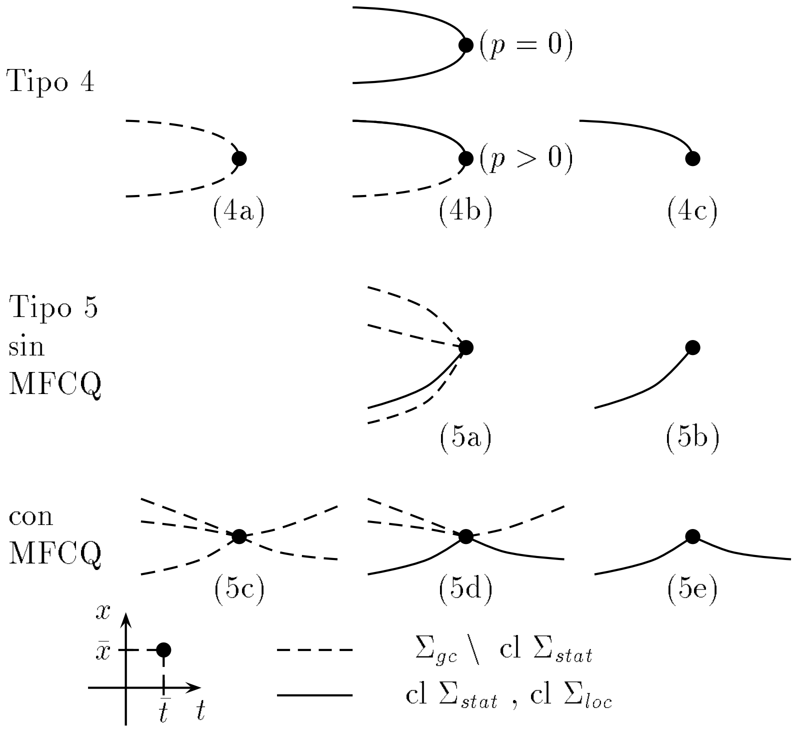


Figura 7.24: Figuras de la Tabla 7.23

S1 Continuar sobre $\mathcal{C}_{loc}(\bar{x},\bar{t})$ mediante PATHIII.

S2 Si $t(\bar{x},\bar{t}) = 1$ y $(x^{(\bar{x},\bar{t})}(1), 1) \in \Sigma_{loc}$, entonces STOP.

S3 Si $(x^{(\bar{x},\bar{t})}(t(\bar{x},\bar{t})), t(\bar{x},\bar{t})) \in \Sigma^{NJ}$, entonces STOP.

S4 Si $(x^{(\bar{x},\bar{t})}(t(\bar{x},\bar{t})), t(\bar{x},\bar{t})) \notin \Sigma^{NJ}$ entonces saltar y calcular un punto $(\hat{x}, t(\bar{x},\bar{t})) \in \Sigma_{loc}$. Poner $(\bar{x},\bar{t}) = (\hat{x}, t(\bar{x},\bar{t}))$ e ir a $S1$.

- Resultado:

  El procedimiento termina en $S3$ o genera, por el contrario, una discretización

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{\bar{N}-1} < t_{\bar{N}} = 1$$

  del intervalo $[0,1]$, así como aproximaciones correspondientes de los puntos $(x^k, t_k) \in \Sigma_{loc}$, $k = 0. \ldots, \bar{N}$. Cuando el punto $(x^{\bar{N}}, 1)$ en $S1$ ha sido aproximado (mediante PATHIII) entonces dicho procedimiento genera, en el último paso de corrección, una sucesión convergente hacia $x^{\bar{N}}$ (superlinealmente).

- Observaciones:

  1. Cuando $t(\bar{x},\bar{t}) < 1$ se sigue facilmente que

$$(x^{(\bar{x},\bar{t})}(t(\bar{x},\bar{t})), t(\bar{x},\bar{t})) \in \bigcup_{\nu=2}^{5} \Sigma_{gc}^{\nu}$$

     Por consiguiente $S4$ se ejecutará un número finito de veces, a causa de la Observación 7.8.

  2. La existencia de $\hat{x}$ en S4 se obtiene de la compacticidad de $M(t(\bar{x},\bar{t}))$.

El procedimiento JUMPI se limita a la descripción numérica de un subconjunto de cl $\Sigma_{loc}|_{[0,1]}$. Por eso es posible que JUMPI se detenga en $S3$ aunque haya una continuación dentro de Σ_{gc} mediante PATHIII (al principio quizas para valores decrecientes de t) y, gracias a la cual se alcance eventualmente el valor $t = 1$. El propósito del procedimiento JUMPII* se basa en tal consideración y se puede formular del siguiente modo:

Encontrar una descripción numérica de tantas componentes conexas de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ como sea posible mediante el procedimiento PATHIII y los saltos descritos en la Sección 7.2.

Esclarecemos ahora la idea fundamental de JUMPII*:

Sean $t_A < 0$, $1 < t_B$ y $\mathcal{C}(x^0, 0)$ la componente conexa de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ que contiene a $(x^0, 0)$ (determinado como en (J-2)).

A través de PATHIII obtenemos una descripción numérica del conjunto $\mathcal{C}(x^0, 0)$ y, en particular, una discretización

$$t_A \leq t_{-q} < \ldots < t_0 < \ldots < t_r \leq t_B,\ t_0 = 0$$

así como aproximaciones de los conjuntos finitos correspondientes $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}(x^0, 0) \cap \Sigma_{gc}|_{\{t_k\}}$, $k = -q, \ldots, r$, Además, la longitud del paso en PATHIII se puede escoger de modo tal que se tenga (7.18), gracias a la Observación 7.8 (Ver Figura 7.25).

$$\mathcal{C}(x^0, 0) \cap \bigcup_{\nu=2}^{4} \Sigma_{gc}^{\nu} \subset \bigcup_{k=-q}^{r} \mathcal{C}^k \tag{7.18}$$

Sean además

$$\hat{\mathcal{C}}^k = \left\{(x^k, t_k) \in \mathcal{C}^k \mid f(x^k, t_k) \leq f(x, t_k)\ \forall (x, t_k) \in \mathcal{C}^k\right\}$$

para $k = -q, \ldots, r$ y

$$\check{\mathcal{C}} = \left(\bigcup_{k=-q}^{r} \hat{\mathcal{C}}^k\right) \setminus \left(\Sigma^{NJ} \cup \Sigma_{loc}\right)$$

Si $\check{\mathcal{C}} = \emptyset$ el procedimiento JUMPII* proporciona una descripción numérica de $\mathcal{C}(x^0, 0)$ y se detiene.

Cuando $(\bar{x}, \bar{t}) \in \check{\mathcal{C}}$ entonces se habrá saltado de $(\bar{x}, \bar{t})$ a otra componente conexa de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ y, por lo tanto, se habrá aproximado un punto $(\hat{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{loc}|_{[t_A,t_B]} \setminus \mathcal{C}(x^0, 0)$. El procedimiento así descrito será ejecutado también, de un modo análogo, para la componente conexa de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ que contiene al punto $(\hat{x}, \bar{t})$.

<u>JUMPII*</u>: Continuación con saltos dentro del conjunto $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$.

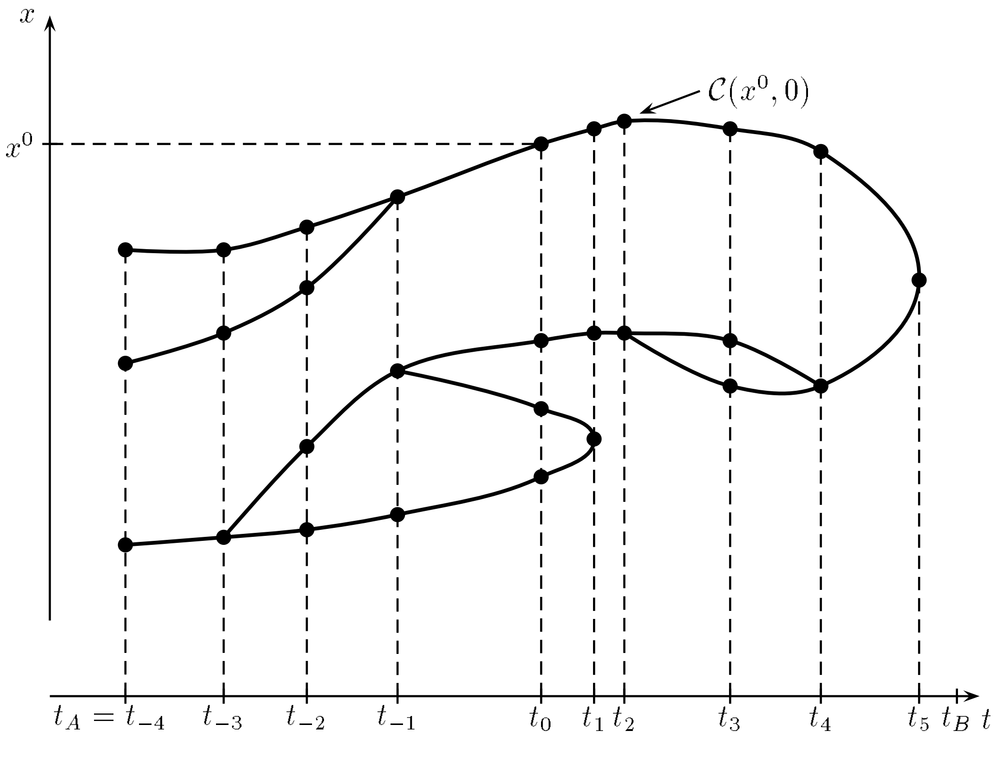


Figura 7.25: Continuación de $\mathcal{C}(x^0, 0) \subset \Sigma_{gc}|_{[t_A, t_B]}$ mediante PATHIII ($q = 4, r = 5$)

- Hipótesis:
  1. $[0,1] \subset [t_A, t_B]$.
  2. (J-1), (J-2) y (J-3).
- Resultado:

  Con ayuda de PATHIII y los saltos expuestos en la Sección 7.2 se puede obtener una descripción numérica de $\mathcal{C}(x^0, 0)$ en un número finito de iteraciones, así como otras componentes conexas del conjunto $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ (tantas como sea posible).
- Observaciones:
  1. En la formulación del algoritmo JUMPII* queda establecido a priori el número máximo de componentes conexas de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$ que pueden ser continuadas. (En general no se conoce el número de componentes conexas de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$).
  2. Los valores $|t_A|$ y $|t_B|$ deben escogerse de modo que se pueda obtener un número suficientemente grande de componentes conexas de $\Sigma_{gc}|_{[t_A,t_B]}$. En [61] se ha supuesto en JUMPII que t_A y t_B satisfacen

     $$\left(\Sigma_{gc}^3 \cup \Sigma_{gc}^4\right) \cap \Sigma_{gc}|_{(-\infty,t_A)\cup(t_B,\infty)} = \emptyset$$
  3. Cuando JUMPII* se utiliza solamente para obtener la aproximación de un punto (cualquiera) $(x,1) \in \Sigma_{gc}$, entonces el procedimiento debe terminar al alcanzar el valor $t = 1$. Pero cuando se está interesado en aproximar el mayor número de puntos críticos generalizados del problema $P(1)$, o bien un mínimo local de $P(1)$ en el cual la función objetivo alcance el valor más pequeño, entonces no conviene suspender el procedimiento con la primera aparición del valor $t = 1$.

Capítulo 8

Aplicaciones de métodos de continuación en la optimización no lineal

8.1 Notas Introductorias

Consideremos el problema siguiente de optimización no lineal

$$(P) \quad \min\{f(x)|x \in M\} \tag{8.1}$$

donde

$$M := \{x \in I\!R^n | h_i(x) = 0, i \in I,\ g_j(x) \geq 0,\ j \in J\} \tag{8.2}$$

$I := \{1, \ldots, m\}$, $m < n$, $J := \{1, \ldots, s\}$, y $f, h_i, g_j \in C^3(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$.

Ahora nos referiremos al concepto muy conocido de inmersión (Ver por ejemplo [23], [24], [46], [47], [50] [61] [75] y las referencias ahí citadas):

Se elige un problema de optimización uniparamétrico

$$\tilde{P}(t) \quad \min\{f(y,t)|y \in \tilde{M}(t)\}, \quad t \in [0,1], \tag{8.3}$$

donde

$$\tilde{M}(t) := \{y \in I\!R^{\bar{n}} | h_i(y,t) = 0, i \in I,\ g_j(y,t) \geq 0,\ j \in \bar{J}\}$$

$n \leq \bar{n}$, $\bar{J}$ es un conjunto de índices finito con $J \subseteq \bar{J}$ y al menos las siguientes características:

(A1) Se conoce un mínimo local para $\tilde{P}(0)$ y los correspondientes multiplicadores de Lagrange son conocidos o fáciles de computar,

(A2) $\tilde{P}(t)$ posee un punto crítico generalizado (punto c.g.) para todo $t \in [0,1]$,

(A3) De un mínimo local (punto estacionario o punto c.g.) de $\tilde{P}(1)$ se obtiene fácilmente un mínimo local (punto estacionario o punto c.g.) de (P).

(A1) y (A2) son un mínimo de propiedades para encontrar una discretización de $[0,1]$:

$$0 = t_0 < \cdots < t_i < \cdots < t_N = 1 \tag{8.4}$$

y correspondientes

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{(A) minimos locales} \quad y(t_i) \text{ de } \tilde{P}(t_i), i = 1, \ldots, N \\ \text{o} & \\ & \text{(B) puntos estacionarios} \quad y(t_i) \text{ de } \tilde{P}(t_i), i = 1, \ldots, N \\ \text{o} & \\ & \text{(C) puntos c.g.} \quad y(t_i) \text{ de } \tilde{P}(t_i), i = 1, \ldots, N \end{array}\right\} \tag{8.5}$$

Se sugiere al lector encontrar una discretización de tal tipo con los métodos dados en el Capítulo 7. Desde luego, $\bar{n} = n$ y $J = \bar{J}$ es posible para algunas inmersiones, a saber

$$P_s(t) \quad \min\left\{ tf(x) + (1-t)\|x - x_0\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} h_i(x,t) = 0, i \in I, \\ g_j(x,t) \geq 0, j \in J \end{array} \right\}$$

donde las restricciones estan definidas por

$$\begin{aligned} h_i(x,t) &:= h_i(x) + (t-1)h_i(x^0) \;\; i \in I \\ g_j(x,t) &:= g_j(x) + (1-t) \mid g_j(x_0) \mid, \; j \in J, \end{aligned}$$

y $x^0 \in I\!R^n$ se ha escogido arbitrariamente.

Esta es la así llamada inmersión standard que será tratada en la Sección 8.3. Suponemos en este caso que las funciones satisfacen la condición $f, h_i, g_j \in C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)$. Con ello pueden ser utilizados los resultados dados en los Capítulos 6 y 7. De modo parecido podemos interpretar otros modelos (inmersiones o, en otras palabras, parametrizaciones) como métodos de penalización, métodos de penalización exacta y métodos de multiplicadores de Lagrange (ver [34], [23], [24], [50], [62], [69]).

Consideremos como ejemplo la inmersión de penalización cuadrática. Para ello tomemos como función objetivo en $\widetilde{P}(t)$ a

$$f_1(x,t) := f(x) + (\frac{t}{1-t})^2[\sum_{i\in I}(h_i(x))^2 + \sum_{j\in J}(\min\{g_j(x),0\})^2]$$

y definamos el problema paramétrico sin restricciones siguiente:

$$P_1(t) \quad \min\{f_1(x,t) \mid x \in I\!R^n\}, \quad t \in [0,1), \tag{8.6}$$

Nos encontramos así en la situación de una inmersión en $I\!R^n$. Sin embargo, esta inmersión posee las desventajas siguientes:

a) $f(x,t)$ es sólo una vez contínuamente diferenciable, es decir, una hipótesis importante de los capítulos 6 y 7 no se satisface.

b) Dado que el problema $P_1(1)$ no está definido, tampoco se satisface la condición (A3)

Naturalmente, también es posible formular nuestro problema, para la inmersión $P_1(t)$, de un modo diferente, a saber:

Encontrar una sucesión $\{t_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ con $t_k \in [0,1]$, $t_k < t_{k+1}$, t_k tendiendo a $t = 1$ así como los puntos correspondientes $x(t_k)$ (mínimos locales, puntos estacionarios o puntos c.g.) tales que $\lim_{t_k\to 1} x(t_k) = \hat{x}$ y $\hat{x}$ es al menos un punto c.g. de (P).

Sin embargo, tal tipo de desventajas pueden dejarse de lado, si en vez del problema $P_1(t)$, se considera el siguiente problema equivalente:

$$\tilde{P}_1(t) \quad \min\{f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 | (x,v,w) \in \tilde{M}_1(t)\}, t \in [0,1], \tag{8.7}$$

donde

$$\tilde{M}_1(t) := \left\{ (x,v,w) \in I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s \;\middle|\; \begin{array}{c} th_i(x) + (1-t)v_i = 0, i \in I \\ tg_j(x) + (1-t)w_j \geq 0, j \in J \end{array} \right\}$$

$\widetilde{P}_1(t)$ está definido también para $t = 1$ y $\widetilde{P}_1(1)$ es equivalente a (P).

La inmersión de penalización será tratada en la Seccion 8.2. Allí se considerará también la equivalencia entre $P_1(t)$ y $\widetilde{P}_1(t)$, para $t \in (0,1)$. Para los métodos de multiplicadores de Lagrange, de penalización exacta y de inmersión standard referimos al lector a la Sección 8.3 (Allí se encontrará un resumen de los resultados dados en [23], [24], [62], [63]).

Con relación a la inmersión de penalización $P_1(t)$ podemos responder a las preguntas siguientes:

(i) Cómo debe modificarse la inmersión de modo que:

a) Para $t = 0$ se conozca un mínimo global de Σ^1_{gc} (y los correspondientes multiplicadores de Lagrange), el cual sea punto de partida para una inmersión (aquí se trata de un afinamiento de la condición (A1)).

b) La condición (A2) se satisface o se deja precisar en el sentido de que exista un mínimo global para cada $t \in [0,1]$.

c) Las inmersiones son JJT-regular o KH-regular (ver Definición 6.23).

(ii) ¿ Cuáles singularidades pueden aparecer?

(iii) ¿ Bajo cuáles condiciones existe una curva en Σ_{stat} que "conecte $t = 0$ con $t = 1$" y cuán restrictivas son tales condiciones?

Además, se muestra que para dicha inmersión resulta útil introducir una condición de compactificación complementaria del tipo

$$\|x - x^0\|^2 - p \leq 0, \quad \|x - x^0\|^2 + \|w - w^0\|^2 - q \leq 0$$

donde p y q son suficientemente grandes. Lo anterior está relacionado con el problema de que al acercarnos a un valor $t = 1$ suceda que

$\|(v(t), w(t))\| \mapsto \infty$. Con esta restricción suplementaria, sin embargo, pueden aparecer nuevas singularidades, inclusive puntos de Tipo 4.

Para las inmersiones aquí consideradas valen las mismas afirmaciones hechas en el Capítulo 7, en el sentido de que, en el peor de los casos, debemos encontrar todas las componentes conexas para alcanzar $t = 1$. Finalmente, un análisis de los puntos de Tipo 4 muestra que puede aparecer una situación para la cual, precisamente, no conocemos un salto a otra componente conexa (Observar por ejemplo la sección 8.4 respecto a el problema de optimización global). Estas investigaciones proporcionan una visión más profunda de la dificultad del problema. A su vez, mediante una modificación de las inmersiones, surgen métodos nuevos con perspectivas mejores. Referimos al lector a la bibliografía complementaria siguiente, la cual está relacionada con los métodos tratados en este capítulo: [10], [11], [12], [25], [26], [35], [36], [37], [39], [42], [43], [49], [57], [58], [70], [77], [78], [90], [91], [92], [93], [94], [95], [109], [110], [118], [122], [123], [128], [131], [132], [134], [144], [145], [146],[147], [148], [149], [151], [165], [171], [172], [173], [174], [188], [192], [196], [198].

8.2 Inmersión de penalización

8.2.1 Aspectos generales.

Consideremos el problema de optimización no lineal

$$(P) \quad \min\{f(x) | h_i(x) = 0,\ i \in I,\ g_j(x) \geq 0,\ j \in J\}$$

y la correspondiente inmersión de penalización cuadrática clásica $P_1(t)$ definida en la Sección 8.1.

Definamos la siguiente modificación de la función $f_1(x, t)$ (utilizada en $P_1(t)$ en (8.6)):

$$\begin{aligned} f_2(x,t) \ &:= \ tf(x) + (1-t)(x-x^0)^\mathsf{T} A(x-x^0) + (\frac{t}{1-t})^2 [\sum_{i\in I} (h_i(x))^2 + \\ &\qquad + \sum_{j \in J} (\min\{g_j(x), 0\})^2] \end{aligned}$$

donde x^0 es un vector fijo de $\mathbb{R}^n$ y A es una matriz definida positiva. Consideremos seguidamente la correspondiente inmersión

$$P_2(t) \quad \min\{f_2(x,t)|x \in \mathbb{R}^n\},\ t \in [0,1), \tag{8.8}$$

La inmersión $P_2(t)$ persigue el propósito de obtener un mejor punto de partida en $t = 0$.

Para una mejor comprensión de la estructura de los conjuntos de puntos estacionarios de $P_1(t)$ (definida en (8.6)) utilizaremos la inmersión $\tilde{P}_1(t)$ propuesta en la introducción por (8.7). Igualmente para $P_2(t)$ consideramos el problema asociado siguiente definido sobre el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$:

$$\tilde{P}_2(t) \quad \min\{\tilde{f}_2(x,v,w,t)|(x,v,w) \in \tilde{M}_2(t)\},\ t \in [0,1] \tag{8.9}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(x,v,w,t) \ &:= \ tf(x) + (1-t)(x-x^0)^\top A(x-x^0) + \\ &\quad + \|v-v^0\|^2 + \|w-w^0\|^2 \end{aligned}$$

$$\tilde{M}_2(t) := \left\{ (x,v,w) \in \mathbb{R}^{n+m+s} \;\middle|\; \begin{array}{l} th_i(x) + (1-t)(v_i - v_i^0) = 0,\ i \in I \\ tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^0) \geq 0,\ j \in J \end{array} \right\}$$

y, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $v^0 \in \mathbb{R}^m$ y $w^0 \in \mathbb{R}^s$ son escogidos arbitrariamente.

Evidenciando la estrecha relación entre las distintas inmersiones definidas se establece el siguiente teorema.

Teorema 8.1
Los problemas $P_1(t)$ y $P_2(t)$ son equivalentes a $\tilde{P}_1(t)$ y $\tilde{P}_2(t)$, respectivamente, en el sentido siguiente:

(i) Si x es un punto estacionario (mínimo local, global) para $P_k(t)$, $k \in \{1,2\}$, $t \in (0,1)$, entonces (x,v,w) es un punto estacionario (mínimo local, global) para $\tilde{P}_k(t)$ con

$$\left.\begin{array}{rcl} v_i &=& \dfrac{t}{t-1}h_i(x),\ i\in I \\ w_j &=& \dfrac{t}{t-1}\min\{g_j(x),0\},\ j\in\ J \end{array}\right\} \textit{(para } k=1\textit{)}$$
$$\left.\begin{array}{rcl} v_i &=& v_i^0-\dfrac{t}{1-t}h_i(x),\ i\in I \\ w_j &=& w_j^0-\dfrac{t}{1-t}\min\{g_j(x),0\},\ j\in J \end{array}\right\} \textit{(para } k=2\textit{)} \qquad (8.10)$$

(ii) Si (x,v,w) es un punto estacionario (mínimo local, global) para $\tilde{P}_k(t)$ $k\in\{1,2\}$, $t\in(0,1)$, entonces x es un punto estacionario (mínimo local, global) para $P_k(t)$ y vale (8.10).

<u>Demostración:</u>

Probamos el teorema solamente para $P_2(t)$ y $\tilde{P}_2(t)$. La prueba con respecto a $P_1(t)$ y $\tilde{P}_1(t)$ se obtiene análogamente. Primero consideramos puntos estacionarios.

(i) Mostramos: Si x es un punto estacionario para $P_2(t)$, entonces (x,v,w) es un punto estacionario para $\tilde{P}_2(t)$ y vale (8.10). Ser x estacionario significa no mas que:

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& tDf(x)+2(1-t)A(x-x^0)+(\dfrac{t}{1-t})^2[2\sum\limits_{i\in I}h_i(x)Dh_i(x)+ \\ && +\sum\limits_{j\in J}D(\min\{g_j(x),0\})^2]. \end{array} \qquad (8.11)$$

Tomando en cuenta que $\sum_{j\in J}D(\min\{g_j(x),0\})^2=2\sum_{j\in J^-}g_j(x)Dg_j(x)$, donde $J^-:=\{j\in J|g_j(x)<0\}$, y definiendo los multiplicadores de Lagrange como:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_i &=& \dfrac{2}{1-t}(v_i-v_i^0),\ i\in I \\ \mu_j &=& \dfrac{2}{1-t}(w_j-w_j^0),\ j\in J \end{array}$$

unos pocos cálculos muestran que las condiciones de punto estacionario para $\tilde{P}_2(t)$ son satisfechas en (x,v,w) con v y w definidos por (8.10) *(ii)* Ahora probamos: Si (x, v, w) es un punto estacionario para $\tilde{P}_2(t)$, entonces v y w están definidos por (8.10) y x es un punto estacionario para $P_2(t)$.

Sea (x, v, w) un punto estacionario para $\tilde{P}_2(t)$. Entonces existen multiplicadores de Lagrange λ_i, $i \in I$, $\mu_j, j \in J$, tales que

$$tDf(x) + 2(1-t)A(x-x^0) - \sum_{i\in I} \lambda_i t Dh_i(x) - \sum_{j\in J} \mu_j t Dg_j(x) = 0, \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned}
2(v_i - v_i^0) - \lambda_i(1-t) &= 0, \quad i \in I, && (8.13)\\
2(w_j - w_j^0) - \mu_j(1-t) &= 0, \quad j \in J, && (8.14)\\
th_i(x) + (1-t)(v_i - v_i^0) &= 0, \quad i \in I, && (8.15)\\
tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^0) &\geq 0, \quad j \in J, && (8.16)\\
\mu_j &\geq 0, \quad j \in J && (8.17)\\
\sum_{j\in J} \mu_j(tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^0)) &= 0, && (8.18)
\end{aligned}$$

Ahora se considera aquellos j tales que (8.16) vale como igualdad. En tal caso

$$w_j = w_j^0 - \frac{t}{1-t} g_j(x) \quad (8.19)$$

y de (8.14) tenemos

$$\mu_j = -\frac{2t}{(1-t)^2} g_j(x) \quad (8.20)$$

lo cual, a causa de (8.17) implica $g_j(x) \leq 0$. Para aquellos j tales que (8.16) vale como desigualdad tenemos $\mu_j = 0$ debido a (8.18). Entonces, de (8.14) obtenemos $w_j - w_j^0 = 0$ y (8.16) conduce a $g_j(x) > 0$ porque $t > 0$. De todo esto se sigue

$$w_j = w_j^0 - \frac{t}{1-t} \min\{g_j(x), 0\}. \quad (8.21)$$

De la expresión anterior y de (8.15) se evidencia la validez de (8.10). De (8.14) y (8.21) se obtiene trivialmente que

$$\mu_j = -\frac{2t}{(1-t)^2} \min\{g_j(x), 0\} \quad (8.22)$$

Igualmente se concluye a partir de (8.13) y (8.15) que

$$\lambda_i = -\frac{2t}{(1-t)^2} h_i(x) \tag{8.23}$$

Sustituyendo (8.22) y (8.23) en (8.12) se verifica que x es un punto estacionario de $P_2(t)$.

En segundo lugar consideramos, para simplificar, solamente mínimos globales Ante todo notemos que si un punto (x, v, w) satizface las relaciones (8.10), entonces

$$f_2(x) = \tilde{f}_2(x, v, w)$$

(i) Sea $\hat{x}$ un mínimo global para $P_2(t)$, $t \in (0,1)$. Definiendo $\hat{v}$ y $\hat{w}$ a partir de (8.10) es fácil comprobar que $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w})$ es un punto admisible para $\tilde{P}_2(t)$. Sea $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \tilde{M}_2(t)$. Notemos que al fijar $(\tilde{x}, \tilde{v})$ el mínimo valor de $\tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{v}, w)$ sobre los puntos $(\tilde{x}, \tilde{v}, w) \in \tilde{M}_2(t)$ se alcanza cuando $\tilde{w}_j = w_j^0 - \frac{t}{1-t} \min\{g_j(\tilde{x}), 0\}$, $j \in J$. Pero incluso en ese caso tenemos que

$$\tilde{f}_2(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w}) = f_2(\hat{x}) \leq f_2(\tilde{x}) = \tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w})$$

debido a que $\hat{x}$ es un mínimo global para $P_2(t)$ y a que tanto $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w})$ como $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w})$ satizfacen (8.10).

(ii) Si $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w})$ es un mínimo global para $\hat{P}_2(t)$ resulta sencillo notar que se cumplen las relaciones (8.10). Sea $\tilde{x} \in I\!R^n$ cualquiera. Tomando $(\tilde{v}, \tilde{w})$ de forma tal que se satizfaga (8.10) obtenemos que $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w})$ pertenece a $\tilde{M}_2(t)$.

Como consecuencia tenemos que

$$f_2(\hat{x}) = \tilde{f}_2(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w}) \leq \tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w}) = f_2(\tilde{x})$$

Se concluye por tanto, que $\hat{x}$ es un mínimo global de $P_2(t)$. □

De la prueba del Teorema 8.1 concluímos immediatamente

Corolario 8.2
Si (x, v, w) es un punto estacionario para $\tilde{P}_k(t)$, $t \in [0, 1)$, $k \in \{1, 2\}$ se cumple que:

- $g_j(x) > 0, \ \forall j \in J \setminus \tilde{J}_0(x, v, w, t)$

- *Si* $j \in \tilde{J}_0(x,v,w,t)$ *y el correspondiente multiplicador* $\mu_j > 0$ *entonces* $g_j(x) < 0$

donde $\tilde{J}_0(x,v,w,t)$ *es el conjunto de índices activos en* (x,v,w,t) *del problema* $\tilde{P}_k(t)$*.*

Ahora asumimos que los problemas $\tilde{P}_k(t)$, $k \in \{1,2\}$ son JJT-regulares respecto a $(0,1)$ y nos planteamos qué tipo de singularidades puede aparecer. Sea

$$\widetilde{\Sigma}_{\text{stat}} = \left\{ (x,v,w,t) \in I\!R^{n+m+s+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (x,v,w,t) \text{ es un punto} \\ \text{estacionario para el} \\ \text{problema } \tilde{P}_1(t) \text{ y } \tilde{P}_2(t), \text{ resp.} \end{array} \right\}$$

$\widetilde{\Sigma}^l_{\text{stat}}$, $l \in \{1,2,3,4,5\}$ denotan a los conjuntos de puntos de diferentes tipos y $\widetilde{\Sigma}^l_{\text{stat}}|_{(0,1)}$ se entiende como la intersección de $\widetilde{\Sigma}^l_{\text{stat}}$ con el conjunto $I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s \times (0,1)$.

Corolario 8.3
Si $\tilde{P}_k(t)$*,* $k \in \{1,2\}$ *es JJT-regular respecto a* $(0,1)$ *entonces*

(a) $\widetilde{\Sigma}_{\text{stat}}|_{(0,1)} = \widetilde{\Sigma}^1_{\text{stat}}|_{(0,1)} \cup \widetilde{\Sigma}^2_{\text{stat}}|_{(0,1)} \cup \widetilde{\Sigma}^3_{\text{stat}}|_{(0,1)}$

(b) $(x,v,w,t) \in \widetilde{\Sigma}^2_{\text{stat}}|_{(0,1)}$ *si y solo si* $g_j(x) = 0$ *exactamente para un* $j \in J$*.*

Demostración:
Debido a que para ambos problemas $\tilde{P}_k(t)$, $k \in \{1,2,\}$ las derivadas parciales respecto a las variables (v,w) de las restricciones forman un múltiplo distinto de cero de la matriz identidad se obtiene que en ambos problemas siempre se cumple la condición de regularidad LICQ. Como consecuencia obtenemos (a).

Por otra parte, segun el Corolario 8.2 para comprobar (b) basta demostrar que si $\mu_j = 0$ para $j \in \tilde{J}_0(x,v,w,t)$ entonces $g_j = 0$. Pero esto es una consecuencia de (8.22). $\Box$

Puesto que la regularidad según JJT requiere un grado mayor de diferenciabilidad de las funciones no tiene sentido considerar el problema correspondiente $P_k(t)$, $k \in \{1,2\}$, bajo esta hipótesis. Para estudiar mejor las relaciones entre los correspondientes tipos de puntos en estos problemas, introducimos los conjuntos siguientes para un punto estacionario dado $\tilde{x}$ de $P_k(\tilde{t})$, $k \in \{1,2\}$:

$$\begin{aligned} J^+ &:= J^+(\tilde{x}) = \{j \in J | g_j(\tilde{x}) \geq 0\}, \\ J^- &:= J^-(\tilde{x}) = \{j \in J | g_j(\tilde{x}) < 0\}. \end{aligned}$$

Definiendo para $t \in I\!R \backslash \{1\}$ los problemas

$$P_1^{J^-}(t) \quad \min \left\{ f(x) + (\frac{t}{1-t})^2 [\sum_{i \in I} (h_i(x))^2 + \sum_{j \in J^-} (g_j(x))^2] \middle| x \in I\!R^n \right\},$$

y

$$P_2^{J^-}(t) \quad \min \left\{ \begin{array}{c} tf(x) + (1-t)(x-x^0)^\top A(x-x^0) + \\ +(\frac{t}{1-t})^2 [\sum\limits_{i \in I} (h_i(x))^2 + \sum\limits_{j \in J^-} (g_j(x))^2] \end{array} \middle| x \in I\!R^n \right\},$$

se cumple obviamente que si $\tilde{x}$ de $P_k(\tilde{t})$, $k \in \{1,2\}$ entonces $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in {}^{J^+}\Sigma_{\text{stat}}$ donde

$${}^{J^-}\Sigma_{\text{stat}} = \left\{ (x,t) \in I\!R^{n+1} \middle| \begin{array}{c} x \text{ es un punto estacionario del problema} \\ P_1^{J^-}(t) \text{ y } P_2^{J^-}(t), \text{ resp.} \end{array} \right\}$$

Ahora sea $\tilde{x}$ un punto estacionario no degenerado para $\tilde{P}_k^{J^-}(\tilde{t})$, $k \in \{1,2\}$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función contínuamente diferenciable $x : U_\varepsilon(\tilde{t}) \to I\!R^n$ ($U_\varepsilon(\tilde{t}) = (t_1, t_2)$ con $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$) tal que $x(t)$ es un punto estacionario no degenerado de $\tilde{P}_k^{J^-}(\tilde{t})$ para todo $t \in U_\varepsilon(\tilde{t})$. En caso de que exista un $\hat{t} \neq \tilde{t}$ y $x(\hat{t})$ es un punto estacionario no degenerado tal que

(i) $g_j(x(\hat{t})) = 0$ para cierto $j \in J^-$ (resp. para cierto $j \in J^+$),

(ii) $g_j(x(t)) < 0$ para todo $j \in J^-$ y para cada $t \in (\tilde{t}, \hat{t})$ (si asumimos que $\tilde{t} < \hat{t}$)
(resp. $g_j(x(t)) < 0$ para $t \in (\hat{t}, \hat{t} + \delta)$, δ suficientemente pequeño),

entonces J^- se cambiará por $J^-(x(\hat{t}))$ (respectivamente se utilizará

$$J^- \cup \left\{ j \in J^+ \middle| \begin{array}{c} g_j(x(\hat{t})) = 0, \; g_j(x(t)) < 0 \;\; \text{para} \;\; t \in (\hat{t}, \hat{t} + \delta), \\ \delta > 0 \;\; \text{suficientemente pequeño} \end{array} \right\}$$

en vez de J^-).

De esta forma obtenemos una sucesión de problemas del tipo $P_k^{J^-}(t)$, es decir, el método de penalización original ha de generar tal sucesión. El cambio de los conjuntos índice J^- puede ser controlado fácilmente. Asociados a $P_1^{J^-}(t)$ y $P_2^{J^-}(t)$ respectivamente introducimos de manera similar a los casos anteriores los problemas siguientes (definidos para $t \in I\!R$)

$$\tilde{P}_1^{J^-}(t) \quad \min\{f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 | (x, v, w) \in M_1^{J^-}(t)\}$$

donde

$$M_1^{J^-}(t) := \left\{ (x, v, w) \in I\!R^{n+m+|J^-|} \;\middle|\; \begin{array}{l} th_i(x) + (1-t)v_i = 0, \;\; i \in I \\ tg_j(x) + (1-t)w_j = 0, \;\; j \in J^- \end{array} \right\}$$

y

$$\tilde{P}_2^{J^-}(t) \;\; \min\left\{ \tilde{f}_2^{J^-}(x, v, w, t) \;\middle|\; \begin{array}{l} th_i(x) + (1-t)(v_i - v_i^0) = 0, \;\; i \in I, \\ tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^0) = 0, \;\; j \in J^- \end{array} \right\}$$

donde

$$\tilde{f}_2^{J^-}(x, v, w, t) := tf(x) + (1-t)(x - x^0)^\top A(x - x^0) + \|v - v^0\|^2 + \|w - w^0\|^2,$$

Estos problemas son equivalentes a $P_1^{J^-}(t)$ y $P_2^{J^-}(t)$, respectivamente, en el sentido del Teorema 8.4 *(i)* y *(ii)*.

Teorema 8.4

(i) Si x es un punto estacionario (mínimo local, global) para $P_k^{J^-}(t)$, $k \in \{1, 2\}$, $t \neq 1$, entonces (x, v, w) es un punto estacionario (mínimo local, global) para $\tilde{P}_k^{J^-}(t)$ con

$$\begin{array}{rcll} v_i &=& \dfrac{t}{t-1} h_i(x), \;\; i \in I & \\ & & & \textit{(para } \tilde{P}_1^{J^-}(t)\textit{)} \\ w_j &=& \dfrac{t}{t-1} g_j(x), \;\; j \in \; J^- & \\ v_i &=& v_i^0 - \dfrac{t}{1-t} h_i(x), \;\; i \in I & \\ & & & \textit{(para } \tilde{P}_2^{J^-}(t)\textit{)} \\ w_j &=& w_j^0 - \dfrac{t}{1-t} g_j(x), \;\; j \in J^- & \end{array} \tag{8.24}$$

(ii) Si (x, v, w) es un punto estacionario (mínimo local, global) para $\tilde{P}_k^{J^-}(t)$, $k \in \{1, 2\}$, $t \neq 1$, entonces x es un punto estacionario (mínimo local, global) para $P_k^{J^-}(t)$ y vale (8.24).

(iii) x es un punto estacionario de Tipo l ($l \in \{1, 3\}$) para $P_k^{J^-}(t)$, $k \in \{1, 2\}$, $t \neq 1$ si y solo si (x, v, w) es un punto estacionario de Tipo l ($l \in \{1, 3\}$) para $\tilde{P}_k^{J^-}(t)$.

Demostración:
(i) y (ii) se siguen del Teorema 8.1.
Todas las propiedades de los puntos de Tipo 1 y Tipo 3 excepto la no singularidad (singularidad) de la Hessiana de la función de Lagrange se demuestran análogamente al Teorema 8.1. La Hessiana $D_x^2 F(x, t)$ de $P_2^{J^-}(t)$ es la siguiente

$$\begin{aligned} D_x^2 F(x, t) &= tD^2 f(x) + 2(1-t)A + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \Big[\sum_{i \in I} D^2(h_i(x)^2) + \\ &\quad + \sum_{j \in J^-} D^2(g_j(x)^2)\Big] \\ &= H(x, \lambda, \mu, t) + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \Big[\sum_{i \in I} D^\top h_i(x) D h_i(x) + \\ &\quad + \sum_{j \in J^-} D^\top g_j(x) D g_j(x)\Big], \end{aligned}$$

donde

$$H(x, \lambda, \mu, t) := tD^2 f(x) + 2(1-t)A - \sum_{i \in I} t\lambda_i D^2 h_i(x) - \sum_{j \in J^-} t\mu_j D^2 g_j(x)$$

y $\lambda_i = -\frac{2t}{(1-t)^2} h_i(x)$, $i \in I$, $\mu_j = -\frac{2t}{(1-t)^2} g_j(x)$, $j \in J^-$, son los correspondientes multiplicadores de Lagrange para $\tilde{P}_2^{J^-}(t)$.

La Hessiana $D^2_{(x,v,w)} \tilde{L}(x, v, w, t)$ de $\tilde{P}_2^{J^-}(t)$ es la matriz siguiente

$$D^2_{(x,v,w)} \tilde{L} = \begin{pmatrix} H(x, \lambda, \mu, t) & 0 & 0 \\ 0 & 2I^m & 0 \\ 0 & 0 & 2I^{|J^-|} \end{pmatrix},$$

donde I^m y $I^{|J^-|}$ son las matrices correspondientes de dimensión m y $|J^-|$, respectivamente.

Por lo tanto

$$D^2_{(x,v,w)}\tilde{L}|_{T(x,v,w)} = D^2_x F(x,t),$$

donde $T(x,v,w)$ es el espacio tangente, para $\tilde{P}_2^{J^-}(t)$, en (x,v,w). Esto conduce a la proposición (iii). $\square$

Ahora consideramos puntos $(\bar{x},\bar{v},\bar{w},\bar{t}) \in \widetilde{\Sigma}^2_{\mathrm{stat}}|_{(0,1)} \cup \widetilde{\Sigma}^3_{\mathrm{stat}}|_{(0,1)}$.

Teorema 8.5

Asumimos que $\tilde{P}_k(t)$, $k \in \{1,2\}$, es JJT-regular respecto a $(0,1)$.

a) Sea $(\bar{x},\bar{v},\bar{w},\bar{t}) \in \tilde{\Sigma}^2_{\mathrm{stat}}|_{(0,1)}$. Entonces existen un número $\gamma > 0$, conjuntos de índices J^-_ν univocamente determinados y funciones

$$(x^{J^-_\nu}, v^{J^-_\nu}, w^{J^-_\nu}, \lambda^{J^-_\nu}, \mu^{J^-_\nu}) \in C^2((\bar{t}-\gamma,\bar{t}+\gamma), I\!R^n \times I\!R^{2m} \times I\!R^{2|J^-_\nu|}), \tag{8.25}$$

$\nu = 1,2$, también univocamente determinadas, con las propiedades siguientes:

(i) $(x^{J^-_\nu}(t), v^{J^-_\nu}(t), w^{J^-_\nu}(t), \lambda^{J^-_\nu}(t), \mu^{J^-_\nu}(t))$ es un punto estacionario de $\tilde{P}_k^{J^-_\nu}(t)$ para cada $t \in (\bar{t}-\gamma,\bar{t}+\gamma)$

(ii) $x^{J^-_1}(\bar{t}) = x^{J^-_2}(\bar{t}) = \bar{x}$

(iii) $J^-_2 = J^-_1 \cup \{j_0\}$, donde $j_0 \in J$ está determinado unívocamente por $g_{j_0}(\bar{x}) = 0$.

(iv) $\lambda^{J^-_1}(\bar{t}) = \lambda^{J^-_2}(\bar{t})$ y

$$\mu_j^{J^-_2}(\bar{t}) = \begin{cases} \mu_j^{J^-_1}(\bar{t}), & j \in J_1^+ \\ 0, & j = j_0 \end{cases}$$

(v) $x^{J^-_\nu}(t)$ es un punto estacionario no degenerado para $P_k^{J^-_\nu}(t)$ para cada $t \in (\bar{t}-\gamma,\bar{t}+\gamma)$.

b) Sea $(\bar{x},\bar{v},\bar{w},\bar{t}) \in \hat{\Sigma}^l_{\mathrm{stat}}|_{(0,1)}$, $l \in \{1,3\}$. Entonces existe un conjunto de índices único J^-_0 con las propiedades siguientes:

(i) $g_j(\bar{x}) < 0$, $j \in J^-_0$, $g_j(\bar{x}) > 0$, $j \in J \backslash J^-_0$

$$\begin{array}{rcl}\bar{t}g_j(\bar{x}) + (1-\bar{t})\bar{w}_j &=& 0, j \in J_0^- \\ \bar{t}g_j(\bar{x}) + (1-\bar{t})\bar{w}_j &>& 0, j \in J \backslash J_0^-\end{array} \qquad para\ \tilde{P}_1(t)$$

$$\begin{array}{rcl}\bar{t}g_j(\bar{x}) + (1-\bar{t})(\bar{w}_j - \bar{w}_j^0) &=& 0, j \in J_0^- \\ \bar{t}g_j(\bar{x}) + (1-\bar{t})(\bar{w}_j - \bar{w}_j^0) &<& 0, j \in J \backslash J_0^-\end{array} \qquad para\ \tilde{P}_2(t)$$

(ii) $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t})$ *es un punto de Tipo l para* $\tilde{P}_k^{J_0^-}(\bar{t})$

(iii) $(\bar{x}, \bar{t})$ *es un punto de Tipo l para* $P_k^{J_0^-}(\bar{t})$.

Demostración:
a) se obtiene a partir de la estructura local de Σ_{gc} y Σ_{stat} alrededor de un punto de tipo, descrita en la sección 6.1, y teniendo en cuenta las conclusiones del Teorema 8.4.
b) se sigue del Corolario 8.2 y de las propiedades de los puntos de Tipo 3 (ver tambien la sección 6.1). □

Con base en este teorema podemos definir también puntos de Tipo 1,2,3 para el problema $P_k(t)$, $k \in \{1, 2\}$. Como ya se ha indicado con antelación, el problema $P_k(t)$ no puede ser, formalmente, JJT-regular.

Definición 8.6

a) Si un punto estacionario x *de* $P_k(t)$, $k \in \{1, 2\}$ *tiene las propiedades a) (ii), (iii), (iv), (v) del Teorema 8.5,* (x, t) *se denomina un punto de Tipo 2.*

b) Si un punto estacionario x *de* $P_k(t)$, $k \in \{1, 2\}$ *tiene las propiedades b) (i), (iii),* (x, t) *se denomina un punto de Tipo l,* $l = 1, 3$.

El comportamiento típico, alrededor de un punto de Tipo 2, perteneciente a un camino en Σ_{stat}, queda descrito en la Figura 8.1. El comportamiento típico alrededor de un punto de Tipo 3 está ilustrado en la Figura 8.2.

Una consecuencia directa del Teorema 8.5 y de la Definición 8.6 la ofrece el corolario siguiente:

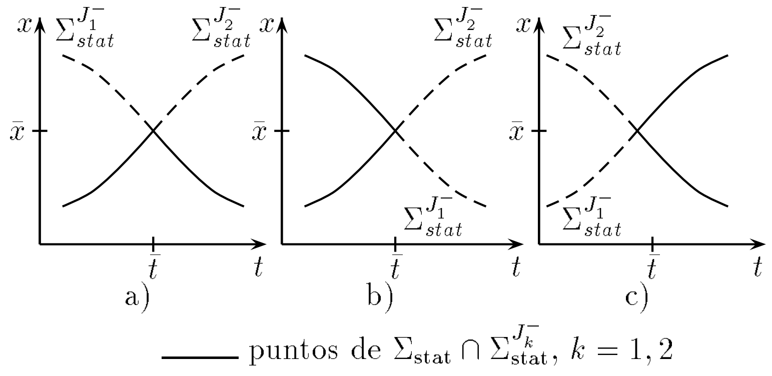


Figura 8.1: Puntos de Tipo 2.

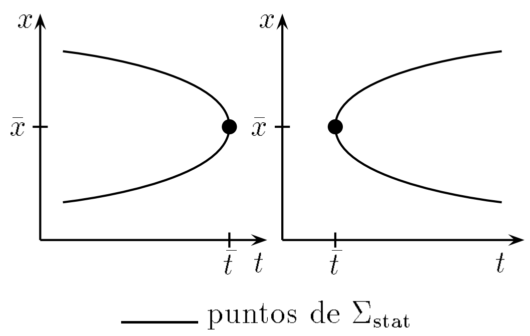


Figura 8.2: Puntos de tipo 3.

Corolario 8.7
$(x,t) \in \Sigma^l_{\text{stat}}|_{(0,1)}$ *si y solo si* $(x,v,w,t) \in \tilde{\Sigma}^l_{\text{stat}}|_{(0,1)}$, $l \in \{1,2,3\}$.

Nuestro análisis conduce así a las primeras consecuencias para métodos de penalización:

Observación 8.8

(i) *Con respecto a los puntos de Tipo 2 vale: El método de penalización clásico funciona (para t creciente) en la situación a) de la Figura 8.1 y se detiene en la situación b). La situación c) no puede aparecer. Observamos que la situación b) está excluída en el caso convexo.*

(ii) *Con respecto a los puntos de Tipo 3 vale: El método de penalización clásico se detiene. Asumimos que se comienza con un mínimo local y se camina a lo largo de un camino de mínimos locales x^k de $P^{J^-}(t_k)$ y que aparece un punto de Tipo 3. Sea $\gamma(x^k,t_k)$ el valor propio mínimo de la Hessiana de la función objetivo de $P^{J^-}(t)$ y $\Gamma(x^k,t_k)$ el valor propio máximo. Entonces tenemos*
$$\frac{\Gamma(x^k,t_k)}{\gamma(x^k,t_k)} > 0 \quad \textit{para} \quad t_k < \bar{t},$$
pero vale
$$\lim_{t_k \to \bar{t}} \frac{\Gamma(x^k,t_k)}{\gamma(x^k,t_k)} = +\infty.$$
Esta es exactamente la situación descrita, por ejemplo, en [10] para problemas mal condicionados. Naturalmente, tal situación queda excluída en el caso convexo.

(iii) *Si aparecen puntos de retorno de Tipo 2 o puntos de Tipo 3, entonces debemos saltar a otra componente conexa en $\sum_{stat}$ (ver Capítulo 7). Anotamos que en el peor caso debemos encontrar todas las componentes conexas.*

Observación 8.9
El análisis de los problemas $\tilde{P}_k(t)$, $k \in \{1,2\}$ es más sencillo que el de los problemas $P_k(t)$, $k \in \{1,2\}$, debido fundamentalmente a que los

problemas $\tilde{P}_k(t)$, a diferencia de los problemas $P_k(t)$, estan descritos por funciones de clase $C^3(I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s \times I\!R, I\!R)$.

Debe señalarse, sin embargo, que al considerar los problemas $\tilde{P}_k(t)$ en lugar de $P_k(t)$ estamos aumentando la complejidad en otro sentido. De hecho, por ejemplo, el número de variables de incrementa en $m+s$.

Si consideramos en lugar de los problemas $P_k(t)$ una sucesión de problemas de la forma $P_k^{J_\nu^-}(t)$ tenemos entonces la ventaja de que las funciones que describen estos últimos pertenecen a la clase $C^3(I\!R^n \times I\!R, I\!R)$. La dificultad en la consideración anterior es que los problemas de la forma $P_k^{J_\nu^-}(t)$ no están definidos para el valor $t = 1$. Podemos utilizar algoritmos basados en continuación de curvas como los explicados en el capítulo 7 solo hasta una vecindad de $t = 1$. Al llegar a puntos cercanos el hiperplano $t = 1$ debemos tomar los problemas del tipo $\tilde{P}_k(t)$. Podemos con esta estrategia aprovechar al máximo las ventajas que nos brinda una formulación del tipo $\tilde{P}_k(t)$ y ahorrarnos a la vez en la mayor medida las incomodidades inherentes a la dicha formulación.

Observación 8.10 *(Consideraciones sobre la condición (A1))*

(i) (con respecto a $P_1^{J^-}(0)$ y $\tilde{P}_1^{J^-}(0)$) asumimos que existe un punto estacionario (no degenerado) x^0 de $f(x)$. Entonces x^0 es también un punto estacionario (no degenerado) de $P_1^{J^-}(0)$. Sea x^o no degenerado. Usando el Teorema 8.5 $(x^0, 0, 0)$ es un punto estacionario no degenerado de $\tilde{P}_1^{J^-}(0)$. Si x^0 es un mínimo local o incluso un mínimo global tenemos una relación similar (Ver Teorema 8.4). Además, los multiplicadores de Lagrange correspondientes son conocidos, a saber, $\lambda_i^0 = 0$, $i \in I$ y $\mu_j^0 = 0$, $j \in J^-$.

(ii) (con respecto a $P_2^{J^-}(0)$ y $\tilde{P}_2^{J^-}(0)$). Sea A positiva definida. Entonces x^0 y (x^0, v^0, w^0) son los mínimos globales y el único punto estacionario de $P_2^{J^-}(0)$ y $\tilde{P}_2^{J^-}(0)$, respectivamente. Además, estos puntos son no degenerados y los multiplicadores de Lagrange correspondientes son los mismo que en (i). Desde este punto de vista, le damos preferencia a estas inmersiones.

Observación 8.11 *(Consideraciones sobre la condición (A2))* *(i) (con respecto a $P_1(t)$ y $\tilde{P}_1(t)$). Debemos asumir que existe un mínimo global $\hat{x}$ de $f(x)$. Entonces tenemos que*

$$f(\hat{x}) \leq f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2$$

para todo $(x, v, w) \in I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s$. Consideramos el problema $\tilde{P}^{J^-}(t)$. Entonces

$$\inf\{f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 | (x, v, w) \in \tilde{M}_1(t)\} \geq f(\hat{x}) \quad \forall\, t \in [0, 1] \tag{8.26}$$

donde $\tilde{M}_1^{J^-}(t)$ es un conjunto factible de $\tilde{P}^{J^-}(t)$. Utilizando la estructura especial de $\tilde{M}_1^{J^-}(t)$ encontramos fácilmente un punto $\tilde{x}$ de $\tilde{M}_1^{J^-}(t)$ que alcanza el infimo en (8.26). Desde luego, $\tilde{x}$ es el mínimo global de $\tilde{P}_1^{J^-}(t)$ y el mínimo global de $\tilde{P}_1(t)$. Utilizando el Teorema 8.1 vemos que $P_1(t)$ tiene un mínimo global para todo $t \in [0, 1)$.

(ii) (con respecto a $P_2(t)$ y $\tilde{P}_2(t)$). Obtenemos resultados análogos a (i) para $P_2(t)$ y $\tilde{P}_2(t)$ bajo la hipótesis adicional de que el problema original (P) tenga un mínimo global.

Ejemplo 8.12

Ahora consideramos un ejemplo que posee una función restricción "realmente no convexa" (ver Figura 8.3), es decir $g(x)$ tiene mínimos y máximos locales).

$$\begin{aligned} g(x) \;=\; & 0.0265073509x^8 - 0.211505207x^7 + \\ & +0.25753848x^6 + 1.34579642x^5 - 2.34222067x^4 - \\ & -2.65029635x^3 + 3.45664738x^2 + 0.91447716x + 5 \end{aligned}$$

y una función objetivo estrictamente convexa $f(x) := (x + 4)^2$. Deseamos encontrar un punto estacionario de

$$\text{(P)} \quad \min\{f(x) | g(x) \leq 0\}$$

utilizando la inmersión

$$\tilde{P}_1(t) \quad \min\{f(x) + w^2 | tg(x) + (1 - t)w \leq 0\}.$$

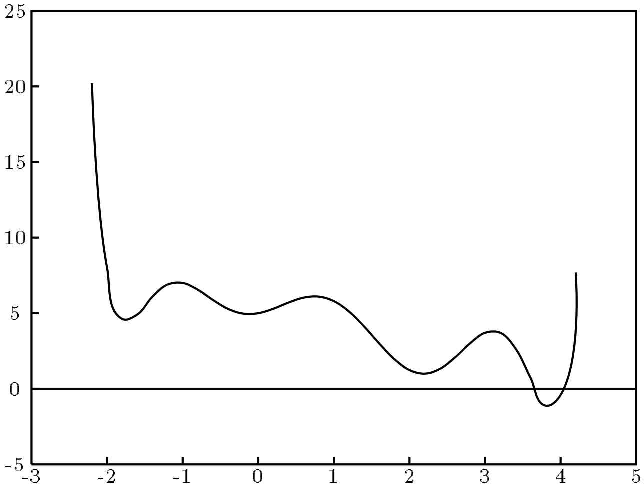


Figura 8.3: Función restricción "realmente no convexa".

Aunque el ejemplo es sencillo, ilustrará la estructura típica del conjunto $\tilde{\Sigma}_{\text{gc}}|_{[0,1]}$ con tal tipo de restricciones (Ver Figuras 8.4 - 8.6) Este ejemplo utiliza la inmersión $\tilde{P}_1(t)$ como puede observarse a partir de la función objetivo paramétrica seleccionada. Para $t = 0$ el mínimo global $(x^0, w^0) = (-4, 0)$ es el único punto crítico de $\tilde{P}_1(0)$.

En la Figura 8.4 queda descrita la proyección del conjunto $\widetilde{\Sigma}_{\text{gc}}|_{[0,1]}$ sobre la variable x, mientras que la Figura 8.5 muestra las proyecciones de las diversas ramas de $\Sigma_{\text{gc}}|_{[0,1]}$ sobre el w-espacio.

Las 4 ramas presentadas en la Figura 8.4 están compuestas de puntos estacionarios. La rama que comienza en el punto $(-4, 0)$ consiste completamente de mínimos locales. En cada una de las otras 3 ramas que se delinean en la Figura 8.4 se tiene un punto de tipo 3. Para cada una de estas 3 ramas la estructura es la misma, pues en cada una de ellas la curva que parte del punto de tipo 3 y se acerca a $t = 1$ mediante valores crecientes de x es una curva de mínimos locales, en cambio la otra curva que parte del punto de tipo 3 es solo de puntos de ensilladura.

Notemos que la rama que contiene al punto de partida $(t^0, x^0, w^0) =$

$(0, -4, 0)$ no es la que alcanza el valor $t = 1$ en la solución $(\tilde{x}, \tilde{w}) \approx (3.670154, 0)$. La rama que logra alcanzar la solución a través de su curva de mínimos locales es la ultima (la de valores mas altos de x) de las 4 ramas presentes en la Figura 8.4.

El comportamiento de la w-sección de las diversas ramas es el de mayor interés. Como podemos notar en la Figura 8.4 todas las curvas (sean de minimos locales o de puntos de ensilladura) de cada una de las 4 ramas poseen un límite en la componente x. Excepto para la última de estas curvas, que realmente alcanza la solución, todas las demas componentes x de dichas curvas se acercan a puntos que son extremos locales no factibles de la función restricción g. Observando la Figura 8.5 notamos que la componente $w(t)$ de cada una de estas curvas tiende a $-\infty$ al acercarnos a $t = 1$. En el caso de la curva que alcanza la solución puede observarse en la Figura 8.5 como su proyección sobre la componente w no tiende a $-\infty$ sino al valor $w = 0$. Las distintas ramas en ambas figuras 8.4 y 8.5 pueden ser identificadas con facilidad notando que los tres puntos de tipo 3 (uno por cada rama, excapto la rama inicia) poseen valores distintos de la componente t. Así la rama que alcanza la solución $(\tilde{x}, \tilde{w}) \approx (3.670154, 0)$ posee al punto de tipo 3 con componente t mas cercana a 1 (observar figuras 8.4 y 8.5). (Nótese que las figuras 8.4 y 8.5 fueron generadas (al igual que la Figura 7.2 de el anterior capítulo) usando el programa PAFO y debido a ello, como se indicó en la introducción, aparecen términos en inglés y términos al margen de la figura. Todos los ejemplos numéricos de este capítulo fueron generados utilizando la misma técnica, es por ello que en esta capítulo se tienen 20 figuras con la mencionada incoherencia.)

El anterior comportamiento se refleja sobre la inmersion equivalente $P_1(t)$ en la medida que el término penalizador tiende a infinito y no podemos encontrar un punto crítico de (P).

Observamos que el método de penalización que comienze en el punto $(x^0, w^0) = (-4, 0)$ seguirá la primera de las 4 ramas de la Figura 8.4. La compontente w de dicha rama tendra la forma reflejada en la Figura 8.6 y por tanto el método de penalización original no podrá encontrar siquiera un punto factible de (P) (recordemos que la variable w expresa al término de penalización). De acuerdo a lo analizado hasta el momento podemos inducir que el método de penalización original, para t

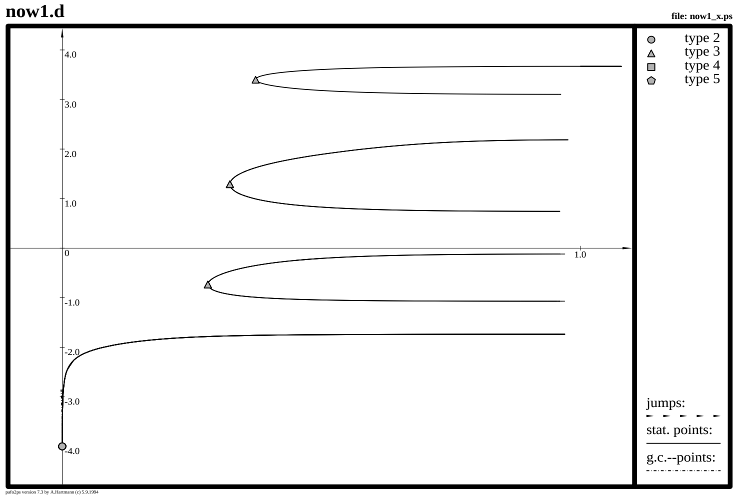


Figura 8.4: Proyección de $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{[0,1]}$ sobre (x,t)

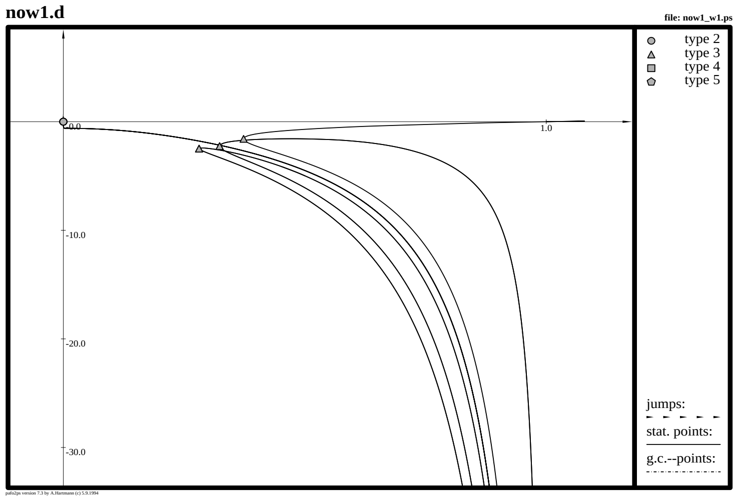


Figura 8.5: Proyección de $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{[0,1]}$ sobre (w,t)

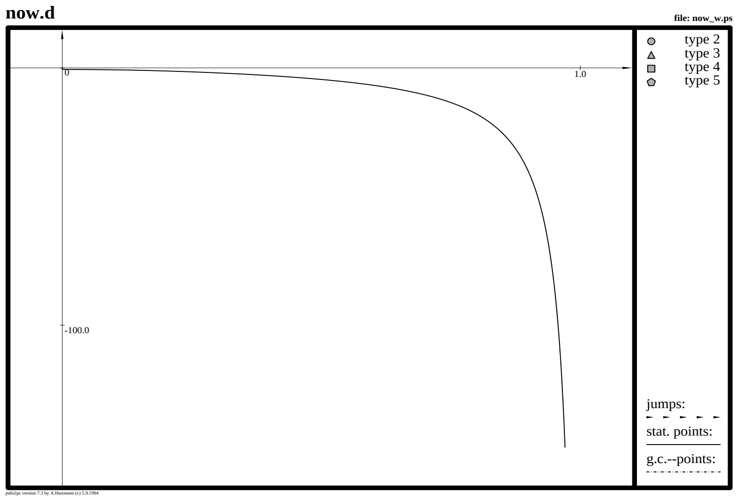


Figura 8.6: Proyección sobre (w, t) de la rama inicial de la Figura 8.4

creciente, solo será exitoso cuando partamos cerca de la ultima rama de la Figura 8.4 que es en realidad la única que guia a una solucion factible.

Asumamos que se posee un punto de partida cercano a la rama que guia a la solución, pero que dicho punto descansa sobre la curva de dicha rama que consta de puntos estacionarios de $P_1(t)$. Las anteriores observaciones sobre el comportamiento de w sobre cada una de las dos curvas de dicha rama nos indica que debemos seguir primeramente la ultima rama para t decreciente y despues de sobrepasar el correspondiente punto de retorno de tipo 3, entonces podemos continuar dicha curva para valores crecientes de t. Dicho a la ligera, aún y cuando tengamos un punto de partida sobre una rama que nos pueda llevar al al optimo la forma en la cual realizemos la continuacion interviene decisivamente en el éxito del proceso. Tomando en cuenta que el método de penalización original se concentra sólo en cálculos con valores crecientes de t podemos afirmar basandonos en el anterior ejemplo que el método de penalización solamente amplía la región de convergencia. Desde luego, no conocemos, en general, ningún punto de partida en la región ampliada de convergencia. Resumimos lo anterior en la siguiente

Observación 8.13

(i) Puede aparecer la siguiente dificultad: El término $\|(v(t), w(t))\|$ tiende a $+\infty$ si seguimos una rama de mínimos locales para t tendiendo a 1. De hecho, no encontramos un punto crítico de (P) siguiendo esta rama. El enfoque de penalización solamente ha ampliado la región de convergencia pero allí no conocemos ningún punto de partida.

(ii) El Ejemplo 8.12 también muestra que aquí los algoritmos JUMP I y JUMP II (Ver Capítulo 7) no son exitosos, porque no disponemos de ninguna situación que nos permita saltar a otra componente conexa en Σ_{stat} si comenzamos en la rama que contiene al punto $(-4, 0)$.

Estas observaciones nos conducen a otra modificación de la inmersión de penalización a través de una compactificación.

Observación 8.14
Analizemos si un cambio del punto x^0 en la inmersión $\tilde{P}_2(t)$ es una herramienta adecuada para superar las dificultades arriba consideradas. Para este propósito elaboramos una modificación del Ejemplo 8.12, ahora dotado con la función objetivo

$$tf(x) + (1-t)(x - x^0)^2 + w^2, \quad f(x) = x.$$

La Figura 8.7 describe la x-sección de las ramas en $\widetilde{\Sigma}_{\text{stat}}$ que emanan de los puntos $(x, w) = (x^0, 0)$ para diferentes valores de x^0, es decir, para diferentes inmersiones del problema. Observamos que, excepto para x^0 escogido en una vecindad pequeña de la solución, estas ramas exhiben el mismo comportamiento que la rama primera de la Figura 8.4, es decir, para t acercandose al valor 1, $x(t)$ tiende a un punto donde la derivada de g se anula y $w(t)$ tiende a $-\infty$.
Esta observación clarifica el hecho de que un cambio del punto de partida x^0 no mejora la situación, en general, cuando se intenta alcanzar $t = 1$.

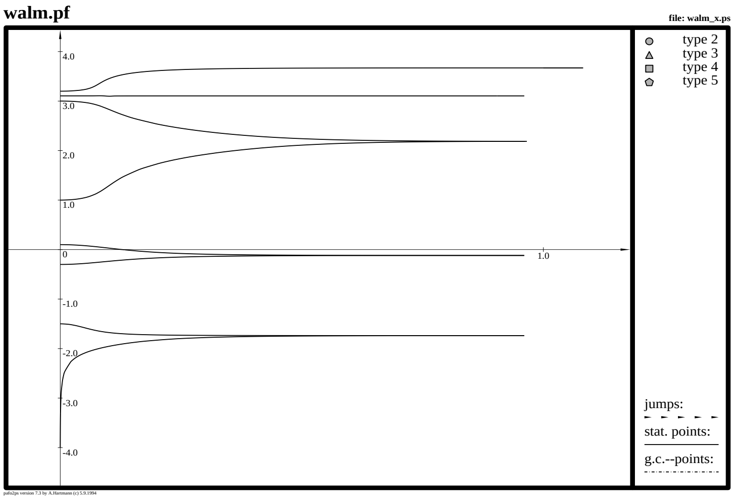


Figura 8.7: Ejemplo 8.12 con distintos puntos de partida x^0.

Antes de dedicarnos a analizar en la siguiente sección variantes compactificadas de las inmersiones $\tilde{P}_k$, $k \in \{1,2\}$ deseamos analizar la hipótesis de JJT-regularidad para estas inmersiones. Tanto en el Corolario 8.3 como en el Teorema 8.5 se ha supuesto que los problemas paramétricos $\tilde{P}_k$, $k \in \{1,2\}$ son JJT-regulares respecto a $(0,1)$. Esta hipótesis es básica para el análisis de el comportamiento de métodos de continuación con saltos, en tanto se conoce la estructura local de el conjunto $\tilde{\Sigma}_{gc}$. En el Capítulo 6, en el Teorema 6.25 se ha concluido que el conjunto de problemas paramétricos que son JJT-regulares (denotado por $\mathcal{F}$) es un conjunto abierto y denso para la C_s^3-topología. Esta conclusión nos permite tener cierta certeza acerca de que la JJT-regularidad es una hipótesis razonable en el marco de los problemas paramétricos de optimization.

En esta sección hemos construido, partiendo de el problema inicial no paramétrico (P), un problema paramétrico de la forma $\tilde{P}_k$, $k \in \{1,2\}$. Por tanto la hipótesis de JJT-regularidad respecto a $(0,1)$ de $\tilde{P}_k$, $k \in \{1,2\}$ se convierte naturalmente en una hipótesis sobre (P). Dicho de otra forma, cabe preguntarse para cuales problemas de optimización (P) el problema $\tilde{P}_k$, $k \in \{1,2\}$ resulta JJT-regular respecto a $(0,1)$. Notemos que al considerar todos los problemas de la forma $\tilde{P}_k$, $k \in \{1,2\}$ estamos refiriendonos a solo una parte de todos los problemas paramétricos de optimización posibles. Es por ello que nuestra suposición acerca de la JJT-regularidad no posee ya una relación directa con la densidad y con la propiedad de ser abierta de la clase $\mathcal{F}$. Para adquirir certeza de que la hipótesis de JJT-regularidad es razonable proponemos trasladar la pregunta al espacio de funciones que definen directamente al problema (P).

El análisis de la hipótesis de JJT-regularidad respecto a el intervalo $(0,1)$ lo haremos solamente para la parametrización $\tilde{P}_1$. Para la parametrización $\tilde{P}_2$ la forma de trabajar esta problemática sería análoga. Comencemos por introducir ciertas notaciones. Sean $Z_x \subset \mathbb{R}^n$, $Z_{(v,w)} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ y $Z_t \subset \mathbb{R}$ definamos entonces $\mathcal{F}|_{Z_x \times Z_{(v,w)} \times Z_t} \subset C^3(\mathbb{R}^{n+m+s+1}, \mathbb{R}^{m+s+1})$ como:

$$\mathcal{F}|_{Z_x \times Z_{(v,w)} \times Z_t} := \left\{ (f,H,G) \,\middle|\, \Sigma_{gc} \cap (Z_x \times Z_{(v,w)} \times Z_t) \subset \cup_{i=1}^5 \Sigma_{gc}^i \right\}$$

Siempre y cuando quede claro de el contexto utilizaremos $\mathcal{F}|_{Z_x}$, $\mathcal{F}|_{Z_{(v,w)}}$ o $\mathcal{F}|_{Z_t}$ en lugar de $\mathcal{F}|_{Z_x \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}}$, $\mathcal{F}|_{\mathbb{R}^n \times Z_{(v,w)} \times \mathbb{R}}$ y $\mathcal{F}|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times Z_t}$ respectivamente. Esta claro de acuerdo a la definición que $\mathcal{F} = \mathcal{F}|_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{F}|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s}$

Para trasladar nuestro análisis al espacio $C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m+s+1})$ de funciones que definen al problema (P), debemos introducir una aplicación que describa la construcción de $\tilde{P}_1$ a partir de (P). Dicha aplicación la llamaremos Φ. Esta aplicación relaciona los espacios:

$$\Phi : C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m+s+1}) \mapsto C^3(\mathbb{R}^{n+m+s+1}, \mathbb{R}^{m+s+1})$$

y se define de la siguiente forma:

$$\Phi(f, h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_s) = \begin{pmatrix} f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 \\ th_1(x) + (1-t)v_1 \\ \vdots \\ th_m(x) + (1-t)v_m \\ tg_1(x) + (1-t)w_1 \\ \vdots \\ tg_s(x) + (1-t)w_s \end{pmatrix} \tag{8.27}$$

Utilizando la anterior definición podemos formular nuestro problema en los siguientes términos:
¿ Cuán grande es el conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)})$?

Definición 8.15
Un subconjunto de un espacio topologico se llama genérico cuando contiene la intersección de una cantidad numerable de conjuntos abiertos y densos.

En particular el conjunto $\mathcal{F} \subset C^3(\mathbb{R}^{n+m+s+1}, \mathbb{R}^{m+s+1})$ es genérico al ser el mismo abierto y denso como se probó en el Teorema 6.25.

El resultado que probaremos es el siguiente:

Teorema 8.16
El conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)}) \subset C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m+s+1})$ es un conjunto genérico para la C^3_s topología.

Demostración:
Definamos para $\nu = 3, 4 \ldots$ los conjuntos

$$\begin{aligned} S_\nu &:= \left\{(v,w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s | \|v\|^2 + \|w\|^2 \leq \nu\right\} \\ T_\nu &:= [\frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{\nu}] \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times (0,1) = \bigcup_{\nu=3,4,\ldots} S_\nu \times T_\nu$$

Podemos escribir ahora al conjunto $\mathcal{F}|_{(0,1)}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}|_{(0,1)} = \bigcap_{\nu=3,4\ldots} \mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}$$

Luego:

$$\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)}) = \Phi^{-1}(\bigcap_{\nu=3,4\ldots} \mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}) = \bigcap_{\nu=3,4\ldots} \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}) \qquad (8.28)$$

De acuerdo a la relación anterior (8.28) y a la Definición 8.15 de conjunto genérico basta probar que para cualquier $\nu \in \{3, 4 \ldots\}$ el conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}) \subset C^3(I\!R^n, I\!R^{m+s+1})$ es abierto y denso para la C^3_s topología. Fijemos por tanto $\nu \in \{3, 4, \ldots\}$.

Para probar que $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}) \subset C^3(I\!R^n, I\!R^{m+s+1})$ es abierto y denso utilizaremos la misma técnica que para probar que $\mathcal{F}$ es un conjunto abierto y denso. Basta mirar con detenimiento la demostración del Teorema 6.25 para convencernos que el mismo procedimiento alli utilizado nos lleva al resultado necesario aqui, siempre y cuando tengamos para nuestra hipótesis $\Phi((f, h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_s)) \in \mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}$ un Teorema de perturbación análogo al Teorema 6.18 y un lema sobre la C^3_s estabilidad local de la hipótesis, análogo al Lema 6.3 (ver tambien Observación 6.4).

El resto de la demostración consiste en enunciar y probar ambos resultados. Comenzemos con el teorema de perturbaciones y para ello retomemos las notaciones utilizadas en el Teorema 6.18. A modo recordatorio sea $a = (A, c, d)$, donde A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, $c \in I\!R^n$ y $d \in I\!R^{m+s}$. Tomando $\gamma_1 = \frac{1}{2}n(n+1) + n + m + s$ tenemos entonces que $a \in I\!R^{\gamma_1}$.

<u>1ra. hipótesis parcial</u>(Teorema de perturbaciones para $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu})$)
Para casi todo $a \in I\!R^{\gamma_1}$ se cumple que:

$$\Phi \begin{pmatrix} f(x) + \frac{1}{2}x^\top A x + c^\top x \\ h_1(x) + d_1 \\ \vdots \\ h_m(x) + d_m \\ g_1(x) + d_{m+1} \\ \vdots \\ g_s(x) + d_{m+s} \end{pmatrix} \in \mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu}$$

<u>Demostración de la 1ra hipótesis parcial</u>
Como las funciones $(f, H, G) \in C^3(I\!R^n, I\!R^{m+s+1})$ estan fijas a traves de esta demostración utilizemos la notación $\Phi(a) \in C^3(I\!R^{n+m+s+1}, I\!R^{m+s+1})$ para referirnos a la imagen por Φ de la perturbación de (f, H, G) cor-

respondiente a el vector a, o sea,

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 + \frac{1}{2}x^\top Ax + c^\top x \\ th_1(x) + (1-t)v_1 + td_1 \\ \vdots \\ th_m(x) + (1-t)v_m + td_m \\ tg_1(x) + (1-t)w_1 + td_{m+1} \\ \vdots \\ tg_s(x) + (1-t)w_s + td_{m+s} \end{pmatrix}$$

Comparando el problema paramétrico construido con las funciones $\Phi(a)$ y el problema perturbado considerado en el teorema de perturbaciones 6.18 podemos notar la similitud entre ellos. El problema parametrico obtenido (con parámetro de perturbación a) puede verse como un caso especial de el Teorema 6.18 en el cual se tienen tres caracteristicas:

- las perturbaciones de las restricciones no poseen parte lineal
- las perturbaciones de las restricciones aparecen multiplicadas por el parámetro t
- carecemos de perturbaciones en las variables (v, w).

Como veremos brevemente esto no impide probar, con la misma técnica de la demostración de el teorema de perturbaciones 6.18, el resultado enunciado.

Para ello notemos primeramente que el problema construido a partir de $\Phi(a)$ satizface LICQ en todo punto factible al restringirnos a el intervalo $t \in (0, 1)$. Como consecuencia natural, el teorema se reduce solo a la primera parte de la demostración del teorema de perturbaciones 6.18.

En esta primera parte pueden tomarse de nuevo las diferentes variedades consideradas, sin olvidar las implicaciones que tienen las tres caracteristicas antes mencionadas sobre la dimensión de los espacios y sobre la definicion de las variedades.

El punto decisivo de esta parte de la demostracion de el teorema de perturbaciones consiste en probar que en todo punto donde se satizface LICQ las variedades introducidas son transversales. Lo que debe lograrse para ello en nuestro caso es sustituir el papel que jugarían en la expresión 6.28 las derivadas respecto a los coeficientes de las perturbaciones lineales y cuadráticas de la función objetivo en las variables v y w.

Primeramente el término lineal respecto a v y w puede sustituirse por las propias segundas derivadas de la función objetivo respecto a v y w pues ellas forman la matriz identidad. Para ello debe tenerse en cuenta la completa separación entre x y las variables v y w en la función objetivo.

Por otra parte debe comprobarse que no hace falta derivar respecto a términos cuadráticos en v o w. Para ello analizemos la estructura de la matriz $\bar{M}_a^\eta$. Si suponemos que el conjunto de índices activos es $\{1, \ldots, m + s_1\}$ con $s_1 \leq s$ tenemos entonces que

$$\bar{M}_a^\eta = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \otimes & 0 & 0 & \otimes & \otimes \\ \hline 0 & I_m & 0 & (1-t)I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{s_1} & 0 & \begin{array}{c} (1-t)I_{s_1} \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline \otimes & (1-t)I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline \otimes & 0 & (1-t)I_{s_1}|0 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{8.29}$$

Los distintos bloques en que se ha representado a $\bar{M}_a^\eta$ corresponden a las derivadas respecto a diferentes variables por ejemplo; respecto a x (primera columna de bloques), respecto a v y w (segunda y tercera columna de bloques) y respecto a los multiplicadores asociados a igualdades y a desigualdades (cuarta y quinta columna de bloques). En todos los casos el simbolo $\otimes$ representa una expresión que carece de importancia para nuestro análisis.

Puede comprobarse facilmente que las últimas 4 columnas de bloques forman una matriz linealmente independiente. Por otra parte notemos que la matriz A de las perturbaciones cuadráticas respecto a x se encuentra presente en $\bar{M}_a^\eta$ solamente en la primera columna del primer bloque.

La anterior estructura nos permite afirmar que siempre las ultimas

$2m + s + |\tilde{J}_0|$ son linealmente independiente. Ello implica que alcanza con poder derivar solamente respecto a las componentes de A (matriz de perturbaciones cuadráticas respecto a x). A continuación establecemos una analogía entre lo señalado anteriormente y lo que ocurre en la prueba del teorema de perturbaciones 6.18.

En dicha prueba se concluye a partir de que se satizface LICQ que existe un conjunto de índices $\bar{I}$ tal que $\{n+1, \ldots, n+m+p\} \subset \bar{I}$ y $\bar{M}_a^1 \in \mathcal{A}(\bar{I})$. En nuestro caso eso se traduciría en la existencia de un conjunto de índices $\bar{I}$ que contenga a $\{n+m+s+1, \ldots, n+mm+s+s_1\}$ y con la misma propiedad para $\bar{M}_a^1$. La diferencia radica en que la cantidad de variables de nuestro problema es $n+m+s$. El hecho que se explicó anteriormente a traves de las columnas de la matriz 8.29 se refleja en la existencia de un conjunto de índices (denotemoslo de nuevo por $\bar{I}$) tal que $\{n+1, \ldots, n+m+s+m+s_1\} \subset \bar{I}$ y $\bar{M}_a^1 \in \mathcal{A}(\bar{I})$. la existencia de dicho conjunto de índices queda asegurada por la propiedades señaladas acerca de $\bar{M}_a^1$. $\square$

Pasemos a enunciar y probar la segunda hipótesis parcial.

<u>2da. hipótesis parcial</u> (C_s^3 estabilidad local para $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu})$)
Sea $(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu})$. Para cada punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad $U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ y una C_S^3-vecindad $\mathcal{V}(\bar{x})$ de $(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G})$ (caracterizada por una función $\varepsilon^{\bar{x}} \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$), tal que, para todo $(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in \mathcal{V}(\bar{x})$ se cumple lo siguiente:

$$(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{U(\bar{x}) \times S_\nu \times T_\nu})$$

<u>Demostración de la 2da. hipótesis parcial:</u>
Para probar esta hipótesis utilizaremos el absurdo y llegaremos a una contradicción similar a la arribada en el Lema 6.3 (o en la Observación 6.4).

Consideremos a $(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu})$ y a $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ fijos. Si no es cierta la hipótesis planteada se obtienen naturalmente sucesiones $x^\rho \in \mathbb{R}^n$ y $(f^\rho, H^\rho, G^\rho) \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m+s+1})$ tales que:

- $x^\rho \mapsto \bar{x}$

- Para todo $j \in J$, $i \in I$ y $k \in \{1,2,3\}$ vale:

$$\begin{array}{rl} f_j^\rho(x^\rho) & \mapsto f_j(\bar{x}) \\ D^k f_j^\rho(x^\rho) & \mapsto D^k f_j(\bar{x}) \\ g_j^\rho(x^\rho) & \mapsto g_j(\bar{x}) \\ D^k g_j^\rho(x^\rho) & \mapsto D^k g_j(\bar{x}) \\ h_i^\rho(x^\rho) & \mapsto h_i(\bar{x}) \\ D^k h_i^\rho(x^\rho) & \mapsto D^k h_i(\bar{x}) \end{array} \tag{8.30}$$

- $(f^\rho, H^\rho, G^\rho) \notin \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{\{x^\rho\}\times S_\nu \times T_\nu})$.

La última condición se convierte por definición en la existencia de sucesiones $(v^\rho, w^\rho) \in S_\nu$ y $t^\rho \in T_\nu$ tales que

$$(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho) \in (\tilde{\Sigma}_{gc}(f^\rho, H^\rho, G^\rho)) \setminus (\cup_{l=1}^5 \tilde{\Sigma}_{gc}^l(f^\rho, H^\rho, G^\rho)) \tag{8.31}$$

De la compacidad de S_ν y de T_ν podemos suponer, sin perder generalidad, que (v^ρ, w^ρ) y t^ρ convergen a sendos vectores $(\bar{v}, \bar{w}) \in S_\nu$ y $\bar{t} \in T_\nu$. Teniendo en cuenta la estructura de las funciones $\Phi(f^\rho, H^\rho, G^\rho) \in C^3(\mathbb{R}^{n+m+s+1}, \mathbb{R}^{m+s+1})$ se puede concluir a partir de la convergencia de $(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho)$ a $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t})$ y de la condición 8.30 que, para cada $k \in \{1,2,3\}$ vale:

$$\begin{array}{rl} \Phi(f^\rho, H^\rho, G^\rho)(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho) & \mapsto \Phi(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G})(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}) \\ D^k\Phi(f^\rho, H^\rho, G^\rho)(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho) & \mapsto D^k\Phi(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G})(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}) \end{array} \tag{8.32}$$

Aqui pretendemos entender la expresión $D^k\Phi$ como la k-ésima derivada de las funciones pertenecientes a la imagen de Φ (por ello la evaluación en los puntos $(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho)$ y $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t})$) y no la k-ésima derivada de Φ como aplicación, como cabria pensar.

Un simple argumento de continuidad nos permite concluir a partir de $(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho) \in \tilde{\Sigma}_{gc}(f^\rho, H^\rho, G^\rho)$ que:

$$(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}) \in \tilde{\Sigma}_{gc}(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G}) \tag{8.33}$$

Por otra parte como $(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{S_\nu \times T_\nu})$ se tiene en particular que $(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{\{\bar{x}\}\times S_\nu \times T_\nu})$. Teniendo en cuenta que $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{t}) \in S_\nu \times T_\nu$, y la relación (8.33), se tiene entonces que

$$(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}) \in \cup_{l=1}^5 \tilde{\Sigma}_{gc}^l(\bar{f}, \bar{H}, \bar{G})$$

Las relaciones (8.32), la convergencia de $(x^\rho, v^\rho, w^\rho, t^\rho)$ a $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t})$ y la condición (8.31) sin embargo contradicen la anterior afirmación. Dicha contradicción puede notarse a partir de la propia definición de los 5 tipos y es, en principio, la misma (lo que para cada uno de los 5 tipos) que prueba el Lema 6.3 y la Observación 6.4. $\Box$

Con ello terminamos la prueba de la segunda hipótesis parcial y por ende la prueba del teorema. $\Box$.

8.2.2 Modificaciones de la inmersión de penalización.

Teniendo en cuenta la Observación 8.13 (i), consideraremos en este epígrafe variantes compactificadas de las inmersiones $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$.

Concretamente consideremos las dos siguientes inmersiones del problema (P).

$$\hat{P}_1(t) \quad \min\{f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 | (x, v, w) \in \hat{M}_1(t)\}, t \in [0, 1], \tag{8.34}$$

donde

$$\hat{M}_1(t) := \left\{ (x, v, w) \in I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^s \;\middle|\; \begin{array}{c} th_i(x) + (1-t)v_i = 0, i \in I \\ tg_j(x) + (1-t)w_j \geq 0, j \in J \\ p - \|x\|^2 \geq 0, \\ q - \|v\|^2 - \|w\|^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

y

$$\hat{P}_2(t) \quad \min\{\hat{f}_2(x, v, w, t) | (x, v, w) \in \hat{M}_2(t)\}, \; t \in [0, 1] \tag{8.35}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}_2(x, v, w, t) & := & tf(x) + (1-t)(x - x^0)^\top A(x - x^0) + \\ & & +(v - v^0)^\top B(v - v^0) + (w - w^0)^\top C(w - w^0) \end{array}$$

$$\hat{M}_2(t) := \left\{ (x, v, w) \in I\!R^{n+m+s} \;\middle|\; \begin{array}{c} th_i(x) + (1-t)(v_i - v_i^0) = 0, \; i \in I \\ tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^1) \geq 0, \; j \in J \\ p - \|x - x^0\|^2 \geq 0, \\ q - \|v - v^0\|^2 - \|w - w^0\|^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Aquí p y q son números reales suficientemente grandes. Por otra parte $x^0 \in I\!R^n$, $v^0 \in I\!R^m$ y $w^0, w^1 \in I\!R^s$ son vectores fijos.

Con vistas a ganar sencillez y completitud en la exposición enunciaremos y probaremos los resultados teóricos utilizando la inmersión $\hat{P}_2$ sin embargo para los ejemplos tomaremos la inmersión $\hat{P}_1$

Será necesario en distintas situaciones asumir determinadas hipótesis. La primera de ellas será:

(B1) El conjunto factible M del problema original (P) es compacto y no vacío.

Denotemos por

$$E(x^0, p) := \{x \in I\!R^n \,|\, p - \|x - x^0\|^2 \geq 0\}.$$

Bajo la hipótesis **(B1)** y para x^0 fijo se tiene la existencia de un número positivo $\tilde{p} > 0$ tal que $M \subseteq E(x^0, p)$ para cada $p \geq \tilde{p}$. Es muy fácil comprobar la siguiente

Proposición 8.17

Sea satizfecha la hipótesis **(B1)** *y sea* $p \geq \tilde{p}$. *Si* $q > 0$ *y* $w^0, w^1 \in I\!R^s$ *son tales que*

$$\sum_{j=1}^{s} (\max\{(w_j^1 - w_j^0), 0\})^2 \leq q$$

entonces

$$M \times \{v^0\} \times \{\hat{w}\} \subset \hat{M}_2(t), \quad \forall t \in [0,1]$$

donde $\hat{w}_j = \max\{w_j^1, w_j^0\}, j \in J$)

De la anterior proposición se desprende que bajo las mencionadas hipótesis $\hat{M}_2(t) \neq \emptyset \; \forall t \in [0,1]$. Dicha propiedad de el conjunto de restricciones es necesaria y por ello establecemos una segunda hipótesis:

(B2) $p \geq \tilde{p}$, $q > 0$ y $\sum_{j=1}^{s} (\max\{(w_j^1 - w_j^0), 0\})^2 \leq q$

El siguiente teorema resume varias propiedades de $\hat{P}_2(t)$

Teorema 8.18

Sean satizfechas las hipótesis **(B1)** *y* **(B2)**. *Entonces el problema* $\hat{P}_2(t)$ *posee las propiedades siguientes:*

1. *Si se escoge a* $w^0, w^1 \in I\!R^s$ *con* $w_j^0 > w_j^1$, $j \in J$, $x^0 \in I\!R^n$, $v^0 \in I\!R^n$, A, B *y* C *definidas positivas, entonces el punto* (x^0, v^0, w^0) *es el mínimo global y el único punto estacionario de* $\hat{P}_2(0)$. *Además,* $(x^0, v^0, w^0, 0)$ *es un punto crítico no degenerado.*

2. *El conjunto de mínimos globales del problema* $\hat{P}_2(t)$ *es no vacío para todo* $t \in [0,1]$.

3. *El problema* $\hat{P}_2(1)$ *es equivalente al problema* (P) *en el sentido siguiente:*

   (a) *Si* (x, v, w) *es un punto estacionario de* $\hat{P}_2(1)$ *entonces* x *es un punto estacionario de* (P).

   (b) *Si* x *es un punto estacionario de* (P) *entonces existen vectores* $v \in I\!R^m$ *y* $w \in I\!R^s$ *tales que* (x, v, w) *es un punto estacionario de* $\hat{P}_2(1)$.

En lo adelante nos referiremos a través de $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}$ al conjunto de puntos estacionarios de alguno de los problemas $\hat{P}_1(t)$ o $\hat{P}_2(t)$.

Para notar el efecto de tales compactificaciones comenzemos con el siguiente ejemplo formado a partir de una ligera variación de $\hat{P}_1(t)$.

Ejemplo 8.19
Consideremos la inmersión siguiente:

$$min\{f(x) + w^2 | tg(x) + (1-t)w \leq 0, \quad x^2 + w^2 \leq 25\}.$$

donde las funciones f *y* g *son las definidas y utilizadas en el Ejemplo 8.12.*

El punto de partida para el ejemplo anterior es $(x^0, w^0) = (-4, 0)$. La Figura 8.8 muestra la proyección de $\hat{\Sigma}_{\text{gc}}|_{[0,1]}$ sobre el x-espacio y la Figura 8.9 la proyección sobre el w-espacio.

De la Figura 8.8 se desprende que $\hat{\Sigma}_{\text{gc}}|_{[0,1]}$ está compuesta ahora de una componente conexa y que las 4 ramas que constituian $\tilde{\Sigma}_{\text{stat}}|_{[0,1]}$ en el Ejemplo 8.12 ahora están conectadas entre sí formando una componente de $\hat{\Sigma}_{\text{gc}}|_{[0,1]}$. Esta nueva conexión de las antiguas ramas ocurre a

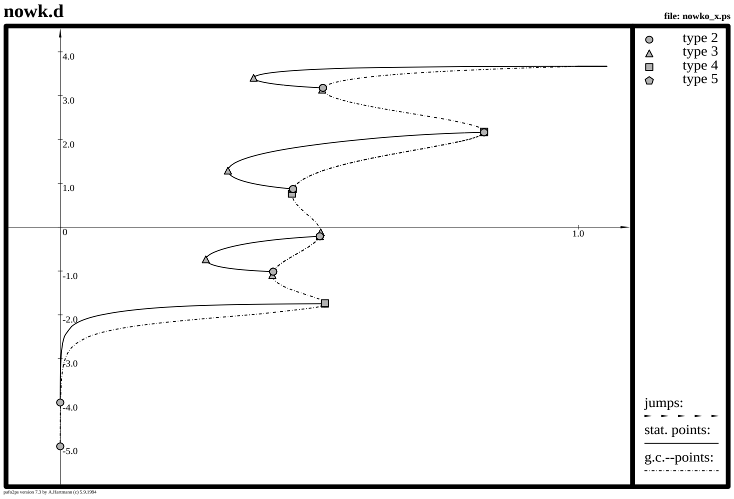


Figura 8.8: Proyección de $\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{[0,1]}$ sobre (x,t)

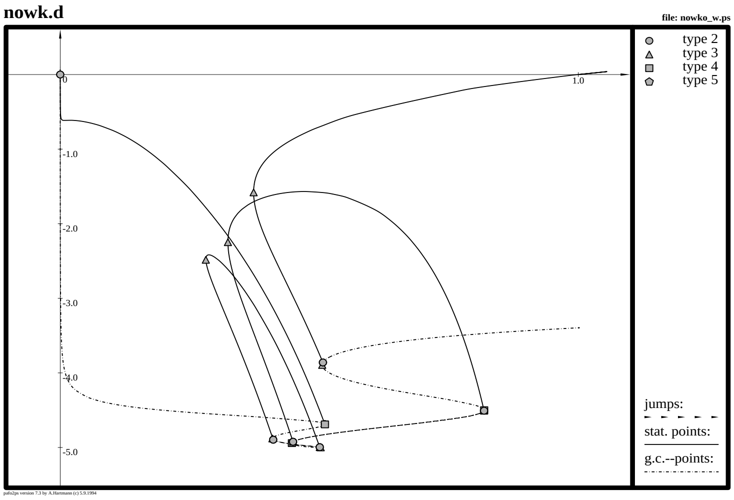


Figura 8.9: Proyección de $\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{[0,1]}$ sobre (w,t)

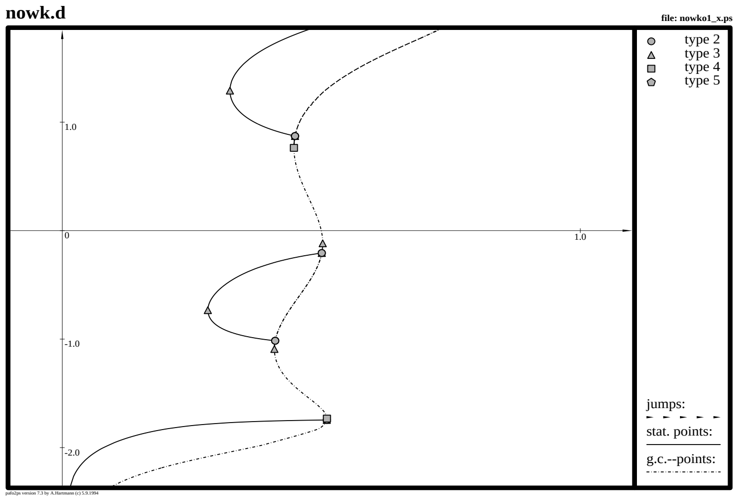


Figura 8.10: Algunas singularidades (z1 a z10 en la Tabla 8.12) presentes en la Figura 8.8

través de nuevas ramas, en las cuales la restricción de compactificación es también activa. Hay seis puntos de Tipo 2 (ver Tabla 8.12), donde las ramas originales del Ejemplo 8.12 tocan la restricción de compactificación. En cada una de las subramas que conectan las ramas originales hay dos puntos de Tipo 4 (ver Tabla 8.12), donde un mínimo local se transforma en un máximo local y viceversa.

La Figura 8.10 muestra una porción agrandada de la Figura 8.8, en la cual están indicadas algunas de las singularidades que aparecen en este ejemplo. Por otra parte la Figura 8.11 nos enseña una parte aumentada de la Figura 8.10 en la cual se diferencian claramente los dos primeros puntos de tipo 2 y 4 (z1 y z2 en la Tabla 8.12), loc cuales no pueden apreciarse con claridad debido a su proximidad en la Figura 8.10.

En la Tabla 8.12 se ofrece los valores numéricos de las 15 singularidades de $\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{[0,1]}$, los cuales se han determinado mediante el algoritmo PATH III(Ver Capítulo 7). Igualmente se da los tipos correspondientes de singularidades.

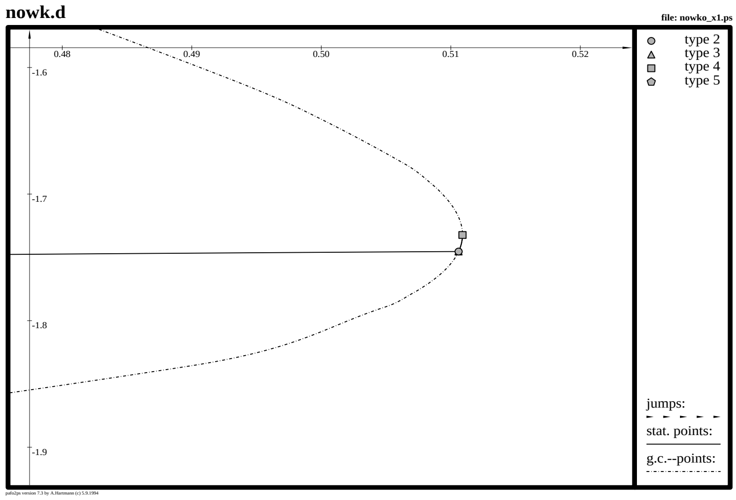


Figura 8.11: Singularidades z1 y z2 en la Tabla 8.12.

Punto	t	x	w	tipo
z1	.510602	-1.74539	-4.68547	2
z2	.510901	-1.7319	-4.69044	4
z3	.409497	-1.0901	-4.37962	4
z4	.411052	-1.01502	-4.89589	2
z5	.281081	-.736653	-2.48202	3
z6	.500938	-.206326	-4.99574	2
z7	.502739	-.11591	-4.99867	4
z8	.447185	.7645	-4.94123	4
z9	.449320	.871775	-4.92341	2
z10	.324773	1.24074	-2.37182	3
z11	.818085	2.16539	-4.50678	2
z12	.818286	2.1795	-4.49988	4
z13	.505679	3.1375	-3.8932	4
z14	.507013	3.17792	-3.86016	2
z15	.373302	3.40017	-1.59964	3

Tabla 8.12: Singularidades del Ejemplo 8.19

En este ejemplo podemos apreciar que, gracias a la modificación de la inmersión de penalización, existe ahora una componente conexa $\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{[0,1]}$ que contiene al punto de partida para $t = 0$, $(x^0, w^0) = (-4, 0)$, y a la solución para $t = 1$, $(\bar{x}, \bar{w}) \approx (3.6701544, 0)$. Esto significa que utilizando el algoritmo PATH III tenemos éxito, pues podemos alcanzar el valor $t = 1$ y encontrar una solución. Debemos advertir, sin embargo, que tal comportamiento no puede esperarse en el caso general. Cuando existen más de una componentes conexas de $\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}$ debemos recorrer en general varias de ellas para encontrar una solución. En los peores casos se necesita una descripción numérica de todas las componentes conexas de $\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}$. Por razones similares se introdujeron los algoritmos JUMPI y JUMPII en el Capítulo 7, sin embargo a través de su uso tampoco obtenemos tenemos exito en todos los casos.

En el anterior Ejemplo 8.19 notamos la apariencia de puntos de Tipo 1, 2 , 3 y 4. Respondiendo la interrogante (ii) planteada al respecto en la sección 8.1 presentamos el siguiente:

Teorema 8.20
Supongamos que $\hat{P}_2(t)$, es JJT-regular respecto a $(0, 1)$. Entonces tenemos

a)

$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{gc}}|_{(0,1)} = \bigcup_{i=1}^{r} \hat{\Sigma}^i_{\mathrm{gc}}|_{(0,1)}$$

donde $r = 4$ si $n > 1$ y $r = 5$ si $n = 1$.

b) Puede aparecer un punto de Tipo 4 o 5 solo si una de las restricciones siguientes es activa:

$$\begin{aligned} p - \|x - x^0\|^2 &\geq 0 \\ q - \|v - v^0\|^2 - \|w - w^0\|^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Demostración:
(a) es obvia y (b) se sigue del Corolario 8.3 □

Observación 8.21
Denotemos con $\mathcal{R}_\rho$ al conjunto de todas las matrices simétricas y regulares de tamaño (ρ, ρ). Identificando las matrices convenientemente tenemos que $\mathcal{R}_\rho \subset I\!R^{\frac{1}{2}\rho(\rho+1)}$. Como puede notarse en su definición el problema $\hat{P}_2(t)$ depende de los parámetros $A \in I\!R^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, $B \in I\!R^{\frac{1}{2}m(m+1)}$, $C \in I\!R^{\frac{1}{2}s(s+1)}$, $x^0 \in I\!R^n$, $v^0 \in I\!R^m$, $w^0, w^1 \in I\!R^s$ y $p, q \in I\!R$. Consideremos tres parámetros mas de la forma $b_x \in I\!R^n$, $b_v \in I\!R^m$ y $b_w \in I\!R^s$ y definamos un vector de parámetros

$$\nu = (A, B, C, x^0, v^0, w^0, w^1, p, q, b_x, b_v, b_w)$$

Consideremos la siguiente variación de la parametrización $\hat{P}_2(t)$ que consiste en introducir perturbaciones lineales en las compactificaciones:

$$\check{P}_\nu(t) \quad \min\{\check{f}(x, v, w, t) | (x, v, w) \in \check{M}(t)\}$$

donde

$$\check{f}(x, v, w, t) = \hat{f}_2(x, v, w, t)$$

y

$$\check{M}(t) := \left\{ (x, v, w) \in I\!R^{n+m+s} \;\middle|\; \begin{array}{c} th_i(x) + (1-t)(v_i - v_i^0) = 0, \; i \in I \\ tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^1) \geq 0, \; j \in J \\ p - \|x - x^0\|^2 - b_x^\top x \geq 0, \\ q - \|v - v^0\|^2 - b_v^\top v - \\ -\|w - w^0\|^2 - b_w^\top w \geq 0 \end{array} \right\}$$

Con una prueba análoga a la de el Teorema 6.18 obtenemos las siguientes conclusiones:

1. *Asúmase que $f, h_i, g_j \in C^3(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$. Se cumple entonces que el problema $\check{P}_\nu(t)$ es JJT-regular sobre el intervalo $[0, 1)$, para casi todo ν tal que se tengan las siguientes relaciones:*

$$\begin{array}{rcl} A & \in & \mathcal{R}_n \\ B & \in & \mathcal{R}_m \\ C & \in & \mathcal{R}_s \\ w_j^0 & > & w_j^1, \; j \in J \\ p & > & \tilde{p} \\ p & > & b_x^\top x^0 \\ q & > & b_v^\top v^0 + b_w^\top w^0 \end{array}$$

2. *Asúmase que* $f, h_i, g_j \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$. *Se cumple que: para casi todo* $(x^0, v^0, w^0, w^1, p, q) \in \mathbb{R}^{n+m+2s+2}$, *tales que se satizface la condición* **(B2)**, *al tomar las matrices* A, B *y* C *como las identidades de dimensión correspondientes y a los vectores* b_x, b_v *y* b_w *como* 0, *o sea para para*

$$\nu = (I^n, I^m, I^s, x^0, v^0, w^0, w^1, p, q, 0, 0, 0)$$

el problema $\check{P}_\nu(t)$ *resulta KH-regular con respecto al intervalo* $[0, 1)$.

8.2.3 Sobre la Condición de Mangasarian-Fromovitz

En lo que sigue damos respuesta a la pregunta (iii) planteada en la Sección 8.1. Para ello utilizamos la inmersión $\hat{P}_2(t)$. Asumimos que se satizfacen las hipótesis **(B1)** y **(B2)** obteniendo a partir de lo analizado en la sección anterior que $\hat{M}_2(t)$ es no vacío y está contenido en un compacto fijo para todo $t \in [0, 1]$. Por último, asumiremos también la siguiente hipótesis:

(B3) MFCQ se satisface en todos los puntos de $\hat{M}_2(t)$ y $\forall t \in [0, 1]$.

Con las hipótesis anteriores estamos en condiciones de hacer las siguientes conclusiones concernientes a la existencia de caminos de puntos estacionarios. Al igual que en la anterior sección nos referiremos mediante $\hat{\Sigma}_{\mathrm{stat}}$ al conjunto de puntos estacionarios de alguno de los problemas $\hat{P}_1(t)$ o $\hat{P}_2(t)$.

Teorema 8.22
Sean $f, h_i, g_j \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i \in I$, $j \in J$ *y sea* (x^0, v^0, w^0) *el punto de partida de* $\hat{P}_2(0)$ *descrito en el Teorema 8.18. Asúmase* **(B1)** ,**(B2)** *y* **(B3)**.

(i) Sea $\hat{P}_2(t)$ *KH-regular respecto a* $(0, 1)$. *Entonces existe un* PC^1-*camino en* $\hat{\Sigma}_{\mathrm{stat}}|_{[0,1]}$ *que conecta al punto* $(x^0, v^0, w^0, 0)$ *con un punto* $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w}, 1)$, *donde* $\hat{x}$ *es un punto estacionario de* (P).

(ii) Sea $\hat{P}_2(t)$ JJT-regular respecto a $(0,1)$. Entonces existe un PC^2-camino en $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}$ que conecta al punto $(x^0, v^0, w^0, 0)$ con un punto $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w}, 1)$, donde $\hat{x}$ es un punto estacionario de (P). Además, cuando $n > 1$ se cumple que

$$\hat{\Sigma}_{\text{stat}}|_{[0,1]} = \bigcup_{i=1}^{3} \hat{\Sigma}^i_{\text{stat}}|_{[0,1]}$$

(En el caso $n = 1$ pueden aparecer también puntos de tipo 5).

Demostración:
Los caminos se obtienen aplicando el Teorema 7.2 y teniendo en cuenta la información que poseemos, bajo ambas condiciones de regularidad, tanto sobre $\hat{P}_2(0)$ (Ver Teorema 8.18) como sobre $\hat{P}_2(t), t \in (0,1)$ (Ver Teorema 8.20).

La relación (afirmada en *(ii)*) entre la posibilidad de aparición de puntos de tipo 5 y la dimensión de la variable x se basa en la relación entre el número de variables y el número de restricciones activas de el problema $\hat{P}_2(t)$. Recuerdese que en un punto de tipo 5 el número de restricciones activas (contando también las de igualdad) debe ser igual al número de variables (sin contar el parámetro t) mas uno (Ver en capítulo 6 la definición de punto de tipo 5).

Por último la imposibilidad de la aparición de puntos de tipo 4 sobre $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}|_{[0,1]}$ es una consecuencia trivial de que los puntos de tipo 4 no son puntos estacionarios (Ver también Capítulo 6).□

Notemos que **(B3)** es una condición sobre todos los puntos de los conjuntos factibles $\hat{M}_2(t)$. Esta condición puede debilitarse exigiéndose regularidad de Mangasarian-Fromovitz sólo en los puntos necesarios. En lo adelante presentaremos el mencionado refinamiento y con vistas a no recargar las fórmulas denotemos con la variable y a las variables (x, v, w).

Sea $y^0 = (x^0, v^0, w^0)$ el punto de partida de $\hat{P}_2(0)$ considerado en el Teorema 8.18. Por otra parte sea $\text{cl}\,(\mathcal{K}(y^0,0)|_{[0,1]})$ la clausura de la componente conexa de $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}|_{[0,1]}$ que contiene al punto $(y_0, 0)$. $\text{cl}\,(\mathcal{K}(y^0,0)|_{[0,1]})$ está definida unívocamente y podemos afirmar además que es la única componente conexa de $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}|_{[0,1]}$ que interseca el hiperplano $\{t = 0\}$, debido a que y^0 es el único punto estacionario de $\hat{P}_2(0)$.

Introduzcamos ahora la condición que debilita a **(B3)**.

(B4) MFCQ se satisface en $y \in \hat{M}_2(t), \ \forall (y,t) \in \text{ cl } (\mathcal{K}(y^0,0)|_{[0,1]})$.

Teorema 8.23
Sean $f, h_i, g_j \in C^3(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$ y sea (x^0, v^0, w^0) el punto de partida de $\hat{P}_2(0)$ descrito en el Teorema 8.18. Asúmase **(B1)** *y* **(B2)** *y, sea $\hat{P}_2(t)$ JJT-regular respecto a $[0,1]$. Entonces se satisface la condición* **(B4)** *si y solo si existe un PC^2-camino en $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}|_{[0,1]}$ que conecta al punto $(x^0, v^0, w^0, 0)$ con un punto $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w}, 1)$, donde $\hat{x}$ es un punto estacionario de P. En dicho caso, y cuando $n > 1$, se tiene que*

$$cl\ (\mathcal{K}(y^0,0)|_{[0,1]}) \subset \bigcup_{i=1}^{3} \hat{\Sigma}^i_{\text{stat}}|_{[0,1]}$$

para $n = 1$ pueden aparecer también puntos de tipo 5.

<u>Demostración:</u>
Para probar la equivalencia se utiliza de nuevo el Teorema 7.2. En cuanto a los tipos de singularidades baste señalar que un punto (y,t) de Tipo 4 pertenece a cl $(\mathcal{K}(y^0,0)|_{[0,1]})$ si y solo si MFCQ no se satizface en $y \in \hat{M}_2(t)$ (Ver la Proposición 6.7). Por ende la condición **(B4)** elimina la existencia de puntos de Tipo 4 sobre cl $(\mathcal{K}(y^0,0)|_{[0,1]})$.

Por último al igual que en el Teorema 8.22 la posibilidad de la aparición de puntos de tipo 5 depende de la relación entre el número de variables y el número de restricciones de $\hat{P}_2(t)$ (por ello la relación con la dimensión de x). $\Box$

Las hipótesis **(B3)** y **(B4)** están formuladas en terminos de la inmersión escogida $\hat{P}_2(t)$. Teniendo en cuenta ello nos damos a la tarea de buscar condiciones que se formulen en términos del problema original. Notemos también que la condición **(B4)** posee un carácter puramente formal. Por esta razón buscaremos una hipótesis sobre el problema original (P) que se relacione con la condición **(B3)**.

Consideremos la llamada Condición Ampliada de Mangasarian-Fromovitz (brevemente EnMFCQ) introducida en [47] (Ver también [144]).

Asumamos **(B1)** y fijemos x^0.

Definición 8.24
La condición EnMFCQ se satisface en M si existe $p > 0$ tal que $M \subset E(x^0, p)$ y para cada $x \in E_(x^0, p)$ se tiene:

EnMFCQ1 *$D_x h_i(x)$, $i \in I$, son linealmente independientes*

EnMFCQ2 *Existe un vector $\xi \in I\!R^n$ con las siguientes propiedades*

$$\begin{aligned} h_i(x) + Dh_i(x)\xi &= 0,\ i \in I, && (8.36)\\ g_j(x) + Dg_j(x)\xi &> 0,\ \forall j \in J \text{ con } g_j(x) \leq 0, && (8.37)\\ -2(x - x^0)^\mathsf{T}\xi &> 0,\ si\ \|x - x^0\|^2 = p && (8.38) \end{aligned}$$

Notamos que la condición EnMFCQ no se satisface para el problema considerado en el Ejemplo 8.19.

La relación entre EnMFCQ y las hipótesis mencionadas se establece en el siguiente

Teorema 8.25
Sean $f, h_i, g_j \in C^1(I\!R^n, I\!R)$, $i \in I$, $j \in J$. Asúmase que se satisfacen **(B1)**, **(B2)** *y EnMFCQ, y que los valores p envueltos en EnMFCQ y* **(B2)** *coinciden. Entonces tenemos:*

(i) Para todo $t \in [0, 1]$ vale que $\hat{M}_2(t)$ es no vacío y está contenido en un compacto fijo.

(ii) Si $w_j^1 < w_j^0, \forall j \in J$ y $\|w^1 - w^0\|^2 < q$ entonces se cumple **(B3)**.

Demostración:
La implicación *(i)* no es otra cosa que lo explicado al principio de el epígrafe anterior (Ver Proposición 8.17).

Para probar la implicación *(ii)* tomemos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} y &= (x, v, w)\\ \hat{h}_i(y, t) &= th_i(x) + (1 - t)(v_i - v_i^0), \quad i \in I\\ \hat{g}_j(y, t) &= tg_j(x) + (1 - t)(w_j - w_j^1), \quad j \in J\\ \hat{g}_{s+1}(y, t) &= p - \|x - x^0\|^2\\ \hat{g}_{s+2}(y, t) &= q - \|v - v^0\|^2 - \|w - w^0\|^2\\ \hat{J} &= J \cup \{s + 1, s + 2\} \end{aligned}$$

Mediante la cual podemos reescribir a $\hat{M}_2(t)$ como

$$\hat{M}_2(t) = \{y \in I\!R^{n+m+s} | \hat{h}_i(y,t) = 0, i \in I, \hat{g}_j(y,t) \geq 0, j \in \hat{J}\}$$

Debemos probar que $\forall t \in [0,1]$ y para todo $y \in \hat{M}_2(t)$ se tienen las dos condiciones siguientes:

MFCQ1 Los vectores $D_y\hat{h}_i(y,t), \quad i \in I$ son linealmente independientes.

MFCQ2 Existe un vector $\eta \in I\!R^{n+m+s}$ tal que:

$$D_y\hat{h}_i(y,t)\eta = 0, \quad i \in I \tag{8.39}$$

$$D_y\hat{g}_j(y,t)\eta > 0, \quad j \in \hat{J}_0(y,t) \tag{8.40}$$

La condición **MFCQ1** se desprende, para $t \in [0,1)$, de la estructura de $\hat{h}_i(y,t)$. Para $t = 1$ se obtiene directamente de la condición **EnMFCQ1**.

Para probar la condición **MFCQ2** diferenciaremos los casos en que $t = 0$ y en que $t \in (0,1]$.

Comprobemos que cuando $\bar{y} \in \hat{M}_2(0)$ el vector

$$\eta := (\ -(\bar{x} - x^0)\ ,\ 0,\ (\frac{1}{2}(w^1 + w^0) - \bar{w})\ )^\top$$

satizface la condición **MFCQ2**.

La igualdades (8.39) se obtienen con una simple sustitución. Por otra parte si $j \in \hat{J}_0(\bar{y},0) \setminus \{s+1, s+2\}$ se obtiene que $\bar{w}_j = w_j^1$. Un cálculo sencillo muestra que

$$D_y\hat{g}_j(\bar{y},0)\eta = (\frac{1}{2}(w_j^1 + w_j^0) - \bar{w}_j) = \frac{1}{2}(w_j^0 - w_j^1)$$

y de las hipótesis de la implicación *(ii)* se obtiene que $D_y\hat{g}_j(\bar{y},0)\eta > 0$.

Si $s+1 \in \hat{J}_0(\bar{y},0)$, entonces $\|\bar{x} - x^0\|^2 = p > 0$ y por tanto

$$D_y\hat{g}_{s+1}(\bar{y},0)\eta = -2(\bar{x} - x^0)^\top(-(\bar{x} - x^0)) = 2p > 0$$

Si $s+2 \in \hat{J}_0(\bar{y},0)$, entonces $\|\bar{w}-w^0\|^2 = q > 0$ y tenemos

$$\begin{aligned}
D_y\hat{g}_{s+2}(\bar{y},0)\eta &= -2(\bar{w}-w^0)^\top(\frac{1}{2}(w^1+w^0)-\bar{w}) \\
&= -(\bar{w}-w^0)^\top((w^1-\bar{w})+(w^0-\bar{w})) \\
&= -(\bar{w}-w^0)^\top(w^1-\bar{w})+q \\
&= \frac{1}{2}(q+\|w^1-\bar{w}\|^2-\|w^1-w^0\|^2)+q \\
&= \frac{1}{2}(3q-\|w^1-w^0\|^2+\|w^1-\bar{w}\|^2)
\end{aligned}$$

Lo cual implica recordando que $\|w^1-w^0\|^2 < q$ la desigualdad necesaria, a saber:

$$D_y\hat{g}_{s+2}(\bar{y},0)\eta > 0$$

En el otro caso sea $\bar{y} \in \hat{M}_2(\bar{t})$ con $\bar{t} \in (0,1]$. Sea $\xi \in I\!\!R^n$ un vector que satizfaga la condición **EnMFCQ2**. Fijemos un número positivo $\gamma > 1$ tal que:

$$\gamma g_j(\bar{x}) + Dg_j(\bar{x})\xi > 0, \forall j \in J^{pos} \tag{8.41}$$

donde $J^{pos} = \{j \in J | g_j(\bar{x}) > 0\}$. Con ayuda de este número definamos el siguiente vector de $w^\eta \in I\!\!R^s$, cuya componente j-ésima tiene el siguiente valor

$$w_j^\eta := \begin{cases} -(\bar{w}_j - w_j^1), & \text{si } \; j \in J \setminus (J^{pos} \cap \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})) \\ -\gamma(\bar{w}_j - w_j^1), & \text{si } \; j \in J^{pos} \cap \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t}) \end{cases}$$

Comprobaremos a continuación que el vector:

$$\eta = (\ \xi\ ,\ -(\bar{v}-v^0)\ ,\ w^\eta\ )$$

satizface la condición **MFCQ2**.

Utilizando la ecuación (8.36) y $\hat{h}_i(\bar{y},\bar{t}) = 0$ tenemos para todo $i \in I$ que:

$$D_y\hat{h}_i(\bar{y},\bar{t})\eta = \bar{t}(Dh_i(\bar{x})\xi + h_i(\bar{x})) = 0$$

Sea $j \in \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t}) \cap J^{pos}$. Teniendo en cuenta que $j \in \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})$ y la expresión (8.41) se sigue:

$$D_y\hat{g}_j(\bar{y},\bar{t})\eta = \bar{t}(Dg_j(\bar{x})\xi + \gamma g_j(\bar{x})) > 0$$

Si $j \in \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t}) \cap (J \setminus J^{pos})$ se obtiene utilizando que $j \in \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})$ y la fórmula (8.37) que vale:

$$D_y\hat{g}_j(\bar{y},\bar{t})\eta = \bar{t}(Dg_j(\bar{x})\xi + g_j(\bar{x})) > 0$$

Por otra parte cuando $s+1 \in \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})$ tenemos que $\|\bar{x}-x^0\|^2 = p$. Teniendo en cuenta la desigualdad (8.38) se concluye:

$$D_y\hat{g}_{s+1}(\bar{y},\bar{t})\eta = -2(\bar{x}-x^0)^{\mathsf{T}}\xi > 0$$

Finalmente supongamos que $s+2 \in \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})$ ello significa primeramente que:

$$\|\bar{v}-v^0\|^2 + \|\bar{w}-w^0\|^2 = q \tag{8.42}$$

Por otra parte, luego de un pequeño cálculo obtenemos que:

$$\begin{aligned} D_y\hat{g}_{s+2}(\bar{y},\bar{t})\eta &= 2\|\bar{v}-v^0\|^2 + 2(\bar{w}-w^0)(\bar{w}-w^1) \\ &\quad + 2\,(\gamma-1)\sum_{j\in J^{pos}\cap\hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})}(\bar{w}_j-w_j^0)(\bar{w}_j-w_j^1) \end{aligned}$$

Si $j \in J^{pos} \cap \hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})$ entonces $(\bar{w}_j - w_j^1) < 0$. Teniendo en cuenta que $w_j^1 < w_j^0$ tenemos que $(\bar{w}_j - w_j^0)$ es tambien estrictamente negativo. Del anterior análisis y de que $\gamma > 1$ se sigue

$$(\gamma-1)\sum_{j\in J^{pos}\cap\hat{J}_0(\bar{y},\bar{t})}(\bar{w}_j-w_j^0)(\bar{w}_j-w_j^1) \geq 0$$

Podemos entonces continuar concluyendo que

$$D_y\hat{g}_{s+2}(\bar{y},\bar{t})\eta \geq 2\|\bar{v}-v^0\|^2 + 2(\bar{w}-w^0)(\bar{w}-w^1)$$

Sustituyendo la identidad

$$2(\bar{w}-w^0)(\bar{w}-w^1) = \|\bar{w}-w^1\|^2 + \|\bar{w}-w^0\|^2 - \|\bar{w}^1-w^0\|^2$$

y la igualdad (8.42) se sigue

$$D_y\hat{g}_{s+2}(\bar{y},\bar{t})\eta \geq \|\bar{v}-v^0\|^2 + \|\bar{w}-w^1\|^2 + q - \|\bar{w}^1-w^0\|^2$$

Por último, recordando que $\|\bar{w}-w^1\|^2 < q$, obtenemos que:

$$D_y\hat{g}_{s+2}(\bar{y},\bar{t})\eta > \|\bar{v}-v^0\|^2 + \|\bar{w}-w^1\|^2 \geq 0$$

Con lo cual concluye la demostración. □

Consideremos los siguientes ejemplos para ilustrar lo señalado respecto a la condición EnMFCQ. En el primer Ejemplo 8.26 utilizaremos la adaptación correspondiente de la parametrización $\hat{P}_1(t)$. Por su parte en el segundo Ejemplo 8.27 utilizaremos una adaptación adecuada de la parametrización $\hat{P}_2(t)$.

Ejemplo 8.26

$$\min \{f(x) | g(x) \leq 0\}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^2 \\ g(x) &= 0.1x^6 - 0.3x^5 - 0.25x^4 + x^3 - 2x + 4 \end{aligned}$$

Utilizamos la inmersión

$$\hat{P}_1(t) \quad \min \left\{ f(x) + w^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} tg(x) + (1-t)w \leq 0, \\ \|x\|^2 \leq 100, \\ \|w\|^2 \leq 100 \end{array} \right\}$$

donde $(x^0, w^0) = (-2, 0)$ *es el punto de partida de* $P(0)$.

Nótese que la función de la restricción $g(x)$ es cuasiconvexa (Ver Figura 8.13).

Como hemos mencionado, en este ejemplo se satisface la condición EnMFCQ y tenemos por tanto un camino en $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}$ que conecta al punto de partida con la solución para $t = 1$, $(\bar{x}, \bar{w}) \approx (2.3455943, 0)$. Dicho camino consta sólo de puntos de Tipo 1 y de Tipo 3.

En este caso se tiene éxito utilizando el algoritmo PATH III. Por otra parte las restricciones de compactificación nunca devienen activas. Las figuras 8.14 y 8.15 muestran las proyecciones sobre (x, t) y (w, t) respectivamente de los puntos de dicho camino.

Los puntos de retorno de tipo 3 han sido señalados en tales figuras y sus valores aproximados están dados en la Tabla 8.16.

Hacemos notar que el método de penalización clásico (para t creciente) no funciona en el caso anterior. Esto ilustra lo comentado en la Observación 8.8 *(ii)*.

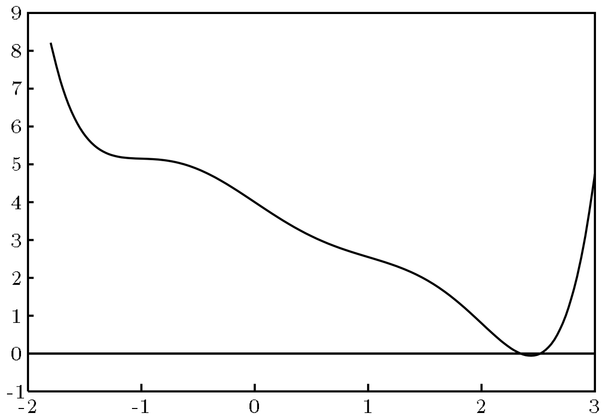


Figura 8.13: $g(x)$ es cuasiconvexa.

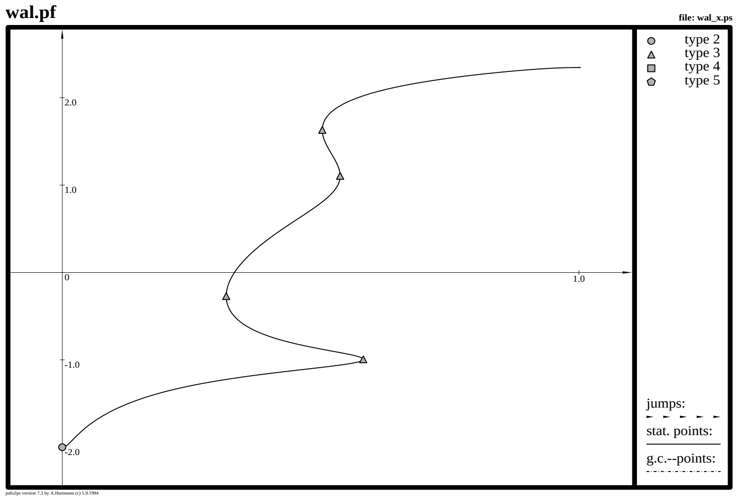


Figura 8.14: Proyección sobre (x, t) de $\hat{\Sigma}_{\mathrm{stat}}$

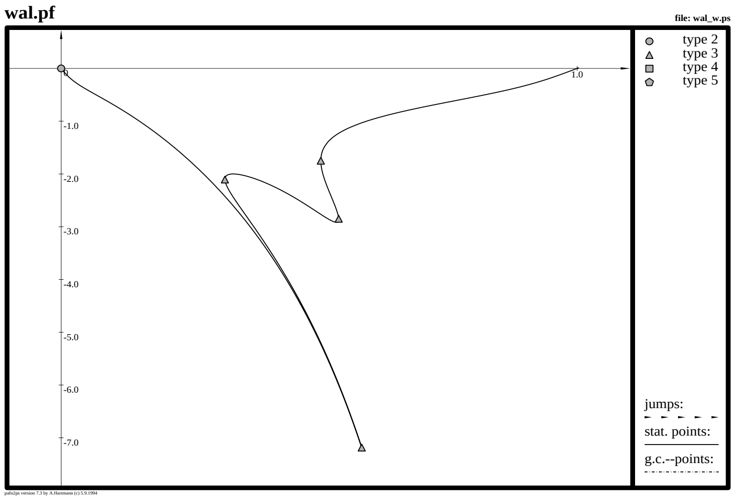


Figura 8.15: Proyección sobre (w,t) de $\hat{\Sigma}_{\text{stat}}$

Ejemplo 8.27

$$\min\{f(x)|g(x)\leq 0\}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.0265073509x^8 - 0.211505207x^7 + 0.25753848x^6 \\ &\quad +1.34579642x^5 - 2.34222067x^4 - 2.65029635x^3 \\ &\quad +3.45664738x^2 + 0.91447716x + 5 \\ g(x) &= 10(x-2.5)^2 - 5 \end{aligned}$$

Utilizamos la siguiente adaptación de $\hat{P}_2(t)$ a problemas con desigualdades expresadas con signos de menor e igual.

$$\hat{P}_2(t) \quad \min\{\hat{f}_2(x,v,w,t)|(x,v,w)\in \hat{M}_2(t)\},\ t\in[0,1]$$

donde $f_2(x,v,w,t)$ es la función objetivo utilizada para definir la inmersión $\hat{P}_2(t)$ en las expresiones (8.35) y $\hat{M}_2(t)$ se adapta de la sigu-

Punto	*t*	*x*	*w*
z1	*.582548*	*-.994292*	*-7.18595*
z2	*.317398*	*-.271521*	*-2.10272*
z3	*.537852*	*1.105925*	*-2.85626*
z4	*.503248*	*1.631522*	*-1.74906*

Tabla 8.16: Puntos de Tipo 3 del Ejemplo 8.26

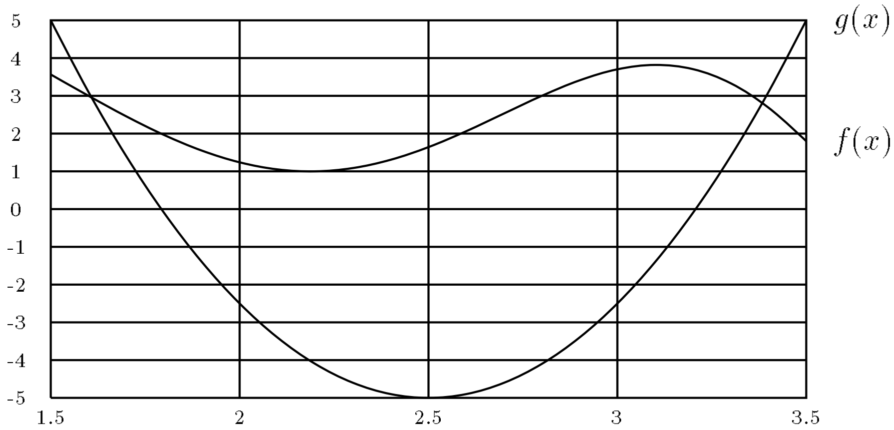


Figura 8.17: Funciones que definen al Ejemplo 8.27.

iente forma:

$$\hat{M}_2(t) := \left\{ (x,v,w) \in I\!R^{n+m+s} \;\middle|\; \begin{array}{c} tg(x) + (1-t)(w-w^1) \leq 0, \\ \|x-x^0\|^2 - p \leq 0, \\ \|w-w^0\|^2 - q \leq 0 \end{array} \right\}$$

En este ejemplo definimos los parametros como: $A = I_n$, $C = I_n$, $p = 25$, $q = 36$, $x^0 = -2$, $w^0 = 1$ *y* $w^1 = 0$. *De acuerdo a la anterior definición el punto de partida para* $P(0)$ *es* $(x^0, w^0) = (-2, 1)$

La siguiente Figura 8.17 muestra a las funciones f y g de este Ejemplo 8.27.

En este ejemplo también se satizface la condición EnMFCQ. Las figuras 8.18 y 8.19 representan la curva de puntos estacionarios de el

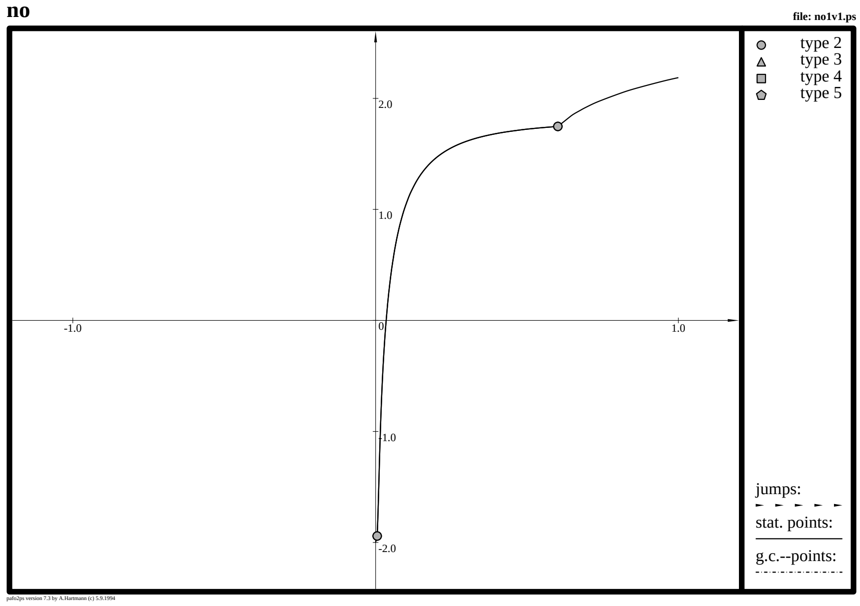


Figura 8.18: Proyección sobre (x, t) de $\hat{\Sigma}_{stat}$ en el Ejemplo 8.27.

Ejemplo 8.27. Nótese que el método de penalidad original (solo valores crecientes de t) es exitoso.

Hemos visto en resumen que en el Ejemplo 8.19 no se satizface la condición EnMFCQ y que en los ejemplos anteriores 8.26 y 8.27, en el cual las restricciones son cuasiconvexa y convexa respectivamente , si se satizface. Señalamos por último que la condición EnMFCQ sólo concierne a las funciones restricciones, dejando entera libertad a la función objetivo.

8.3 Otras inmersiones en la optimización no lineal

En la sección anterior hemos estudiado a profundidad inmersiones representativas de los métodos de penalidad. En esta sección abordaremos de forma mucho más ligera pero con el mismo enfoque paramétrico otros tres métodos establecidos dentro de la optimización no lineal. Pre-

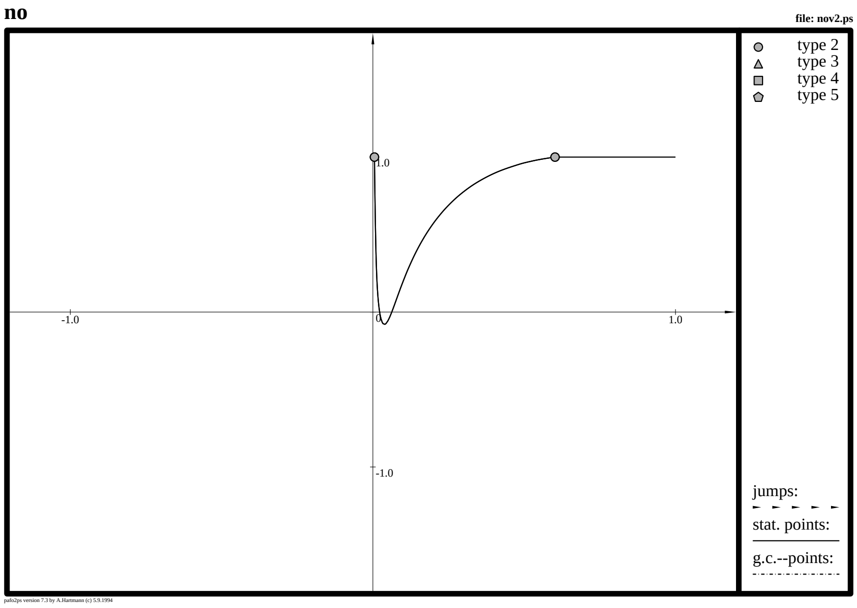


Figura 8.19: Proyección sobre (w, t) de $\hat{\Sigma}_{stat}$ en el Ejemplo 8.27.

sentaremos en tres pequeños epígrafes un resumen sobre los resultados obtenidos para los métodos de penalización exacta (Ver [23], [62] y [63]), para el método de los multiplicadores de Lagrange (Ver [24], [62] y [63]) y para la inmersión standard (Ver [34], y [63]). Al lector interesado en profundizar acerca de estos temas y sobre su relación con el enfoque paramétrico le recomendamos consultar la literatura indicada.

8.3.1 El método de penalización exacta

Para facilitar la exposición consideremos en este epígrafe conjuntos factibles expresados solamente a través de desigualdades. En otras palabras tomemos como punto de partida el problema:

$$(P) \quad \min \{f(x) \mid g_j(x) \geq 0, j \in J\}$$

Comenzemos por definir una inmersión representativa de los métodos de penalidad exacta. Para ello fijemos un número positivo $\gamma^2 > 0$ y un vector $\alpha \in I\!R^s$ que tenga todas sus componentes estrictamente negativas. Siguiendo [144] definimos la siguiente función de x:

$$\mu(x) = -\left[Dg(x)D^{\mathsf{T}}g(x) + \gamma^2 G(x)^{\mathsf{T}} G(x)\right]^{-1} Dg(x)D^{\mathsf{T}} f(x)$$

donde hemos tomado por notación a $g(x)$ como la función vectorial $(g_1(x), \ldots, g_s(x))$, a $Dg(x)$ como su jacobiana y a $G(x)$ como la matriz $\operatorname{diag}(g_j(x))$. Interpretaremos la siguiente inmersión como reprentativa del método de penalización exacta (Ver [144]).

$$P_E(t) \quad \min\ \{F_E(x,t) \mid x \in I\!R^n, g_j(x) > \alpha_j, j \in J\}\ t \in [0,1]$$

donde por definición

$$\begin{aligned} F_E(t) \ &:= \ f(x) - \sum_{j\in J}\left(\mu_j(x)g_j(x) + \frac{1}{(1-t)^2}\frac{(g_j(x))^2}{(\alpha_j - g_j(x))}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(1-t)^2}\sum_{j\in J}\frac{\left[\max\{0, g_j(x) + \mu_j(x)\frac{(1-t)^2}{2}(\alpha_j - g_j(x))\}\right]^2}{(\alpha_j - g_j(x))} \end{aligned}$$

Con vistas a poder estudiar esta inmersión con nuestros conocimientos sobre problemas uniparamétricos trabajamos con la siguiente modificación (Ver [23], [63], [62]):

$$\widetilde{P}_E(t) \quad \min\ \{\widetilde{F}_E(x,w,t) \mid (x,w) \in \widetilde{M}_E(t)\},\ t \in [0,1]$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_E(x,w,t) &= tf(x) - (w - w^0)^{\mathsf{T}} \left[\operatorname{diag}(\alpha_j - g_j(x))\right]^{-1} B(w - w^0) \\ &- \ (1-t)\sum_{j\in J}\mu_j(x)(w_j - w_j^0) + (1-t)(x - x^0)^{\mathsf{T}} A(x - x^0) \end{aligned}$$

y

$$\widetilde{M}_E(t) = \left\{ (x,w) \in I\!R^n \times I\!R^s \;\middle|\; \begin{array}{l} tg_j(x) - (1-t)(w_j - w_j^1) \geq 0, j \in J, \\ p - \|x - x^0\|^2 \geq 0, \\ q - \|w - w^0\|^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

En esta inmersión tenemos como parámetros a: $\gamma^2 > 0$, $\alpha_j < 0, j \in J$, $w^0, w^1 \in I\!R^s$ y $p, q \in I\!R$.

Análogamente a como ocurre con las inmersiones de penalidad necesitamos establecer hipótesis sobre el conjunto factible del problema original (hipótesis **(B1)**) y sobre los parámetros de nuestra inmersión (hipótesis **(B2)**) con vistas a que el conjunto factible $\widetilde{M}_E(t)$ tenga buenas propiedades. Las correspondientes hipótesis para la inmersión $\widetilde{P}_E(t)$ (que denotaremos como $(\mathbf{B1}_E)$ y $(\mathbf{B2}_E)$) pueden sospecharse con facilidad a partir de **(B1)** y **(B2)** por lo que no consideramos necesario entrar en su definición explícita (Ver [23]). Señalemos solamente que en $(\mathbf{B2}_E)$ debe sustituirse correspondientemente la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{s}(\min\{(w_j^1 - w_j^0), 0\})^2 \leq q$$

Con lo anunciado hasta ahora basta para enunciar un teorema análogo al Teorema 8.18. Con dicho resultado se comprueba para esta parametrización la validéz de las condiciones (A1), (A2) y (A3) enunciadas al inicio del capítulo.

Teorema 8.28
Supongamos que se cumplen $(\mathbf{B1}_E)$ *y* $(\mathbf{B2}_E)$. *El problema* $\widetilde{P}_E(t)$ *posee entonces las características siguientes:*

(i) Sean $w^0, w^1 \in I\!R^s$ *con* $w_j^1 > w_j^0$, $j \in J$, $x^0 \in I\!R^n$, $\alpha \in I\!R^s$ *con* $\alpha_j < g_j(x^0)$, $j \in J$. *Además escojamos las matrices* A *y* B *definidas positivas de modo tal que la Hessiana* $D^2\widetilde{F}_E(x^0, w^0, 0)$ *sea definida positiva. Entonces el punto* (x^0, w^0) *es un mínimo global y el único punto estacionario del problema* $\widetilde{P}_E(0)$. *Además,* (x^0, w^0) *es un punto crítico no degenerado.*

(ii) El conjunto de mínimos globales del problema $\widetilde{P}_E(t)$ *es no vacío para todo* $t \in [0, 1]$.

(iii) $\widetilde{P}_E(1)$ *es equivalente a* (P) *en el sentido siguiente:*

(a) Cuando (x, w) *es un punto estacionario del problema* $\widetilde{P}_E(1)$ *entonces* x *es un punto estacionario del problema* (P).

(b) Cuando x *es un punto estacionario de* (P) *entonces existe un vector* $w \in I\!R^s$ *tal que* (x, w) *es un punto estacionario de* $\widetilde{P}_E(1)$.

Respecto a la existencia da curvas de puntos estacionarios que conecten a el valor $t = 0$ con $t = 1$ tenemos el siguiente resultado que es análogo al Teorema 8.22 pero que contiene algo más de información.

Teorema 8.29
Sean las funciones $f, g_j \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $j \in J$ y supongamos que se cumplen las hipótesis $(\mathbf{B1}_E)$, $(\mathbf{B2}_E)$ *y EnMFCQ. Sean w^0, w^1 y $\alpha \in \mathbb{R}^s$ tales que $w_j^1 > w_j^0$, $\alpha_j < \min\{0, g_j(x^0)\}$ $j \in J$ y $\|w^1 - w^0\|^2 < q$.*

(i) Escójase las matrices A y B definidas positivas, de modo tal que la Hessiana $D^2\widetilde{F}_E(x^0, w^0, 0)$ sea positiva definida. Sea el problema $\widetilde{P}_E(T)$ JJT-regular sobre el intervalo $(0, 1]$.Entonces existe un PC^2-camino en $\widetilde{\Sigma}_{\text{stat}}$ que conecta al punto $(x^0, w^0, 0)$ con algún punto $(\hat{x}, \hat{w}, 1)$, donde $\hat{x}$ es un punto estacionario del problema (P). Ademas se tiene que

$$\widetilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]} = \bigcup_{\nu=1}^{3} \widetilde{\Sigma}_{\text{stat}}^{\nu}$$

para $n > 1$ (en el caso $n = 1$ puede aparecer algún punto de Tipo 5).

(ii) Sea el problema $\widetilde{P}_E(t)$, tomando $A = I^n$ y $B = I^s$, KH-regular respecto al intervalo $[0, 1]$. Entonces existe un PC^1-camino en $\widetilde{\Sigma}_{\text{stat}}$ que conecta al punto $(x^0, w^0, 0)$ con algún punto $(\hat{x}, \hat{w}, 1)$, donde $\hat{x}$ es un punto estacionario del problema (P).

En este teorema con vistas a no caer en reformulaciones innecesarias utilizamos a $\widetilde{\Sigma}_{stat}$ para referirnos al conjunto de puntos estacionarios de $\widetilde{P}_E(t)$.

En la demostración de este teorema debe probarse que bajo las hipótesis impuestas la condición EnMFCQ implique la satizfacción de MFCQ en todos los puntos $(x, w) \in \widetilde{M}_E(t)$ y para todo $t \in [0, 1)$. Ello significa que se debe enunciar y probar un resultado análogo al Teorema 8.25.

Al igual que en los métodos de penalidad puede encontrarse una condición necesaria y suficiente para la existencia de una curva de puntos estacionarios que conecte a $t = 0$ con $t = 1$. Tal condición se basa de nuevo en exigir MFCQ sobre un subconjunto adecuado de $\widetilde{M}_E(t)$. Dicha condición se define analogamente a **(B4)** y la denotaremos por $(\mathbf{B4}_E)$, de modo que puede enunciarse el siguiente teorema análogo al Teorema 8.23.

Teorema 8.30
Sean las funciones $f, g_j \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $j \in J$ y supongamos $(\mathbf{B1}_E)$, $(\mathbf{B2}_E)$. Sean ademas w^0, w^1 y $\alpha \in \mathbb{R}^s$ seleccionados de forma tal que $w_j^1 > w_j^0$, $\alpha_j < \min\{0, g_j(x^0)\}$ $j \in J$ y $\|w^1 - w^0\|^2 < q$. Entonces existe un PC^2-camino en $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{stat}}$ que conecta al punto $(x^0, w^0, 0)$ con algún punto $(\hat{x}, \hat{w}, 1)$, donde $\hat{x}$ es un punto estacionario del problema (P), si y solo si se satisface la condición $(\mathbf{B4}_E)$.

Observación 8.31
En las inmersiones de penalización y de penalización exacta se han podido obtener condiciones para la existencia de una curva que "conecte los valores $t = 0$ con $t = 1$". Dichas condiciones son similares para ambas inmersiones tanto en el caso de condiciones suficientes como en el de condiciones equivalentes. En ello juega un rol decisivo el hecho de que hemos utilizado en ambos casos la misma idea de modificar las inmersiones originales de modo que el conjunto de puntos estacionarios para $t = 0$ quede reducido a un punto.

Por último debemos mencionar que para la inmersión $\widetilde{P}_E(t)$ puede enunciarse y probarse resultados análogos a los de la Observación 8.21. (Ver [23]).

Con vistas a ilustrar lo mencionado sobre el método de penalización exacta consideremos el siguiente Ejemplo 8.32.

Ejemplo 8.32

$$\min\{f(x) | g(x) \leq 0\}$$

con las mismas funciones f y g del Ejemplo 8.27. En este ejemplo trabajaremos con la formulación de $\widetilde{P}_E(t)$ correspondiente para problemas con desigualdades expresadas con signos de menor e igual. De hecho:

$$\widetilde{P}_E(t) \quad \min\{\widetilde{F}_E(x, w, t) \mid (x, w) \in \widetilde{M}_E(t)\},\ t \in [0, 1]$$

donde $\widetilde{F}_E(x,w,t)$ se redefine como

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_E(x,w,t) &= tf(x) + (w-w^0)^{\mathsf{T}}(\alpha - g(x))^{-1}B(w-w^0)\\ &+ \ (1-t)\mu(x)(w-w^0) + (1-t)(x-x^0)^{\mathsf{T}}A(x-x^0)\end{aligned}$$

y $\widetilde{M}_E(t)$ se toma como

$$\widetilde{M}_E(t) = \left\{ (x,w) \in I\!R^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} tg(x) - (1-t)(w-w^1) \leq 0, \\ \|x-x^0\|^2 - p \leq 0, \\ \|w-w^0\|^2 - q \leq 0 \end{array} \right\}$$

Tomemos los parámetros como: $A = 1$, $B = 1$, $\alpha = 200$, $p = 25$, $q = 36$, $x^0 = -2$, $w^0 = 1$ y $w^1 = 0$. El punto de partida para $P(0)$ es $(x^0, w^0) = (-2, 1)$

La curva de puntos estacionarios del anterior ejemplo se pueden observar en las figuras 8.20 y 8.21. Destacamos que el método de penalidad exacta original resulta existoso en este ejemplo, pues sólo es necesario realizar la continuación para valores crecientes de t.

8.3.2 Método de los multiplicadores

Para referirnos al método de los multiplicadores regeresemos a nuestro problema original definido por igualdades y desigualdades.

$$(P) \quad \min \{f(x) |\ h_i(x) = 0, i \in I, g_j(x) \geq 0, j \in J\} \tag{8.43}$$

Consideraremos la inmersión siguiente como representante típica de un método de multiplicadores de Lagrange.

$$P_L(t) \quad \min \ \{F_L(x,\lambda,\mu,t) | x \in I\!R^n, \mu_j \geq 0, j \in J\}$$

donde

$$\begin{aligned}F_L(x,\lambda,\mu,t) &= f(x) - \sum_{i\in I} \lambda_i h_i(x,t) - \sum_{j\in J} \mu_j g_j(x,t) \\ &\quad + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \left[\sum_{i\in I}(h_i(x))^2 + \sum_{j\in J}(\min\{g_j(x),0\})^2\right]\end{aligned}$$

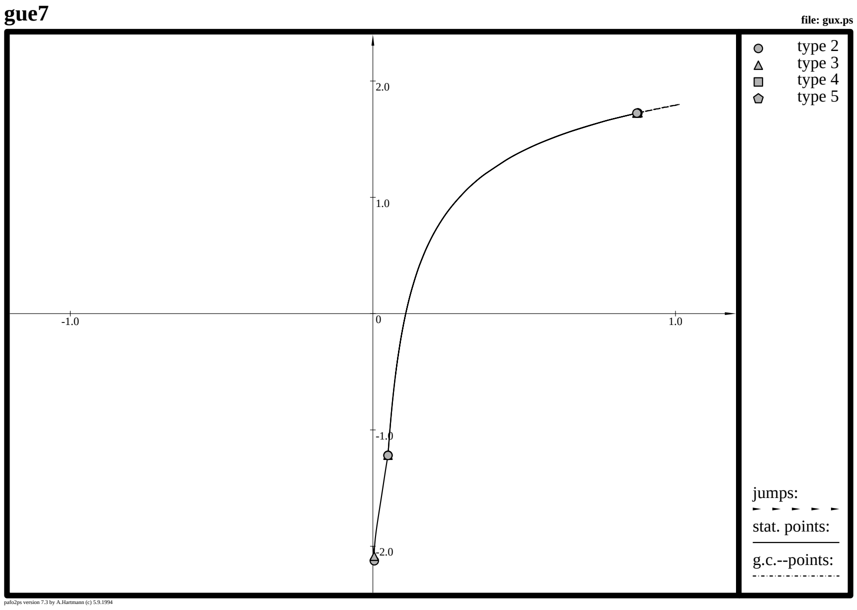


Figura 8.20: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (x,t) en el Ejemplo 8.32.

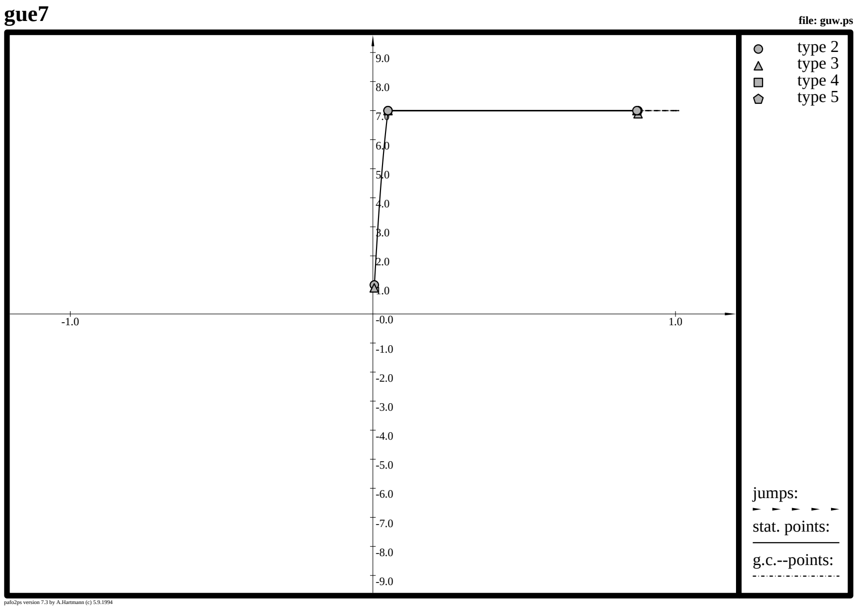


Figura 8.21: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (w,t) en el Ejemplo 8.32.

y

$$\begin{aligned} h_i(x,t) &:= h_i(x) + (t-1)h_i(x^0), \ i \in I \\ g_j(x,t) &:= g_j(x) - (t-1) \mid g_j(x^0) \mid, \ j \in J. \end{aligned} \tag{8.44}$$

La construcción de esta inmersión ha sido motivada por el Lagrangiano ampliado introducido por D.P.Bertsekas, p.e. en [10], [11] y [12]. La única diferencia reside en la elección de las funciones $h_i(x,t)$, $i \in I$, $g_j(x,t)$, $j \in J$.

La introducción de funciones $h_i(x,t)$, $i \in I$ y $g_j(x,t)$, $j \in J$ de clase C^3 y tales que $h_i(x,1) = h(x)$, $i \in I$ y $g_j(x,1) = g_j(x)$, $j \in J$ (Propiedades fáciles de comprobar en las funciones definidas por (8.44)) resulta necesaria en el sentido siguiente. Si tomásemos sencillamente $h_i(x,t) = h(x)$, $i \in I$ y $g_j(x,t) = g_j(x)$, $j \in J$, se concluiría a partir de la definición de punto estacionario aplicada al problema $P_L(t)$ (teniendo en cuenta las derivadas respecto a λ_i, $i \in I$ y μ_j, $j \in J$) que $h_i(x) = 0$, $i \in I$ y $g_j(x) \geq 0$, $j \in J$. Esto significaría no mas, que todos los puntos de la forma (x, λ, μ, t), generados por la inmersión $P_L(t)$ serían tales que x es factible del problema original. Dicha propiedad de factibilidad de las iteraciones no es propia del método de los multiplicadores, con lo cual $P_L(t)$ dejaría de ser un modelo para dicho método.

El método de multiplicadores de Lagrangre recorre una curva de puntos que son a la vez mínimos locales con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ y máximos locales con respecto a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ (resumidamente: puntos $\min_x - \max_{\lambda,\mu}$) del Lagrangiano ampliado definido por dado por

$$\begin{aligned} U(x,\lambda,\mu,t) &:= f(x) - \sum_{i\in I} \lambda_i h_i(x) - \sum_{j\in J} \mu_j g_j(x) \\ &\qquad + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \left[\sum_{i\in I} (h_i(x))^2 + \sum_{j\in J} (\min\{g_j(x), 0\})^2 \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos considerar a la inmersión $P_L(t)$ como un modelo útil en el sentido de que los puntos $\min_x - \max_{\lambda,\mu}$ de $U(x,\lambda,\mu,t)$ son puntos de ensilladura en el conjunto de puntos estacionarios de $P_L(t)$.

Teniendo en cuenta las dificultades que presenta la inmersión $P_L(t)$ y nuestro interés en la satizfacción de las condiciones básicas (A1), (A2) y (A3) proponemos la siguiente modificación de $P_L(t)$ (Ver [24]). Tomemos para mayor comodidad la variable $y = (x, v, w, \lambda, \mu)$.

$$\widetilde{P}_L(t) \quad \min\{\widetilde{F}_L(y,t) | y \in \widetilde{M}_L(t)\},\ t \in [0,1],$$

donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_L(y,t) \quad := \quad & t[f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(x,t) - \sum_{j \in J} \mu_j g_j(x,t)] \\
& +(1-t)[(x-x^0)^{\mathsf{T}} A(x-x^0) - (\lambda - \lambda^0)^{\mathsf{T}} B(\lambda - \lambda^0) \\
& -(\mu - \mu^0)^{\mathsf{T}} C(\mu - \mu^0)] + (v - v^0)^{\mathsf{T}} D(v - v^0) \\
& +(w - w^0)^{\mathsf{T}} E(w - w^0)
\end{aligned}$$

y

$$\widetilde{M}_L(t) := \left\{ y \in I\!R^{n+2m+2s} \;\middle|\; \begin{array}{l} th_i(x) + (1-t)(v_i - v_i^0) = 0,\ i \in I, \\ tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^1) \geq 0,\ j \in J, \\ \mu_j \geq 0,\ j \in J, \\ p - \|x - x^0\|^2 \geq 0, \\ q - \|y - y^0\|^2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Notemos que en esta inmersión tenemos como parámetros a las matrices A, B, C, D y E , a los vectores x^0, $y^0 = (x^0, v^0, w^0, \lambda^0, \mu^0)$ y $w^1 \in I\!R^{|J|}$ y a los números positivos p y q. Resultados análogos a los obtenidos en las anteriores inmersiones se obtienen para la inmersión $\widetilde{P}_L(t)$ y los hemos resumido en el siguiente

Teorema 8.33
Sean los parámetros A,B, C, D, E, y^0, w^1, p y q escogidos de forma tal que

- $w^0 > w^1$, $\forall j \in J$
- $\mu_j^0 > 0$, $\forall j \in J$
- *las matrices A, B, C, D, E sean definidas positivas*
- $\|w^1 - w^0\|^2 < q$

se cumple entonces que

(i) *El punto* $(x^0, v^0, w^0, \lambda^0, \mu^0)$ *es un punto* $\min_{x,v,w} - \max_{\lambda,\mu}$ *global del problema* $\widetilde{P}_L(0)$. *Además,* $(x^0, v^0, w^0, \lambda^0, \mu^0)$ *es un punto estacionario no degenerado.*

(ii) *El conjunto de mínimos globales del problema* $\widetilde{P}_L(t)$ *es no vacío para todo* $t \in [0,1]$.

(iii) $\widetilde{P}_L(1)$ *es equivalente a* (P) *en el sentido siguiente:*

(a) *Si* (x, v, w, λ, μ) *es un punto estacionario del problema* $\widetilde{P}_L(1)$ *entonces* x *es un punto estacionario del problema* (P).

(b) *Si* x *es un punto estacionario de* (P) *entonces existen vectores* v, w, λ *y* μ *tales que* (x, v, w, λ, μ) *es un punto estacionario de* $\widetilde{P}_L(1)$

(iv) *Supóngase que se satisface la condición EnMFCQ. Entonces se satisface* $MFCQ$ *para todo* $(x, v, w, \lambda, \mu) \in \widetilde{M}_L(t)$ *para cada* $t \in [0,1]$.

Observación 8.34
Del resultado (iv) *en el Teorema 8.33 se sigue una condición que implica la hipótesis* (v) *requerida por el Teorema 7.2. Notemos sin embargo que en la conclusión* (i) *del Teorema 8.33 no se menciona nada acerca de la unicidad de* y^0 *como punto estacionario de* $\widetilde{P}_L(0)$. *Ello no es casual, pues, de hecho, el problema* $\widetilde{P}_L(0)$ *puede poseer al menos dos puntos estacionarios. Ello tiene como consecuencia que el camino de puntos estacionarios que comienza en* y^0 *podría " retornar al valor* $t = 0$ *antes de alcanzar el valor* $t = 1$.

En el ejemplo siguiente se pone en evidencia tal tipo de comportamiento en el cual la hipótesis (iv) del Teorema 7.2 no se satizface.

Ejemplo 8.35

$$\min \{f(x) | g(x) \leq 0\}$$

tomando las mismas funciones f *y* g *de los ejemplos 8.27 y 8.32. Aqui utilizaremos por supuesto una variación de* $\widetilde{P}_L(t)$ *adecuada para problemas con desigualdades expresadas con signos de menor e igual. Dicha adaptación es la siguiente:*

$$\widetilde{P}_L(t) \quad \min\{\widetilde{F}_L(x, w, \mu, t) | (x, w, \mu) \in \widetilde{M}_L(t)\}, \ t \in [0,1],$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_L(x,w,\mu,t) \;:=\; & t[f(x)+\mu g(x,t)] + (1-t)[(x-x^0)^\top A(x-x^0) \\ & -(\mu-\mu^0)^\top C(\mu-\mu^0)] + (w-w^0)^\top E(w-w^0)\end{aligned}$$

y

$$\widetilde{M}_L(t) := \left\{ (x,w,\mu)\in I\!R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} tg(x)+(1-t)(w-w^1)\le 0, \\ \mu \ge 0, \\ \|x-x^0\|^2 - p \le 0, \\ \|y-y^0\|^2 - q \le 0 \end{array} \right\}.$$

En este ejemplo fijamos los parámetros con los valores: $A = 1$, $C = E = 1$, $p = 25$, $q = 36$, $x^0 = -2$, $w^0 = 1$, $w^1 = 2$ *y* $\mu^0 = 1$. *El punto de partida para* $P(0)$ *es* $(x^0, w^0, \mu^0) = (-2, 1, 1)$.

El punto (x^0, w^0, μ^0) es un punto de $\min_{(x,w)} - \max_\mu$ global de el problema $\widetilde{P}_L(0)$. La curva que contiene a este punto, mostrada en las figuras 8.22, 8.23 y 8.24, no alcanza el valor $t = 1$ sino que retorna a el punto $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}) = (-2, 1, 0)$ que resulta ser un mínimo local de $\widetilde{P}_L(0)$.

El Ejemplo 8.35 muetra el fenómeno señalado en la Observación 8.34. Podemos afirmar segun lo visto que el método de los multiplicadores nos es necesariamente exitoso, aún bajo la satizfacción de la condición EnMFCQ. En las figuras 8.22, 8.23 y 8.24 se aprecia que en el Ejemplo 8.35 existe otra componente conexa de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ que contiene al punto $(\tilde{x}, \tilde{w}, \tilde{\mu}, 0) = (-2, 1, 7, 0)$, el cual es un punto de mínimo global de $\widetilde{P}_L(0)$. Esta segunda componente alcanza el valor $t = 1$.

Un salto de la primera componente mencionada a esta segunda es posible debido a que se sigue una curva de puntos estacionarios que no son puntos de mínimo local y en este caso existe siempre un salto segun lo analizado en el Capítulo 7. Notemos que la aplicación de un método de continuación sobre la componente que contiene al punto $(-2, 1, 7, 0)$ no tiene ya ninguna relación con el metodo original de los multiplicadores, en el cual se sigue una curva de puntos $\min_{(x,w)} - \max_\mu$ de $\widetilde{P}_L(t)$.

Consideremos un último ejemplo de inmersión representativa de el método de los multiplicadores.

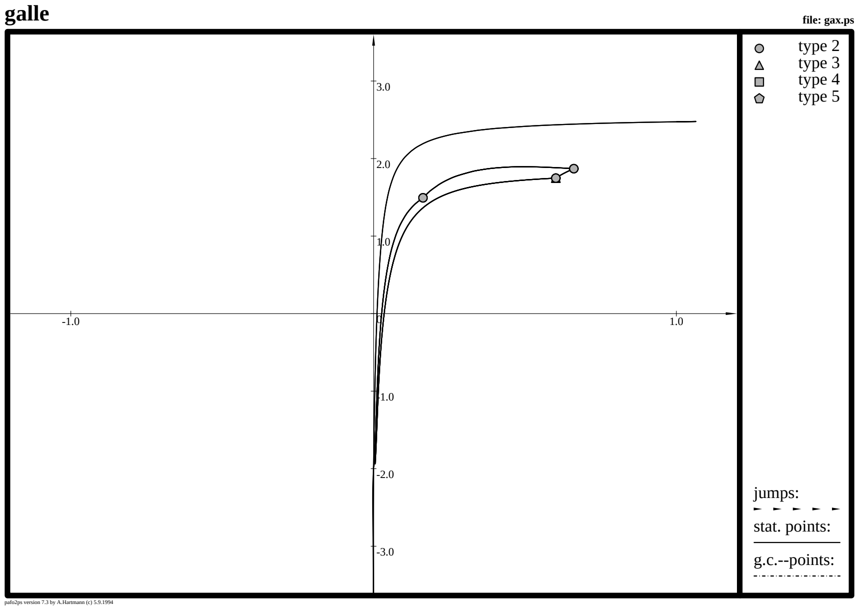


Figura 8.22: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (x, t) en el Ejemplo 8.35.

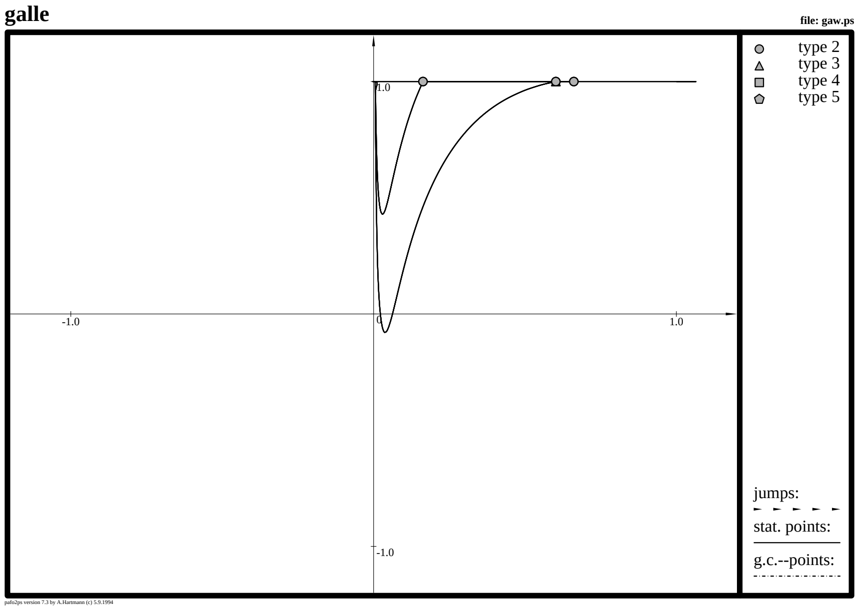


Figura 8.23: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (w, t) en el Ejemplo 8.35.

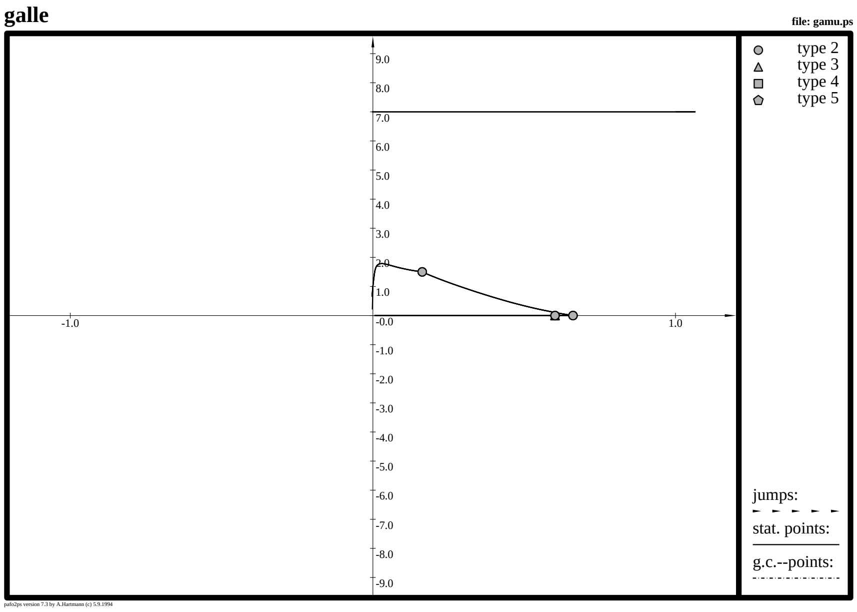


Figura 8.24: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (μ, t) en el Ejemplo 8.35.

Ejemplo 8.36
Consideremos el problema

$$\min \{f(x)|g(x) \leq 0\}$$

con las funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.0265073509x^8 - 0.211505207x^7 + +0.25753848x^6 \\ &\quad +1.34579642x^5 - 2.34222067x^4 - -2.65029635x^3 \\ &\quad +3.45664738x^2 + 0.91447716x + 5 \\ g(x) &= 0.1x^6 - 0.3x^5 - 0.25x^4 + x^3 - 2x + 4. \end{aligned}$$

Utilizemos para este problema la misma inmersión que en el Ejemplo 8.35 y los mismos valores de los parámetros A, C, E, p, q, x^0, w^0, w^1 y μ^0. El punto de partida entonces para $\widetilde{P}_L(0)$ es $(x^0, w^0, \mu^0) = (-2, 1, 1)$.

Las funciones que definen el Ejemplo 8.36 se encuentran graficadas en la siguiente Figura 8.25.

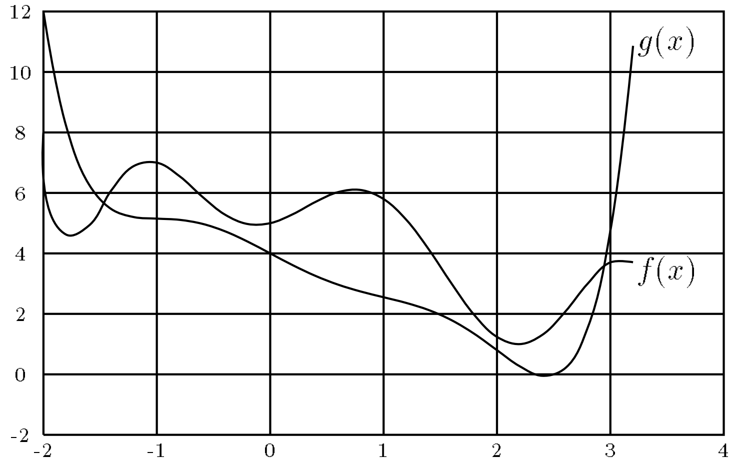


Figura 8.25: Funciones que definen al Ejemplo 8.36.

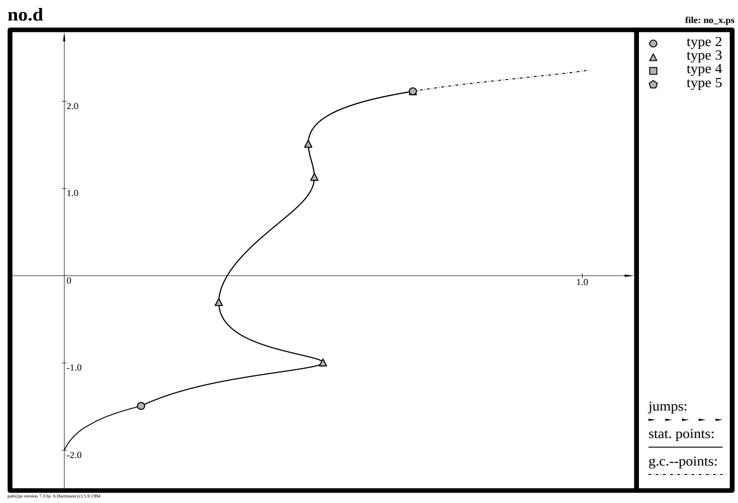


Figura 8.26: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (x, t) en el Ejemplo 8.36.

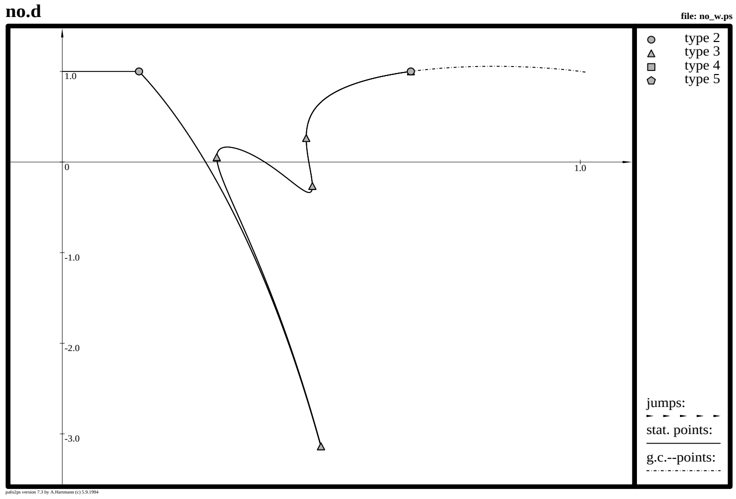


Figura 8.27: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (w, t) en el Ejemplo 8.36.

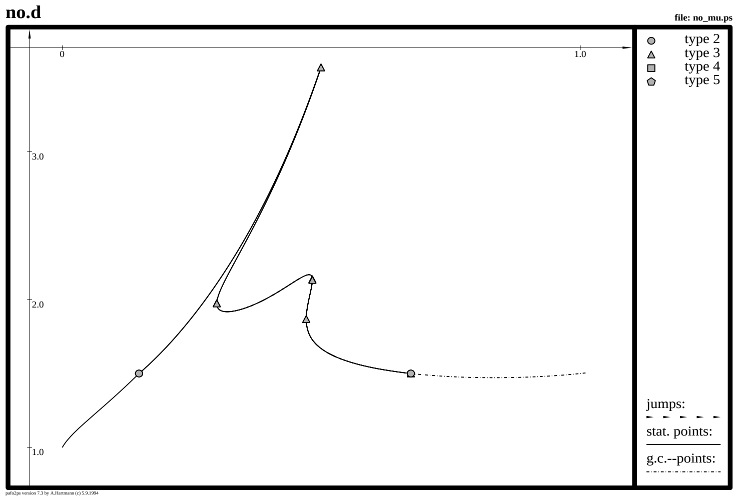


Figura 8.28: Proyección de $\tilde{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$ sobre (μ, t) en el Ejemplo 8.36.

En este ejemplo se satizface la condición EnMFCQ. Las figuras 8.26, 8.27 y 8.28 muestran las proyecciones de la curva $\hat{\Sigma}_{stat}|_{[0,1]}$.

Como puede observarse la curva de puntos estacionarios del Ejemplo 8.36 contiene dos puntos de tipo 2 y cuatro puntos de tipo 3. Esta curva se extiende hasta alcanzar el valor $t = 1$.

El anterior Ejemplo 8.36 ilustra que el método de los multiplicadores puede también resultar exitoso. Debido a la presencia de cuatro puntos de tipo 3 en dicho ejemplo es necesario cambiar la dirección respecto a t de la continuación (creciente-decreciente, etc.) para poder alcanzar el valor $t = 1$. El carácter de los puntos estacionarios que se obtienen en el proceso de continuación varía al pasar cada uno de los mencionados puntos de tipo 3. En particular, cuando se atraviesa el primer punto de tipo 3 mediante una continuación numérica de la curva de puntos estacionarios, estamos utilizando una metodología que difiere desde dos puntos de vista de el método de los multiplicadores tal y como este se plantea originalmente. Primeramente se realiza un cálculo en el cual el valor de el parámetro t decrede, por otra parte debe notarse que se continua una curva que contiene puntos estacionarios de $\widetilde{P}_L(t)$ que no son puntos de $\min_{(x,w)} - \max_{\mu}$.

8.3.3 Inmersión standard

En las tres inmersiones estudiadas anteriormente a lo largo de este capítulo trabajamos con parametrizaciones que agregan nuevas variables a las del problema original (P). Por el contrario, para la inmersión standard es posible encontrar modificaciones adecuadas que permanezcan en el espacio original $I\!R^n$ (Ver [34], [63]). Como inmersión standard del problema (P) enunciado en (8.43) entendemos a la siguiente parametrización:

$$P_s(t) \quad \min\left\{ f_s(x,t) \,\middle|\, \begin{array}{c} h_i(x) + (t-1)h_i(x^0) = 0, i \in I, \\ g_j(x) - (t-1) \mid g_j(x^0) \mid \geq 0, j \in J \end{array} \right\}, \; t \in [0,1] \tag{8.45}$$

donde

$$f_s(x,t) = tf(x) + (1-t)\|x - x^0\|^2$$

Aquí x^0 es un vector arbitrario. Conviene observar que esta inmersión, a diferencia de las anteriormente tratadas, esta definida para

$t = 1$.

Roger Fandom ha estudiado en su tesis de diploma la inmersión standard (8.45) dentro del marco de los conceptos arriba mencionados y ha logrado obtener resultados muy interesantes. Referimos al lector interesado a [34], [63]. Deseamos dejar constancia, sin embargo,de una particularidad de la inmersión (8.45). Es fácil comprobar que el conjunto $M_s(t), t \in [0,1]$ puede volverse vacío cuando el conjunto de índices $I \neq \emptyset$. Este hecho constituye, sin duda, una grave desventaja de tal inmersión. A raíz de este hecho R.Fandom propone dos modificaciones de $P_s(t)$, las cuales evitan dicha desventaja. Para terminar, a modo de ejemplo, nos limitaremos a mencionar una de tales modificaciones:

$$\min \left\{ f_s(x,t) \;\middle|\; \begin{array}{c} h_i(x) + (t-1)h_i(x^0) \leq 0,\ i \in I \\ g_j(x) - (t-1) \mid g_j(x^0) \mid \geq 0,\ j \in J \\ q - \|x\|^2 \geq 0, \\ \sum_{i \in I} h_i(x) + (1-t) \mid \sum_{i \in I} h_i(x^0) \mid \geq 0 \end{array} \right\}.$$

8.4 Acerca del problema de optimización global.

Nos referiremos brevemente en esta sección a las consideraciones hechas en la sección 1.2.1 acerca de la resolución del problema de optimización global mediante el uso de métodos de continuación. En dicha sección se introdujo el siguiente problema paramétrico:

$$P(t) \min \quad \left\{ \|x - x^0\| \,|g_j(x,t) \geq 0, j = 1,2 \right\}, \quad t \in [0,1]$$

donde

$$\begin{aligned} g_1(x,t) &:= g(x) + (t-1)g(x^0) \\ g_2(x,t) &:= q - \|x\| \end{aligned}$$

Ha de recordarse que el problema consiste en hallar un punto $\bar{x}$ tal que $g(\bar{x}) \geq 0$. El punto x^0 es factible para $t = 0$, ademas de ello cumple que $g(x^0) < 0$ para que tenga sentido plantearse el anterior problema.

Supongamos que el anterior problema es JJT-regular y que, a traves de un proceso de continuación, partimos de x^0 (el mínimo global para

$t = 0$) y arribamos sobre un curva en Σ_{stat} a un punto de tipo 4 a traves de valores creciente de el parámetro t. A partir de los resultados presentados en los capítulos 6 y 7 sabemos que existen 2 casos. Un caso en que existe salto a otra componente conexa y otro en que no existe. La diferenciación se relaciona estrechamente con la desaparición o no, localmente, de el conjunto factible dependiente de el parámetro.

Un punto de tipo 4 para el problema considerado $P(t)$ es necesariamente un punto en el cual $g_1(x,t)$ es activa, pues la segunda restricción posee siempre gradiente (respecto a x) distinto de cero en los puntos donde es activa. De acuerdo al Resultado 7.7 tenemos que la existencia o no de un salto puede determinarse calculando la expresión $\tilde{\delta}$.

Sea $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma^4_{gc} \cap \Sigma_{loc}$. Supongamos que $J_0(\bar{x},\bar{t}) = \{1,2\}$ y fijemos $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ tales que $\bar{\mu}_j > 0$, $j = 1,2$ y

$$\bar{\mu}_1 D_x g_1(\bar{x},\bar{t}) + \bar{\mu}_2 D_x g_2(\bar{x},\bar{t}) = 0$$

El valor $\tilde{\delta}$ se calcula entonces como:

$$\tilde{\delta} = signo \ \left(\bar{\mu}_1 D_t g_1(\bar{x},\bar{t}) + \bar{\mu}_2 D_t g_2(\bar{x},\bar{t})\right)$$

lo cual resulta (teniendo en cuenta que $D_t g_2(\bar{x},\bar{t}) = 0$) en:

$$\tilde{\delta} = signo \ \left(\bar{\mu}_1 D_t g_1(\bar{x},\bar{t})\right) = signo \ \left(\bar{\mu}_1 g(x^0)\right) = -1$$

pues, como se señalo anteriormente, $g(x^0) < 0$.

Producto de que $g_2(x,t)$ no depende realmente de t y de que $g_1(x,t)$ siempre es activa en los puntos de $\Sigma^4_{gc} \cap \Sigma_{loc}$ puede implicarse facilmente que $\tilde{\delta}$ es independiente de $J_0(x,t)$ y por ello no existen saltos cuando el punto de $\Sigma^4_{gc} \cap \Sigma_{loc}$ es alcanzado a traves de valores crecientes de t.

A manera ilustrativa de lo anteriormente señalado consideremos el caso en que $n = 1$, o sea g depende solo de una variable. Es facil comprobar de las propiedades de los puntos de tipo 4 que si $(\bar{x},\bar{t}) \in \Sigma^4_{gc} \cap \Sigma_{loc}$, se cumple que

$$\begin{aligned} J_0(\bar{x},\bar{t}) &= \{1\} \\ \frac{dg}{dx}(\bar{x}) &= 0 \\ \frac{d^2 g}{dx^2}(\bar{x}) &\neq 0 \end{aligned}$$

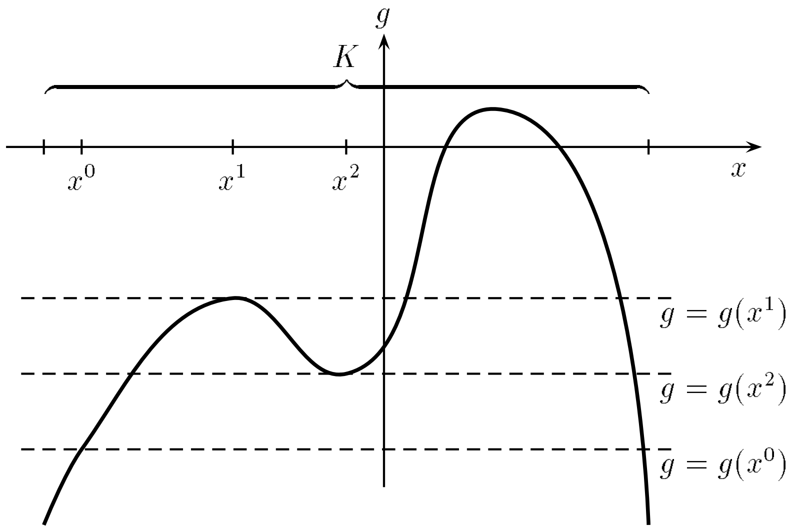


Figura 8.29:

($\bar{x}$ es un mínimo o un máximo local de g). La siguiente figura refleja los casos posibles.

Como puede notarse x^1 es un máximo local de g y x^2 un mínimo local. Los puntos $(x^1, 1 - \frac{g(x^1)}{g(x^0)})$ y $(x^2, 1 - \frac{g(x^2)}{g(x^0)})$ son de tipo 4. En $(x^1, 1 - \frac{g(x^1)}{g(x^0)})$ no existe salto hacia otra componente conexa de Σ_{stat} y en $(x^2, 1 - \frac{g(x^2)}{g(x^0)})$ si existe. Esto se relaciona, como se menciono anteriormente, con el hecho de que $(x^1, 1 - \frac{g(x^1)}{g(x^0)})$ se alcanza sobre Σ_{loc} mediante valores crecientes de t y $(x^2, 1 - \frac{g(x^2)}{g(x^0)})$ mediante valores decrecientes. Por ultimo nótese que en $(x^2, 1 - \frac{g(x^2)}{g(x^0)})$ existe salto debido a que $\tilde{\delta} = -1$ (no depende de (x, t)) y en el caso opuesto (valores crecientes de t) la relación planteada por el Resultado 7.7 se invierte.

Por ultimo proponemos al lector realizar un análisis análogo al anterior para las parametrizaciones anteriormente introducidas en este capítulo. Mediante el anterior ejercicio puede comprobarse que la aparición de puntos de tipo 4 sin posibilidades de saltos al utilizar algoritmos de continuación con valores creciente del parámetro es un fenómeno realmente presente en dichas parámetrizaciones.

Referencias

[1] Alexander, J.C., Li, T.-Y. and Yorke, J.A., Piecewise smooth homotopies, Plenum, New York, 1983.

[2] Allgower, E.L. and Georg, K., Introduction to numerical continuation methods, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] Arnold, V.I., Gusein-Zde, S.M. and Varchenko, A.N., Singularities of differentiable maps I, Birkhauser, Basel, 1985.

[4] Aubin, J.P., Optima and equilibria- an introduction to nonlinear analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Aubin, J.P. and Cellina, A., Differential inclusions, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] Auslender, A., Regularity theorems in sensitivity with non-smooth data in [67] 9-15.

[7] Bank, B., Guddat, J., Klatte, D., Kummer, B. and Tammer, K., Nonlinear parametric optimization, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[8] Bank, B. and Mandel, R., Parametric integer optimization, Math. Res., vol. 39, Akademie-Verlag Berlin, 1988.

[9] Ben-Israel, A., Ben-Tal and Zlobec, S., Optimality in nonlinear programming, Wiley, New York, 1981.

[10] Bertsekas, D.P., Constrained optimization and Lagrange multiplier methods, Academic Press, New York, 1982.

[11] Bertsekas, D.P., On penalty and multiplier methods for constrained minimization, SIAM J. Control and Optimization 14, 1976, 2, 216-235.

[12] Bertsekas, D.P., Enlarging the region of convergence of Newton's method for constrained optimization, JOTA 36, 1982, 2, 221-251.

[13] Blum, E. and Oettli, W., Mathematische optimierung, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[14] Braess, D., Morse-Theory für berandete Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 208, 1974, 133-148.

[15] Bröcker, Th. and Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., Vol. 17, Cambridge University Press, 1975.

[16] Brosowski, B., Parametric semi-infinite optimization, Peter Lang Verlag, Frankfurt a.M., 1982.

[17] Brosowski, B., and Deutsch, F. (eds), Parametric optimization and application, Conference held at the math. Forschungsinstitut Oberwolfach, 16-22 Oct. 1983, Int. Ser. Numer. Math., Birkhauser, Basel, 1985.

[18] Bulirsch, R., Miele, A., Stoer, J. and Well, K.H., Optimal control, Birkhäuser, Basel, 1992.

[19] Chow, S.-N., Mallet-Paret, J. and Yorke, J.A., Finding zeros of maps: homotopy methods that are constructive with probability one, Math. Comp. 32, 1978, 887-899.

[20] Clarke, F.M., Optimization and nonsmooth analysis, Wiley, New York, 1983.

[21] Coddington, E.A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, Mc.Graw-Hill; New York, Toronto, London, 1955.

[22] Demjanov, V. F. and Rubinov, A.M., Constructive nonsmooth analysis, Moskau, 1981 In: Ser. Approximation and optimization, Verlag Peter Lang, Frankfurt a.M., 1995.

[23] Dentcheva, D., Gollmer, R., Guddat, J. and Rükmann, J., Pathfollowing methods in nonlinear optimization II: exact penalty methods, in [40], 200-30.

[24] Dentcheva, D., Guddat, J., Rückmann, J.-J., and Wendler, K., Pathfollowing methods in nonlinear optimization III: multiplier embedding, ZOR, 1994.

[25] Diener, I., On global convergence of path-following methods to determine all solutions to a system of nonlinear equations, Math. program. 39, 1987, 181-9.

[26] Diener, I., Trajectory nets connecting all critical points of a smooth function, Math. Program. 36 (1986), 340-52.

[27] Dontchev, A.L. and Jongen, T.H., On the regularity of the Kuhn-Tucker curve. SIAM J.Control and Optimization 24, 1986, 169-176.

[28] Dontchev, A.L. and Zolezzi, T., Well posed optimization problems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[29] Dupačová, J., On some connections between parametric and stochastic programming, in [67], 74-81.

[30] Dupačová, J., Stability and sensitivity analysis for stochastic programming, Annals of Operations Research 27, 1990, 115-142.

[31] Elster, K.-H., Reinhardt, R., Schäuble, M. and Donath, G., Einführung in die nichtlineare Optimierung, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977.

[32] Ermoliev, Yu. and Wets, J.-B. (eds), Numerical techniques for stochastic optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[33] Evtusenko, J.G., Numerical optimization techniques, Optimization Software Inc., New York, 1985.

[34] Fandom, R., On Modifications of the Standard Embedding in Nonlinear Optimization, in J. Guddat el al (eds). Parametric

Optimization and Related Topics IV, in Approximation and Optimization, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. Main, Bern, New York, Paris, Wien, 1997.

[35] Fiacco, A.F., Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty functions, Math. Program. 10, 1976, 287-311.

[36] Fiacco, A.F., Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming, Academic Press, New York, 1983.

[37] Fiacco, F.V. and McCormick, G.P., Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques, Wiley, New York, 1986.

[38] Fiedler, O. and Römisch, W., Stability in multistage stochastic programming, Annals of Operations Research 56, 1995, 79-93.

[39] Fletcher, R., Practical methods of optimization, Vol. 2, constrained optimization, Wiley, New York, 1981.

[40] Florenzano, M. et. al (eds.), Approximation and Optimization II (Proceedings of the 2nd. International Conference on Approximation and Optimization in the Caribbean, Havana, Cuba, 1993). Ser. Approximation and Optimization, Peter Lang Verlag, Frankfurt a.M., 1995.

[41] Gal, T., Post-optimal Analysis, Parametric Programming Analysis and Related Topics, McGraw-Hill, New York, 1979.

[42] García-Palomares, U.M. and Mangasarian, O.L. Superlinearly convergent quasi-Newton algorithms for nonlinearly constrained optimization problems, Math. Program. 11, 1976, 1-13.

[43] García, C.B. and Zangwill, W.I., Pathways to solutions, fixed points and equilibria , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

[44] Gauvin, J., A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming, Mathematical Programming 12, 1977, 136-8.

[45] Gauvin, J., Theory of nonconvex optimization, École Polytechnique, Montreal, Canada, 1993.

[46] Gfrerer, H., Guddat, J. and Wacker, Hj., A globally convergent algorithm based on embedding and parametric optimization, Computing 30, 1983, 225-252.

[47] Gfrerer, H., Guddat, J., Wacker, Hj. and Zulehner, W., Pathfollowing methods for Kuhn-Tucker curves by an active index set strategy, in A. Baghi and H.Th. Jongen (eds.), Systems and Optimization, Proc. Twente Workshop, Lect. Notes Control Inform. Sci. 66, 1985, Springer-Verlag, Berlin, 111-132.

[48] Gianessi, F., Theorems of the alternative and optimality conditions, J.O.T.A. 42, 1984, 331-65.

[49] Glad, T. and Polak, E., A multiplier method with automatic limitation of penalty growth, Math. Program. 17, 1979, 140-155.

[50] Gollmer,R., Guddat,J., Guerra, F., Nowack, D. and Rückmann, J., Pathfollowing methods in nonlinear optimization I: Penalty embedding. In: Guddat, J. et al. (eds.), Parametric Optimization and Related Topics III, Peter Lang Verlag, Frankfurt a.M., (1993), 163-214.

[51] Golstein E. G., Theory of convex programming, Translation of mathematical monographs 36, American Mathematical Society, Providence RI, 1972.

[52] Golstein, E.G., Dualitätstheorie in der nichtlinearen Optimierung und ihre Anwendung, Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[53] Gómez Bofill, W., Vector Optimization: Singularities, Regularizations, Mathematical Methods of Operations Research, ZOR, Vol 47, Issue 3, (1998), 473-497.

[54] Gómez Bofill, W., Properties of an interior embedding for solving nonlinear optimization problems, Mathematical Programming, Series A, Volume 86, No. 3, (1999), 649-659.

[55] Gómez Bofill, W., On generic quadratic penalty embeddings for nonlinear optimization problems, próximo a publicarse en la revista Optimización

[56] Göpfert, A., Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1973.

[57] Grossmann, Ch. and Kaplan, A. A., Strafmethoden und modifizierte Lagrangemethoden in der nichtlinearen Optimierung, Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.

[58] Grossmann, Ch. and Kleinmichel, H., Verfahren der nichtlinearen Optimierung, Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1976.

[59] Guddat, J., Parametric optimization: pivoting and predictor-corrector continuation, a survey, in [67], 309-363.

[60] Guddat, J. et al. (eds.), Advances in math. optimization, Math. Res. Vol. 45, Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

[61] Guddat, J., Guerra, F. and Jongen, H.Th., Parametric optimization: singularities, pathfollowing and jumps, B.G. Teubner, Stuttgart and John Wiley, Chichester, 1990.

[62] Guddat J., Guerra F. and Nowack D., On the role of the Mangasarian- Fromovitz constraints qualification for penalty, exact penalty and Lagrange multiplier methods, in Mathematical programming with Data Perturbations, Marcel Dekker, Inc, New York, 1997.

[63] Guddat, J., Guerra, F. and Nowack, D., A parametric approach for solution methods in nonlinear optimization, (in preparación).

[64] Guddat, J., Guerra, F., Tammer, K. and Wendler, K., Multiobjective and stochastic optimization based on parametric optimization, Math. Research Vol. 26, Akademie-Verlag, Berlin, 1985.

[65] Guddat, J. and Jongen, H.Th., On global optimization based on parametric optimization, in [60], 63-79.

[66] Guddat, J. and Jongen, H.Th., Structural stability in nonlinear optimization, Optimization 18, 1987, 617-31.

[67] Guddat, J., Jongen, H.Th., Kummer, B. and Nožička, F. (eds.), Parametric optimization and related topics, Math. Res. Vol. 35, Akademie-Verlag, Berlin, 1987.

[68] Guddat, J., Jongen, H.Th., Kummer, B. and Nožička, F. (eds.), Parametric optimization and related topics II, Math. Res. Vol. 62, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

[69] Guddat, J., Jongen, H.Th., Kummer, B. and Nožička, F. (eds), Parametric optimization and Related Topics III, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., 1993.

[70] Guddat. J., Jongen, H.Th. and Nowack,D., Parametric optimization pathfollowing with jumps, in Gomez,A., Guerra, F., Jiménez, M. and Lopez, G. (eds.), Approximation and Optimization, Lect. Notes Math. 1354, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 43-53.

[71] Guddat, J., Jongen,H.Th. and Rückmann, J., On stability and stationary points in nonlinear optimization, J. Aust. Math. Soc., Ser. B 28, 1986, 36-56.

[72] Guddat, J. and Nowack, D., Parametric optimization: pathfollowing and jumps in the set of local minimizers and in the critical set, in [68], 76-111.

[73] Guddat, J., Römisch, W. and Schultz,R., Some applications of mathematical programming techniques in optimal power dispatch, Computing 49, 193-200, 1992.

[74] Guddat, J. und Rückmann, J., One-parametric optimization: jumps in the set of generalized critical points, Control and Cybernetics 23, 1/2, 139-151, 1994.

[75] Guddat, J., Wacker, Hj. and Zulehner, W., On embedding and parametric optimization-a concept of a globally convergent algorithm for nonlinear optimization problems, Math. program. Stud. 21, 79-96, 1984.

[76] Günzel, H., Hirabayashi, R., Jongen, H.Th. and Shindoh, S., On the topological complexity of DC-Sets, Journal of global Optimization 4, 1994, 279-284.

[77] Hasan, M., Poore and A.B., Bifurcation analysis for singularities on a tangent space for quadratic penalty-barrier and multiplier methods for solving constrained optimization problems. Part I, J. of Math. Anal. and Appl., Vol 197, (1996), No.3, 658-678.

[78] Hasan, M., Poore and A.B., Analysis of bifurcation due to loss of linear independence and strict complementary for penalty methods for solving constrained optimization problems, J. of Math. Anal. and Appl., Vol 201, (1996), No.3, 756-785.

[79] Hettich, R. and Zencke, P., Numerische Methoden zur Approximation und semi-infiniten Optimierung, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1982.

[80] Hiriart-Urruty, J.B. and Lemarechal, C., Convex analysis and minimization algorithms I+II, Springer-Verlag, 1993.

[81] Hirsch, M.W., Differential topology, Grad. Texts Math., Vol. 33, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[82] Horst, R. and Tuy, H., Global optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[83] Ioffe, A.D. and Tichomirov, V.M., Theorie der Extremalaufgaben, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

[84] Jahn, J., Introduction to the theory of nonlinear optimization, Springer-Verlag, 1994.

[85] Jimenez Pozo, Miguel Antonio: Medida, Integración y funcionales, Editorial Pueblo y Educación, Habana, Cuba, 1989.

[86] Jiménez, M.A. and Rückmann, J., On equivalent stability properties in semi-infinite optimization, ZOR, Volume 41, 1995, 2, 175-90.

[87] Jongen, H. Th., Parametric optimization: critical points and local minima. Lectures in Applied Mathematics 26, 1990, 317-335.

[88] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., On deformation in optimization, Meth. Oper. Res. 37, 1980, 171-84.

[89] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., On one-parameter families of sets defined by (in)equality constraints, Nieuw Arch. Wiskunde (3), 1982, 307-22.

[90] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., Nonlinear optimization in $\mathbb{R}^n$. I: Morse theory, Chebyshev approximation, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., 1983.

[91] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., Nonlinear optimization in $\mathbb{R}^n$. II: transversality, flows, parametric aspects, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., 1986.

[92] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., On one-parametric families of optimization problems: equality constraints, JOTA 48, 1986, 141-161.

[93] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., Critical sets in parametric optimization, Math. Program. 34, 1986, 333-353.

[94] Jongen, H.Th., Jonker, P. and Twilt, F., Parametric optimization: the Kuhn- Tucker set, in [67], 196-208.

[95] Jongen, H. Th., Möbert, T. and Tammer, K., On iterated minimization in nonconvex optimization, Math. of Opertions Res. 11, 1986, 676-691.

[96] Jongen H. Th., Möbert T., Rückmann, J-J. and Tammer, K, On inertia and Schur complement in optimization. Linear Algebra and Appl. 95 (1987), 97-109.

[97] Jongen, H. Th. and Rückmann, J.-J., Nonlinear optimization: on connected components of level sets. SIAM J. Control Opt. 31, 1995, 1, 86-100.

[98] Jongen, H. Th., Rückmann, J.-J. and Weber, G.-W., One-parametric semi-infinite optimization: on the stability of the feasible set, SIAM J. Opt 4 (1994) 3, 637-648.

[99] Jongen, H.Th. and Triesch, E., Optimierung A, Script zur Vorlesung, Augustinus Buchhandlung Aachen, 1988.

[100] Jongen, H. Th. and Weber, G.-W., Nonconvex optimization and its structural frontiers. In: Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 37-8 (Modern Methods of Optimization, Eds.: W. Krabs and J. Zowe), Springer Verlag, 1992, 151-203.

[101] Jongen, H. Th. and Weber, G.-W., On parametric nonlinear programming, Annals of Operations Research 27, 1990, 253-284.

[102] Jongen, H.Th. and Zwier, G., On the local structure of the feasible set in semi-infinite optimization, Int. Ser. Numer. Math. 72, 1985, 185-202.

[103] Jongen, H.Th. and Zwier, G., On regular semi-infinite optimization, in E.J. Anderson, E.J. and Philpott, A.B. (eds.), Infinite Programming, Lect. Notes Econ. Math. Syst. 259, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 53-64.

[104] Kall, P., Mathematische Methoden des Operations Research, Teubner, 1976.

[105] Kall, P. and Stein, W. Wallace, Stochastic Programming, John Wiley & Sons, 1994.

[106] Kaplan, A. and Tichatschke, R., Stable Methods for Ill-Posed Variational Problems, Akademie Verlag Berlin, 1994.

[107] Klatte, D., Lipschitz continuity of infima and optimal solutions in parametric optimization: the polyhedral case, in [67], 229-49.

[108] Klatte, D. and Thiere, G., Error bounds for solutions of linear equations and inequalities, ZOR, Volume 41, 1995, 2, 191-214.

[109] Kojima, M., Strongly stable stationary solutions in nonlinear programs, in Analysis and Computing of Fixed Points, Academic Press, New York, 1980, 93-138.

[110] Kojima, M. and Hirabayashi, R., Continuation and deformation of nonlinear programs, Math. Program. Study 21, 1984, 150-198.

[111] Kosmol, P., Optimierung und Approximation, de Gruyter, Berlin, 1991.

[112] Krabs, W., Optimierung und Approximation, Teubner, 1975.

[113] Kummer, B., Linearly and nonlinearly perturbed optimization problems, in [67], 249-68.

[114] Kummer, B., Newton's method for nondifferentiable functions. In: Guddat et al. (eds.) Advances in math. optimization, Akademie-Verlag, Ser. Mathem. Res., 1988, 114-125.

[115] Kummer, B., An Implicit Function Theorem for $C^{0,1}$- Equations and Parametric $C^{1,1}$-Optimization, Journ. Math. Analysis and Appl. Vol. 158, No. 1, 35-46, 1991.

[116] Kummer, B., On stability and newton-type methods for lipschitzian equations with applications to optimization problems. In: Kall, P. (Ed.) Lecture Notes in Control and Information Science 180; System Modelling and Optimization, Proceedings of the 15th IPIF Conference, Zürich, 1991, Springer-Verlag, 1992.

[117] Kummer, B., Newton's method based on generalized derivatives for nonsmooth functions: convergence analysis. In: Oettli, W. and Pallaschke, D. (Eds.) Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 382; Advances in Optimization, Proceeding Lambrecht, FRG, 1991, Springer-Verlag, 1992.

[118] Kummer, B., On solvability and regularity of a parametrized version of optimality conditions, ZOR, Volume 41, 1995, 2, 215-30.

[119] Kummer, B., Parametrizations of Kojima's system and relations to penalty and barrier functions, in: Mathematical Programming 76, 579-592, 1997.

[120] Kummer, B., Lipschitzian and Pseudo-Lipschitzian inverse Functions and Applications to nonlinear Optimization, in Mathematical programming with Data Perturbations, Marcel Dekker, Inc, New York, 1997.

[121] Lancaster, P. and Tismenetsky, M., The theory of matrices. 2nd ed., with applications. Academic Press Inc., Boston, 1985.

[122] Lehmann,R., On the numerical feasibility of continuation methods for nonlinear programming problems, Math. Oper. Forsch. Stat. Ser. Opt. 15, 1985, 517-30.

[123] Lehmann, R., An algorithm for solving one parametric optimization problems based on an active-index set strategy, in [67], 268-301.

[124] Levitin, E.S., Perturbation Theory in Mathematical Programming and its Applications, John Wiley & Sons, 1994.

[125] Lommatzsch, K.(ed.), Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung, Akademie-Verlag, Berlin, 1979.

[126] Lu, Y.-C., Singularity theory and an introduction to catastrophe theory, Universitext, Springer-Verlag, 1976.

[127] Luenberger, D.G., Linear and nonlinear programming, Addison-Wesley, Reading, 1984.

[128] Lundberg, B.N., Poore, A.B. and Yang, B., Smooth Penalty Functions and Continuation Methods for Constrained Optimization. In E.L. Allgower and K. Georg, eds., *Lectures in Applied Mathematics Series*, Vo, 26, American Mathematical Society, 1990, Providence, 389-412.

[129] Malanowski, K., Differentiability with respect to parameters, Math. Program. 33, 1985, 352-61.

[130] Malanowski, K., Stability of solutions to convex problems of optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[131] Mangasarian, O.L., Nonlinear programming, McGraw-Hill, New York, 1969.

[132] Mangasarian, O.L. and Fromovitz, S., The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, J. Math. Anal. Applic. 17, 1967, 37-47.

[133] Marti K., Descent directions and efficient solutions in discretely distributed stochastic programs, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[134] Meravy, P., Smooth homotopies for mathematical programming, in [67], 302-15.

[135] Milnor, J., Morse theory. Ann. Math. Stud. No. 51, Princeton University Press, 1963.

[136] Milnor, J., On the Betti numbers of real varietes, Proc. Amer. Math. Soc., 15 April, 1964, 275-280.

[137] Moré, J.J. and Wright, S.J., Optimization software guide, SIAM, Philadelphia, 1993.

[138] Nesterov, Y. and Nemirovskii, A., Interior-point polynomial algorithms in convex programming, SIAM, Philadelphia, 1994.

[139] Nožička, F., Guddat, J. and Hollatz, H., Theorie der linearen Optimierung, Akademie-Verlag, Berlin, 1972.

[140] Nožička, F., Guddat, J., Hollatz, H. and Bank, B., Theorie der linearen parametrischen Optimierung, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[141] Nožička, F., Grygarova, L. and Lommatzsch, K., Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis, Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

[142] Palais, R.S. and Smale, S., A generalized Morse theory, Bull. AMS, Vol. 70, 1964, 165-172.

[143] Pallaschke, D. and Rolewicz, S., Foundations of mathematical optimization, Kluwer Verlag, Academic publisher, Ser. Mathematics and its application, Dordrecht, to appear 1997.

[144] Di Pillo, G. and Grippo, L., An exact penalty function method with global convergence properties for nonlinear programming problems, Math. Program. 36, 1986, 1-18.

[145] Di Pillo, G. and Grippo, L., A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with inequality constraints, SIAM J. Control Optim. 23, 1985, 72-84.

[146] Di Pillo, G. and Grippo, L., Exact penalty functions in constrained optimization, SIAM J. Control Optim. 27, 1989, 1333-1360.

[147] Poore, A.B. and Al-Hassan, Q., The Expanded Lagrangian System for Constrained Optimization Problems. SIAM J. on Control and Optimization, Vol 26, 1988, No.2, 417-427.

[148] Poore, A.B. and Tiahrt, C.A., Bifurcation problems in nonlinear parametric programming, Math. Program. 39, 1987, 189-206.

[149] Psenicnyi, B.N. and Danilin, Ju.M., Numerische Methoden für Extremalaufgaben, Verlag der Wissenschaften Berlin, 1982.

[150] Psenicnyi, B.N., Notwendige Optimalitätsbedingungen, Teubner-Verlag, Leipzig, 1972.

[151] Richter, C., Schittkowski, K. and Hettich, R., Sequential quadratic programming, theory and applications, Akademie-Verlag, Berlin, 1993.

[152] Robinson, S.M., A quadratically-convergent algorithm for general nonlinear programming problems, Math. Program. 3, 1972, 145-56.

[153] Robinson, S.M., Perturbed Kuhn-Tucker points and rates of convergence for a class of nonlinear programming algorithms, Math. Program. 7, 1974, 1-16.

[154] Robinson, S.M. (ed.), Analysis and Computation of Fixed Points, Academic Press, New York, 1980.

[155] Robinson, S.M., Generalized equations and their solutions, Part I: Basic theory, Math. Program. Stud. 10, 1979, 12B-41.

[156] Robinson, S.M., Generalized equations and their solutions, Part II: Applications to nonlinear programming, Math. Program. Stud. 19, 1982, 200-21.

[157] Robinson, S.M., Strongly regular generalized equations, Mathematics of Oper. Res. 5, 1980, 43-62.

[158] Robinson, S.M. and Wets, R.J.-B., Stability in two-stage stochastic programming, SIAM J. Control and Optimization 25, 1987, 1409-1416.

[159] Rockafellar, R.T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[160] Rockafellar, R.T., Network flows and monotropic optimization, Wiley, New York, 1984.

[161] Rockafellar, T.R. and Wets, R.J.-B., Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty, Math. of Oper. Res. 16, 1991, 119-147.

[162] Römisch, W. and Schultz, R., Distribution sensitivity in stochastic programming, Mathematical Programming 50, 1990, 197-226.

[163] Römisch, W. and Schultz, R., Stability analysis for stochastic programs, Annals of Operations Research 30, 1991, 241-266.

[164] Rückmann, J., Einparametrische nichtkonvexe Optimierung: Strukturuntersuchungen und eine Verallgemeinerung des Einbettungsprinzips, Dissertation, TH Leipzig, 1988.

[165] Rückmann, J., Stabilitätseigenschaften in der nichtlinearen Optimierung. Habilitation, Humboldt University Berlin, Dept. of Mathematics,1993.

[166] Rückmann, J., Stability of Noncompact Feasible Sets in Nonlinear Optimization, in [69], 467-502.

[167] Rückmann, J. and Tammer, K., On linear quadratic pertubations in one-parametric nonlinear optimization, Systems Science, 18, 1992, 1, 37-48.

[168] Rückmann, J.-J. and Tammer, K., Relations between the stationary points of a nonlinear optimization problem and a generalized Lagrange dual problem. In: Sebastian, H.-J. and Tammer, K. (eds.), System Modelling and Optimization, Proceedings of the 14th IFIP Conference, Leipzig, July 1989, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 204-218.

[169] Rückmann, J.-J. and Tammer, K., Theoretical foundation of two-level methods in nonconvex optimization. In: Guddat, J et al. (eds.) Advances in Mathematical Optimization, Akademie-Verlag, Berlin, 1988, 180-1909.

[170] Rückmann, J.-J. and Stein, O., On linear and linearized generalized semi-infinite optimization problems, Preprint No. 85, Lehrstuhl C für Mathematik, RWTH Aachen, 1998.

[171] Schittkowski, K., More test examples for nonlinear programming codes, Springer, Berlin, 1987.

[172] Schittkowski, K., Nonlinear programming Codes-Information, Tests, Performance, Lect. Notes Econ. Math. Syst. 183, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[173] Schittkowski, K., The nonlinear Programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian. Part. 1: Convergence analysis, Numer. Math. 38 (1981), 83-114; Part 2: An efficient implementation with linear least squares subproblems, Numer. Math. 38, 1981, 115-27.

[174] Schwedlick, H., Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

[175] Shapiro, A., Sensitivity analysis of nonlinear programs and differentiability properties of metric projections, SIAM Journal of Control and Optimization 25, 1988, 628-645.

[176] Shapiro, A., Perturbation analysis of optimization problems in Banach spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization 13, 1992, 97-116.

[177] Shiryayev, A.N., Probability, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[178] Spanier, E.H., Algebraic topology, Mc.Graw-Hill, 1966.

[179] Spivak, M, Calculus on manifolds, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1965.

[180] Stein, O., The Reduction Ansatz in absence of lower semicontinuity, proximo a publicarse en: Proceedings of the Conference on Parametric Optimization and Related Topics V (Tokyo, 1997).

[181] Stein, O., Trap-doors in the solution set of semi-infinite optimization problems, in: P. Gritzmann, R. Horst, E. Sachs, R. Tichatschke (eds): Recent Advances in Optimization, Springer-Verlag, Berlin, (1997), 348-355.

[182] Stein, O., On parametric semi-infinite optimization, Dissertation, Shaker-Verlag, Aachen,1997.

[183] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice Hall Inc., 1964.

[184] Stoer, J. and Witzgall, C., Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[185] Takens, F., A note on sufficiency of jets, Invent. Math. 13, 1971, 225-231.

[186] Tammer K., The application of parametric optimization and embedding to the foundation and realization of a generalized primal decomposition approach, in [67], 376-86.

[187] Tammer, K., Two-level optimization with approximate solutions in the lower level, ZOR, Volume 41, 1995, 2, 231-49.

[188] Tiahrt, C.A. and Poore, A.B., Bifurcation and persistence of minima in nonlinear programming. In: Computation and Control (Bozeman, MT, 1988), 343-353, Progr. Systems Control Theory, 1, Birkhäuser, Boston, 1989.

[189] Tichomirov, V.M., Fundamental principles of the theory of extremal problems, Wiley, Chichester, 1986.

[190] Törn, A. and Zilinskas, A., Global Optimization, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1989.

[191] Tröltzsch F., Optimality conditions for parabolic control problems and applications, Teubner, Leipzig, 1984.

[192] Wacker, Hj. (ed.), Continuation Methods, Academie Press, New York, 1978.

[193] Wendler, K., Implementation of a pathfollowing procedure for solving nonlinear one-parametric optimization problems. In: B. Brosowski et al. (eds.) Multicriteria Decision, Peter Lang Verlag, Frankfurt a.M., 1993, 139-163.

[194] Wets, R.J., Grundlagen konvexer Optimierung, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[195] Wets, R.J.-B., On the continuity of the value of a linear program and of related polyhedral-valued multifunction. Math. Programming Study 24, 1985, 14-29.

[196] Wright, M. H., Interior methods for constrained optimization, Acta Numerica, 1991, 341-407.

[197] Zlobec, S., Survey on input optimization, Optimization 18, 1987, 309-48.

[198] Zulehner, W., A simple homotopy method for determining all isolated solutions to polynomial systems, Math. Comput. 50, 1988, 167-77.

[199] Zulehner, W., On the solutions to polynomial systems obtained by homotopy methods, Numer. Math. 54, 1988, 303-17.

Indice