

## Une action exotique libre de $Z_5$ sur $S^5$

par  
MARCOS SEBASTIANI

1. L'action qu'on va considérer est un cas particulier du type d'actions considérées dans [1]. Elle est donc différentiable et le mot "exotique" veut dire qu'elle n'est pas différentiablement équivalente à une action linéaire. Plus précisément, on prouvera que son espace d'orbites est s-parallélisable et il est bien connu (voir aussi la remarque qui suit le corollaire 1) qu'un espace lenticulaire de dimension 5 et groupe fondamental  $Z_5$  n'est pas s-parallélisable.

La démonstration de la formule (1) est essentiellement la même que celle de [10] §7 pour le cas  $k = 1$ , mais il y a un erreur dans le théorème 3 de ce travail.

Soit  $G \subset S^1$  le groupe de racines  $m$ -èmes de 1 et soit  $t = \exp(2\pi i/m)$  le générateur. Supposons que  $G$  opère librement sur un espace  $X$ . Soit  $k$  un entier. Faisons opérer  $G$  sur  $X \times \mathbb{C}$  par:

$$t(x, z) = (tx, t^k z), \quad x \in X, z \in \mathbb{C}.$$

La projection canonique  $X \times \mathbb{C} \rightarrow X$  induit une application

$$(X \times \mathbb{C})/G \rightarrow X/G$$

qui est une fibration vectorielle complexe de dimension 1 qu'on notera  $\xi_k$ . Observons que:

a) Si  $k = 0 \pmod m$  alors  $\xi_k$  est trivial

b)  $\xi_k \otimes \xi_l = \xi_{k+l}$ , l'isomorphisme étant induit par l'application:

$$X \times (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \rightarrow X \times \mathbb{C}$$

qui envoie  $(x, z_1 \otimes z_2)$  dans  $(x, z_1 z_2)$ .

LEMME 1. Supposons  $X$  2-connexe. Soit

$$\alpha_{X/G} = c_1(\xi_1).$$

Alors  $\alpha_{X/G}$  est un générateur de

$$H^2(X/G, Z) = Z_m$$

et

$$c_1(\xi_k) = k \cdot \alpha_{X/G}.$$

Démonstration:  $G$  opère sur  $X \times S^1$  par

$$t(x, z) = (tx, tz), \quad x \in X, \quad z \in S^1$$

et l'espace quotient  $(X \times S^1)/G$  est l'espace total du fibré en sphères de  $\xi_1$ .

La projection canonique  $X \times S^1 \rightarrow S^1$  induit, par passage au quotient, une fibration localement triviale à fibre type  $X$ :

$$(X \times S^1)/G \rightarrow S^1$$

La suite spectrale de cette fibration nous dit que  $H^2((X \times S^1)/G, Z) = 0$ .

Considérons la suite exacte de Gysin du fibré en sphères de  $\xi_1$ . On obtient:

$$H^0(X/G, Z) \rightarrow H^2(X/G, Z) \rightarrow H^2((X \times S^1)/G, Z)$$

exacte, où le premier homomorphisme est le cup-produit par la classe de Euler de  $\xi_1$ , qui est précisément  $c_1(\xi_1)$ . ([2]).

Comme cet homomorphisme doit être surjectif, on obtient la première affirmation du Lemme 1.

Si  $k > 0$ , la deuxième affirmation résulte de

$$\xi_k = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_1$$

et de [3] Satz 4.4.3. Si  $k < 0$  on peut se ramener au cas  $k > 0$  en choisissant  $l > 0$  tel que  $k + lm > 0$ . On a:

$$\xi_k = \xi_k \otimes \xi_{lm} = \xi_{k+lm}$$

et

$$k \cdot \alpha_{X/G} = (k + lm)\alpha_{X/G}.$$

2. Soient maintenant  $q_1, \dots, q_n$  des entiers premiers avec  $m$ .

Si on fait opérer  $G$  sur  $\mathbb{C}^n$  par:

$$t(z_1, \dots, z_n) = (t^{q_1} z_1, \dots, t^{q_n} z_n)$$

on obtient une action libre de  $G$  sur  $S^{2n-1}$  dont l'espace d'orbites est l'espace lenticulaire  $L_m(q_1, \dots, q_n)$ .

COROLLAIRE (Szczarba)

$$p(L_m(q_1, \dots, q_n)) = (1 + q_1^2 \alpha^2) \dots (1 + q_n^2 \alpha^2)$$

où  $\alpha = \alpha_{S^{2n-1}/G}$  est le générateur de  $H^2(L_m(q_1, \dots, q_n), Z)$  défini dans le Lemme 1.

Démonstration: L'isomorphisme évident

$$\tau(S^{2n-1}) \oplus \theta^1 = S^{2n-1} \times \mathbb{C}^n$$

( $\tau$ , fibré tangent;  $\theta^1$ , fibré réel trivial de dimension 1) est équivariant, où l'action de  $G$  sur  $\tau(S^{2n-1})$  est l'induite par son action sur  $S^{2n-1}$ , l'action sur  $\theta^1$  est triviale, et l'action sur  $S^{2n-1} \times \mathbb{C}^n$  est:

$$t(x, u) = (tx, tu), \quad x \in S^{2n-1}, \quad u \in \mathbb{C}^n.$$

Par passage au quotient on obtient:

$$\tau(L_m(q_1, \dots, q_n)) \oplus \theta^1 = \xi_{q_1} \oplus \dots \oplus \xi_{q_n}.$$

Donc,

$$p(L_m(q_1, \dots, q_n)) = (1 + c_1^2(\xi_1)) \dots (1 + c_1^2(\xi_{q_n}))$$

[3] Satz 4.5.1. Le corollaire résulte alors du Lemme 1.

Remarque. Le corollaire précédent implique que si  $m = 5$  et  $n = 3$  alors  $L_m(q_1, \dots, q_n)$  n'est pas s-parallelisable.

En effet, si

$$p_1(L_5(q_1, q_2, q_3)) = 0$$

il existerait une solution du problème:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0 \pmod{5} \text{ et } (q_i, 5) = 1 \quad i = 1, 2, 3$$

puisque  $H^4(L_5(q_1, q_2, q_3)) = Z_5$  avec générateur  $\alpha^2$ .

Considérons maintenant l'hypersurface de Brieskom-Pham:

$$(S) \quad F(z_1, \dots, z_n) = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n} = 0 \quad a_j \geq 2, \quad 1 \leq j \leq n$$

Supposons que

$$a_1 q_1 = a_2 q_2 = \dots = a_n q_n = k \pmod{m},$$

pour un certain entier  $k$ . Alors,

$$(*) \quad F(t \cdot (z_1, \dots, z_n)) = t^k F(z_1, \dots, z_n)$$

ce qui nous dit que l'hypersurface que nous considérons est invariante par l'action de  $G$ . Soit  $\Sigma$  l'intersection de  $(S)$  avec  $S^{2n-1}$ . Alors  $\Sigma$  est une sous-variété différentiable de  $S^{2n-1}$  et, par restriction,  $G$  opère librement et différentiablement sur  $\Sigma$ .

Soit  $V$  la sous-variété de  $\mathbb{C}^n - \{0\}$  définie par  $(S)$ . Soit  $\nu(V)$  son fibré normal complexe, sur lequel  $G$  opère.

La correspondance:

$$z = (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\overline{(\partial F / \partial z_1)(z)}, \dots, \overline{(\partial F / \partial z_n)(z)})$$

est une section jamais nulle de  $\nu(V)$ .

En dérivant (\*) respect à  $z_j$  on obtient:

$$t^k \overline{\partial F / \partial z_j (t^{q_1} z_1, \dots, t^{q_n} z_n)} = t^{kj} \overline{\partial F / \partial z_j (z_1, \dots, z_n)}$$

Ceci implique que l'isomorphisme

$$\nu(V) = V \times \mathbb{C},$$

induit par la section de  $\nu(V)$ , est équivariant, où  $G$  opère sur  $V \times \mathbb{C}$  par:

$$t(x, z) = (tx, t^k z) \quad x \in V, \quad z \in \mathbb{C}.$$

D'autre part, on a un isomorphisme équivariant:

$$\tau(V) \oplus \nu(V) = V \times \mathbb{C}^n$$

où  $G$  opère sur  $V \times \mathbb{C}^n$  par:

$$t(x, z_1, \dots, z_n) = (tx, t^{q_1} z_1, \dots, t^{q_n} z_n).$$

Donc, on a finalement:

$$\tau(V/G) \oplus \xi_k = \xi_{q_1} \oplus \dots \oplus \xi_{q_n}.$$

Ceci implique:

$$\tau(\Sigma/G) \oplus \theta^1 \oplus \xi_k = \xi_{q_1} \oplus \dots \oplus \xi_{q_n}.$$

Considérons le cas particulier suivant:

$$\begin{array}{ll} m = 5 & n = 4 \\ a_1 = a_2 = a_3 = 2 & a_4 = 3 \\ q_1 = q_2 = q_3 = 3 & q_4 = 2 \end{array}$$

On peut donc prendre  $k = 1$ . Alors, d'après l'isomorphisme de plus haut:

$$p_1(\Sigma/G) + p_1(\xi_1) = 3 \cdot p_1(\xi_3) + p_1(\xi_2)$$

puisque la cohomologie de  $\Sigma/G$  ne contient pas de la 2-torsion. Soit  $\alpha = \alpha_{\Sigma/G}$  le générateur de  $H^2(\Sigma/G, \mathbb{Z})$  introduit au Lemme 1. Alors,

$$p_1(\Sigma/G) + \alpha^2 = 3 \cdot 9\alpha^2 + 4\alpha^2 = \alpha^2,$$

puisque  $p_1(\xi) = c_1^2(\xi)$  pour tout fibré vectoriel complexe de dimension 1 ([3] Satz 4.5.1) et par le Lemme 1.

Donc,

$$(2) \quad p_1(\Sigma/G) = 0.$$

On sait que  $\Sigma$  est difféomorphe à  $S^5$  dans ce cas particulier ([4] et [5]). Alors, on a une action libre de  $G = Z_5$  sur  $S^5$ .

**PROPOSITION:** L'action différentiable libre de  $Z_5$  sur  $S^5$  qu'on vient de construire a un espace d'orbites  $s$ -parallelisable et est, donc, exotique.

*Démonstration:* Soit  $K = S^5/G$  et supposons choisie une triangulation sur  $K$ . Les obstructions à la  $s$ -parallelisabilité de  $K$  appartiennent à

$$H^{i+1}(K, \pi_i(SO(6))) \quad 1 \leq i \leq 4.$$

D'après [7] on vérifie que le seul non-nul de ces groupes est:

$$H^4(K, \pi_3(SO(6))) = H^4(K, \mathbb{Z}) = Z_5.$$

Soit  $\mu \in H^4(K, \pi_3(SO(6)))$  l'obstruction correspondante. Il suffira de prouver  $\mu = 0$ .

Soit  $V$  la variété de Stiefel des 5-répères orthonormaux dans  $R^6$  et  $W$  la variété de Stiefel des 5-répères orthonormaux dans  $C^6$ .

On a de projections naturelles:

$$p_1 : SO(6) \rightarrow V$$

$$p_2 : U(6) \rightarrow W$$

D'autre part, l'identité  $R^6 \otimes \mathbb{C} = C^6$  induit des applications:

$$\gamma_1 : SO(6) \rightarrow U(6)$$

$$\gamma_2 : V \rightarrow W$$

Evidemment,  $\gamma_2 \circ p_1 = p_2 \circ \gamma_1$ . Ceci induit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^4(K, \pi_3(SO(6))) & \xrightarrow{\gamma_1^*} & H^4(K, \pi_3(U(6))) \\ \downarrow p_1^* & & \downarrow p_2^* \\ H^4(K, \pi_3(V)) & \xrightarrow{\gamma_2^*} & H^4(K, \pi_3(W)) \end{array}$$

Comme  $p_2$  est une fibration à fibre  $S^1$  on voit que  $p_2^*$  est un isomorphisme.

D'après [8] exp. 16 § 2, on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow \pi_3(SO) \xrightarrow{\gamma_1} \pi_3(U) \rightarrow Z_2 \rightarrow 0.$$

Considérant la suite exacte de cohomologie associée à cette suite exacte, il résulte que le noyau de  $\gamma_1^*$  est un 2-sous-groupe de  $H^4(K, \pi_3(SO)) = Z_5$ . Donc,  $\gamma_1^*$  est injectif.

La définition des classes de Chern comme obstructions nous donne:

$$\gamma_2^*(p_1^*(\mu)) = c_2((\tau(K) \oplus \theta^1) \otimes C) = p_1(\tau(K)) = 0, \text{ d'après (2).}$$

Alors,  $p_2^*(\gamma_1^*(\mu)) = 0$ , ce qui implique  $\mu = 0$ .

## Bibliographie

- [1] BRIESKORN, E. "Singularitäten von Hyperflächen". Notes mimeographiées.
- [2] MILNOR, J. "Lectures on characteristic classes". Cours mimeographié. Princeton.
- [3] HIRZEBRUCH, F. "Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie". Springer-Verlag 1956.
- [4] BRIESKORN, E. "Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten". Inv. Math. 2(1966) 1-14.
- [5] KERVAIRE, M. and MILNOR, J. "Groups of homotopy spheres I". Ann. of Math. 77 (1963) 504-537.
- [7] BOTT, R. "The stable homotopy of classical groups". Ann. of Math. 70(1959) 313-337.
- [8] CARTAN, H. et MOORE, J. C. "Séminaire ENS n.° 12 (1959/60). Secrétariat Mathématique.
- [9] SZCZARBA, R. "On tangent bundles of fibre spaces and quotient spaces". Amer. J. of Math. 86(1964) 685-697.
- [10] ORLIK, P. "Smooth homotopy lens spaces" Mich. Math. J. 16 (1969) 245-255.