Uma Nota sobre a Geometria de Distribuições

C. E. Harle

1. Introdução

Um resultado clássico da teoria das superfícies do espaço euclidiano $\mathbb{E}^3$ afirma que toda superfície compacta desse espaço possui pelo menos um ponto elítico.

Este fato foi generalizado para dimensões maiores, tendo-se estabelecido que toda hipersuperfície compacta de um espaço euclidiano $\mathbb{E}^n$, $n \geq 1$ possui pelo menos um ponto no qual uma das duas possíveis segundas formas fundamentais é positiva definida.

É evidente que se uma distribuição integrável de $\mathbb{E}^n$ possuir uma variedade integral compacta então esta última, considerada como hipersuperfície de $\mathbb{E}^n$ terá a propriedade mencionada acima.

Nosso objetivo nesta nota é o de estender esse resultado para distribuições diferenciáveis de codimensão 1 de $\mathbb{E}^n$, arbitrárias, isto é, não possuindo necessariamente variedades integrais, mediante a introdução de uma noção apropriada de segunda forma fundamental.

2. A Segunda Forma Fundamental

Seja $(M^n, <,>)$ uma variedade reimanniana de classe C^∞, dimensão $n \geq 2$ e com conexão riemanniana ∇ e curvatura R.

Dada uma distribuição Σ de M^n, de classe C^∞ e codimensão 1 indiquemos, para cada ponto $p \in M^n$, por Σ_p o hiperlano do espaço tangente T_pM^n, induzido por essa distribuição.

Seja e_{n+1} um campo de vetores de M^n (localmente definido), unitário e tal que $e_{n+1}(p) \in \Sigma_p^\perp$ para todo p.

Para cada ponto p do campo de definição de e_{n+1} (supostamente definido em uma subvariedade aberta de M^n, fica definida a aplicação linear:

$$\hat{A}_p : \Sigma_p \to \Sigma_p$$

por meio de

(1) $$\widehat{A}_p(v) = -\nabla_v e_{n+1}, \forall v \in \Sigma_p.$$

Convém notar que a aplicação $\widehat{A}_p$ não é em geral auto adjunta relativamente à estrutura euclidiana de Σ_p induzida pela métrica riemanniana dada. De fato, não é difícil ver-se que uma condição necessária e suficiente para que $\widehat{A}_p$ seja auto adjunta em todos os pontos é que a distribuição Σ seja integrável. Nestas condições, é claro, o operador $\widehat{A}_p$ é a segunda forma fundamental da variedade integral de Σ, passando por p, relativamente à normal $e_{n+1}(p)$.

Definição 2.1. Chamaremos de segunda forma fundamental da distribuição Σ, no ponto p, relativamente a $e_{n+1}(p)$, à parte simétrica de $\widehat{A}_p$, i.e à transformação linear

(2) $$A_p = \frac{1}{2}(\widehat{A}_p + {}^t\widehat{A}_p).$$

A seguir mostraremos que é possível construir-se uma hipersuperfície de M^n, tangente a Σ_p, naturalmente associada à distribuição Σ e cuja segunda forma fundamental relativamente ao vetor normal $e_{n+1}(p)$ coincide a transformação A_p. Tal hipersuperfície é uma extensão natural da noção de subvariedade geodésica de uma variedade riemanniana.

3. Trajetórias da Distrição $\sum$

Definição 3.1. Chama-se trajetória de Σ, determinada por $v \in \Sigma_p$ à curva $\gamma = \gamma(t)$, solução do sistema de equações diferenciais;

(3) $$\frac{\nabla\dot{\gamma}}{dt} + < \dot{\gamma}, \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} > e_{n+1}(\gamma) = 0$$

satisfazendo às condições:

(4) $$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v.$$

Devemos notar que para toda trajetória γ da distribuição Σ, temos que $\gamma(t) \in \Sigma_{\gamma(t)}$, para todo valor de t.

Como o sistema (3) é homogêneo temos que se γ for uma trajetória então para toda constante c, a curva

$$\mu(t) = \gamma(ct)$$

também será uma trajetória de Σ.

Utilizando este fato podemos definir uma imersão:

$$\exp_p^{(\Sigma)} : D \subset \Sigma_p \to M^n$$

de uma bola aberta de Σ_p centrada em $0_p \in \Sigma_p$, da maneira habitual, i.e

(5) $$\exp_p^{(\Sigma)} v = \gamma_v(1)$$

onde γ é a trajetória de Σ definida pelas condições

$$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v.$$

Definição 3.2. Ao par $(D, exp_p^{(\Sigma)})$ daremos o nome de hipersuperfície Σ-geodésica no ponto p.

Com estas noções podemos enunciar o seguinte fato:

Proposição 3. *Em cada ponto $p \in M^n$, o operador linear A_p é a segunda forma fundamental de qualquer hipersuperfície Σ-geodésica neste ponto, segundo a normal $e_{n+1}(p)$*

Para estabelecermos este fato consideraremos certos campos de vetores ao longo de trajetórias de Σ, obtidos por variações dessas trajetórias.

Estes campos são, portanto, análogos aos campos de Jacobi definidos ao longo de geodésicas de uma variedade riemanniana.

4. Campos Variacionais

Definição 4.1. Dada uma trajetórias γ de Σ, chama-se campo variacional ao longo de γ a todo campo de vetores diferenciável J ao longo dessa curva, satisfazendo à relação

(6) $$\frac{\nabla^2 J}{dt^2} + (R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma})^\Sigma +$$

$$+ < \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} > + \left(< \dot{\gamma}, \frac{\nabla}{dt} \nabla_J e_{n+1} > \right) e_{n+1} +$$

$$+ < \dot{\gamma}, \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} > \nabla_J e_{n+1} = 0$$

...

Nesta expressão, $(R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma})^\Sigma$ denota a projeção ortogonal do campo $R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ sobre a distribuição Σ ou, mais precisamente:

$$(R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma})^\Sigma = R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} - < R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_{n+1} > e_{n+1}.$$

A relação (6) permite afirmar que dados vetores $v, w \varepsilon \Sigma_p$, existe um e um único campo variacional J ao longo da trajetória γ, satisfazendo às condições iniciais:

$$(7) \qquad J(0) = v, \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_0 = w.$$

A seguir verificaremos que *podemos obter campos variacionais ao longo da trajetória γ, por meio de variações dessa trajetória.*

Para isto consideremos uma variação (diferencial) de γ:

$$f = f(t, \varepsilon)$$

tal que $f(t, 0) = \gamma(t)$ e a curva f_ε definida por

$$f_\varepsilon(t) = f(t, \varepsilon)$$

seja uma trajetória, para todo ε.

Seja J o campo ao longo de γ dado por:

$$(8) \qquad J(t) = f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varepsilon=0}.$$

Verificaremos a seguir que J é um campo variacional ao longo de γ. Para isto re-escrevemos a equação diferencial das trajetórias de Σ:

$$(9) \qquad \frac{\nabla}{dt} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{dt}(e_{n+1} \circ f) > e_{n+1} \circ f.$$

Por derivação covariante parcial relativamente à variável ε obtemos a partir da relação (9):

$$(10) \qquad \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\nabla}{\partial t} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{2}{\partial \varepsilon} < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{dt} e_{n-1} \circ f > e_{n+1} \circ f +$$

$$+ < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} \circ f > \frac{\nabla}{\partial \varepsilon}(e_{n+1} \circ f) = 0.$$

O segundo termo do primeiro membro de (10) pode ser escrito:

$$(11) \qquad (11) \quad \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} < \mathrm{f}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{\mathrm{dt}} \mathrm{e}_{n+1} \circ \mathrm{f} > =$$

$$= < \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} \circ f > + < f_*\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right), \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\nabla}{\partial t} e_{n+1} \circ f >$$

Agora podemos re-escrever o segundo termo do segundo membro de (11), utilizando a curvatura R:

$$(12) \qquad < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\nabla}{\partial t} e_{n+1} \circ f > =$$

$$= < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial t} e_{n+1} \circ f > +$$

$$+ < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), R\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) e_{n+1} \circ f >.$$

O primeiro termo do primeiro membro de (10) pode ser substituído por:

$$(13) \qquad \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\nabla}{\partial t} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + R\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Para $\varepsilon = 0$. obtemos de (12):

$$(14) \qquad < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\nabla}{\partial t} e_{n+1} \circ f >_{\varepsilon=0} =$$

$$= < \dot\gamma, \frac{\nabla}{dt}\left(\nabla_J e_{n+1}\right) > + < \dot\gamma, R(J, \dot\gamma)\, e_{n+1} >.$$

De (11) e (14) vem:

$$(15) \cdot \qquad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} < f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} \circ f\right) >_{\varepsilon=0} =$$

$$= < \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla}{dt}(e_{n+1} \circ \gamma) > + < \dot\gamma, \frac{\nabla}{dt}(\nabla_J e_{n+1}) > + < \dot\gamma, R(J, \dot\gamma)\, e_{n+1} >$$

O terceiro termo do primeiro membro de (10), para $\varepsilon = 0$ é dado por:

$$(16) \qquad \left. < f_* \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\nabla}{dt}(e_{n+1} \circ f) > \frac{\nabla}{\partial \varepsilon}(e_{n+1} \circ f) \right|_{\varepsilon=0} =$$

$$= < \dot\gamma, \frac{\nabla}{dt}(e_{n+1} \circ \dot\gamma) > \nabla_J e_{n+1}.$$

Por outro lado, a relação (13) nos fornece:

$$(17) \qquad \left.\frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\nabla}{\partial t} f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\nabla^2 J}{dt^2} + R(J, \dot\gamma)\dot\gamma.$$

Finalmente, obtemos a equação variacional (6) a partir das relações (10), (14), (15), (16) e (17).

Do fato de podermos obter campos variacionais, considerando variações de trajetórias e ainda do fato de um campo variacional J ser completamente determinado pelos vetores $J(0)$ e $\left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0}$, concluímos imediatamente que *qualquer campo variacional J, satisfazendo às condições:*

$$J(0) = 0, \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0} \in \Sigma_p \,; (p = \gamma(0))$$

é tangente à qualquer hipersuperfície geodésica de Σ *em p, ao longo da trajetória* γ.

Finalmente, a partir dessas observações, podemos determinar a segunda forma fundamental de uma hipersuperfície geodésica de Σ, em um ponto $p \varepsilon M^n$, relativamente à normal e_{n+1}.

Para isso, indiquemos por N o campo de normais unitárias dessa hipersuperfície; tal que $N(p) = e_{n+1}(p)$.

Devemos notar que, em geral, os campos N e e_{n+1} não coincidem embora isto se dê no caso em que Σ é integrável.

Fixemos, então, uma trajetória γ, tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = v$.

Para todo campo variacional J ao longo de γ satisfazendo às condições:

$$J(0) = 0, \left.\frac{J}{dt}\right|_{t=0} \in \Sigma_p$$

temos:

(18) $$< N(\gamma(t)), J(t) > = 0, \text{ para todo} t.$$

Derivando-se covariantemente duas vezes ambos os membros de (18) vira:

(19) $$< \frac{\nabla^2 N}{dt^2}, J > + 2 < \frac{\nabla N}{dt}, \frac{\nabla J}{dt} > + < N, \frac{\nabla^2 J}{dt^2} > = 0.$$

Em particular, para $t = 0$:

(20) $$2 < \frac{\nabla N}{dt}, \frac{\nabla J}{dt} >_{t=0} + < e_{n+1}(p), \left.\frac{\nabla^2 J}{dt^2}\right|_{t=0} > = 0.$$

Utilizando a equação variacional (6) teremos:

(21) $$(21) \quad < e_{n+1}(p), \left.\frac{\nabla^2 J}{dt^2}\right|_{t=0} > =$$

$$= - < \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{\nabla}{dt}(\nabla_J e_{n+1})\right|_{t=0} > - < \dot\gamma(0), \nabla_{\gamma(0)} e_{n+1} >$$

De (20) e (21) vem:

(22) $$< \frac{\nabla N}{dt}, \frac{\nabla J}{dt} >_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[< \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla}{dt} e_{n+1} >_{t=0} + < \dot\gamma, \frac{\nabla}{dt} \nabla_J e_{n+1} >_{t=0} \right].$$

Tendo em conta que $J(0) = 0$, podemos escrever:

(23) $$\left.\frac{\nabla}{dt}(\nabla_J e_{n+1})\right|_{t=0} = \nabla\left(\frac{\nabla J}{dt}\right)_{t=0} e_{n+1}.$$

Assim, de (22) e (23) obtemos:

(24) $$< - \left.\frac{\nabla N}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0} > =$$

$$= \frac{1}{2}\left(< \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0}, \hat{A}_p(\dot\gamma(0)) > + < \dot\gamma(0), \hat{A}_p\left(\frac{\nabla J}{dt}\right)_{t=0} > \right)$$

ou

(25) $$< - \left.\frac{\nabla N}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0} > = < \left.\frac{\nabla J}{dt}\right|_{t=0}, A_p(\dot\gamma(0)) >.$$

Notando que os vetores $\dot\gamma(0)$ e $\nabla J/dt|_{t=0}$ podem ser tomados arbitrariamente em Σ_p e que $-\nabla N/dt|_{t=0}$ é o valor da segunda forma fundamental da superfície geodésica considerada, no vetor $\gamma(0)$ fica provado que esta segunda forma fundamental coincide com a parte simétrica de $\hat{A}_p$.

c.q.d.

5. Domínios de Acessibilidade

Consideraremos agora uma noção que para os nossos propósitos, desempenha, para distribuições arbitrárias, o papel das variedades integrais de distribuições integráveis.

Definição 5.1. Uma curva diferencial $\mu = \mu(t)$ de M^n é dita uma curva integral da distribuição Σ se:

$$\mu(t) \varepsilon \Sigma_{\mu(t)}, \text{para todo } t.$$

Definição 5.2. Dado um ponto $p \varepsilon M^n$, chama-se domínio de acessibilidade de p, ao subconjunto $\mathscr{D}_{(p)}$ de M^n formado por aqueles pontos que podem ser ligados ao ponto p, mediante uma curva contínua, diferenciável por partes de tal modo que cada segmento diferenciável desta curva seja uma curva integral de Σ.

Com esta noção podemos enunciar o seguinte resultado para distribuições de $\mathbb{R}^n$:

Todo domínio de acessibilidade $\mathscr{D}_p$ de Σ que é compacto contém um ponto q, no qual a segunda forma fundamental (relàtivamente à normal conveniente), é positiva definida.

A demonstração desse fato é muito simples e segue as linhas habituais. De fato, sendo $\mathscr{D}_p$ compacto a função quadrado da distância à origem admite um ponto máximo que será denotado por q. Como $\mathscr{D}_p$ contém uma hipersuperfície geodésica de Σ em q segue que este ponto também será um ponto de máximo para a restrição da função quadrado da distância à origem à esta hipersuperfície. Daí segue que a segunda forma fundamental A_q é definida positiva (para uma conveniente normal $e_{n+1}(q)$).

c.q.d.

Referências

[1] E. Cartan – *Sur la representation Geometrique des Systemes Materiels Non Holonomes;* Atti Congr. Int. Matem. (1928).

[2] R. Hermann – *Some Differential Geometric Aspects of the Lagrange Variational Problem;* Illinois J. Math. (1962).

Instituto de Matemática e Estatística; U. de São Paulo São Paulo.