Réduction simultanée d'un croisement normal et d'un volume

J. P. Françoise

J. Vey est à l'origine du problème de réduction simultanée d'un germe de fonction et d'une forme de volume avec son lemme de Morse isochore analytique [5]. Par la suite, il y eût une extension au cas d'une singularité isolée quelconque en version analytique [1].

L'objet de cette courte note est de faire avancer quelque peu la situation du cas indéfiniment différentiable en traitant complètement le croisement normal.

Soit donc dans R^n, 0 un germe C^∞ de fonction qui s'écrit dans un système de coordonnées x, $P = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ et $\omega = a(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ un germe de forme de volume avec $a(0) = 1$.

Ecrivons $p_i = p_i' d\ (i = 1, \dots, n)$ où d est le p.g.c.d. des p_i. Notons $\overline{\omega}_j = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{jp_i'-1}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ pour $j = 1, \dots, d$.

Nous visons le

Theoreme. *Il existe un difféomorphisme φ qui conserve P et qui ramène ω à la forme réduite*

$$\varphi^*(\omega) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(P)\overline{\omega}_j$$

les fonctions ψ_j sont définies modulo des fonctions plates de P, leurs jets infinis sont caractéristiques de la forme ω.

Conformément à [1] ce genre de résultat s'obtient avec la méthode de Moser et un lemme de cohomologie relative auquel il faut ajouter un argument de platitude pour régler le cas indéfiniment différentiable. Il va de soit que le théorème énoncé vaut tout autant en formel et en analytique réel ou complexe comme la preuve qui suit va l'établir.

Commençons par rappeler la méthode de Moser [2].

Lemme 1. *Soient ω et ω' deux formes de volume avec $\omega(0) = \omega'(0) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et telles que $\omega - \omega' = d\eta$ avec $dP \wedge \eta = 0$, alors il existe un difféormorphisme φ tel que $\varphi^*(P) = P$ et $\varphi^*\omega = \omega'$.*

Recebido em 30/03/81.

Preuve. On considère le chemin ($t \in [0, 1]$) de formes de volume $\omega_t = \omega' + t(\omega - \omega')$ et on cherche un arc de difféomorphismes φ_t tel que

$$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0 = \omega'$$
$$\varphi_t^* P = P.$$

Par dérivation cela revient à trouver un arc de champ de vecteur X_t tel que

$$\theta_{X_t}\omega_t = -\dot{\omega} = \omega' - \omega = d\eta$$
$$\theta_{X_t}P = X_t \cdot P = 0.$$

Un tel X_t peut être défini par

$$l_{X_t}\omega_t = \eta,$$

en effet $\theta_{X_t}\omega_t = dl_{X_t}\omega_t = d\eta$ et $dP \wedge l_{X_t}\omega_t = (X_t \cdot P)\omega_t = dP \wedge \eta = 0$ et donc $\theta_{X_t} \cdot P = 0$. Après intégration, on conclut en prenant $\varphi = \varphi_1$.

Précisons maintenant la cohomologie relative formelle (ou analytique), pour cela nous notons Ω^n le $\mathcal{O}$-module des formes de degré maximal, $\overline{\Omega}^{n-1}$ le $\mathcal{O}$-module des $n-1$ formes η telles que $dP \wedge \eta = 0$.

On considère $\Omega^n/d\overline{\Omega}^{n-1}$ comme $C[[t]]$ module où l'action de t est la multiplication par P.

Lemme 2. *L'espace $\Omega^n/d\overline{\Omega}^{n-1}$ est un $C[[t]]$ module libre de dimension d, dont les classes des $\overline{\omega}_j$ modulo $d\overline{\Omega}^{n-1}$ constituent une base.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{O}$ et $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, écrivons $f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$ et cherchons à décomposer

$$fd^n x = d\eta + \sum_{j=1}^{d} \psi_j(P)\overline{\omega}_j$$

avec $\eta \in \overline{\Omega}^{n-1}$.

On peut procéder séparément par chaque monôme $f_\alpha x^\alpha$ et en définitive, il faut considérer le problème suivant.

Etant donné un monôme $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ il s'agit de savoir pour quelles valeurs du multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on est assuré de l'existence de $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tels que

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} x^\alpha &= \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} \\ 0 &= \frac{\partial x^p}{\partial x_1}\eta_1 + \ldots + \frac{\partial x^p}{\partial x_n}\eta_n. \end{aligned}$$

On peut chercher $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sous la forme

$$\eta_1 = A_1 x_1^{\alpha_1+1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \ldots, \eta_n = A_n x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n+1}$$

et le système (I) équivaut alors à

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} (\alpha_1 + 1)A_1 + \ldots + (\alpha_n + 1)A_n &= 1 \\ p_1 A_1 + \ldots + p_n A_n &= 0. \end{aligned}$$

Le système (II) admet une solution si et seulement si $\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n + 1$ n'est pas multiple de $p_1, \ldots, p_n$. Précisément, examinons le cas où

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 1 &= \lambda p_1 \\ &\vdots \\ \alpha_n + 1 &= \lambda p_n \quad \text{pour} \quad \lambda \in Q. \end{aligned}$$

Dans un premier temps supposons les p_i premiers entre eux, je dis que dans ce cas λ est forcément entier, l'assertion du lemme en résulte immédiatement dans le cas où les p_i sont sans communs diviseurs. Le cas général est à peine plus difficile. De

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 1 &= \lambda p_1 = (\lambda d)p_1' \\ &\vdots \\ \alpha_n + 1 &= \lambda p_n = (\lambda d)p_n' \end{aligned}$$

il résulte que λd est un entier, les différentes valeurs $\lambda = j/d$ pour $j = 1, \ldots, d$ correspondent à des monômes qui contribuent respectivement aux d séries $\psi_j(P)\overline{\omega}_j$.

Dans le cas complexe et si P a une singularité isolée à l'origine, on sait que le module $G = \Omega^n/dP \wedge d\Omega^{n-2}$ est un $C\{P\}$-module libre de rang égal au nombre de Milnor de P d'aprés un théoréme de M. Sebastiani [4]. Le résultat du lemme 2 suggére l'étude du module $\Omega^n/d\overline{\Omega}^{n-1}$ dans le cas général où P n'est plus à singularité isolée. Dans cette direction, on peut espérer utiliser le théoréme de résolution des singularités d'Hironaka qui raméne la situation au croisement normal. Bien sûr, il s'agit là d'une des motivations de l'étude du cas particulier envisagé ici.

A l'issue du lemme considérons à nouveau la forme ω, son jet infini $j_\infty(\omega)$ est susceptible de la décomposition

$$J_\infty(\omega) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + d\widehat{\eta} + \Sigma\, \widehat{\psi}_j(P)\omega_j$$

Relevons les séries formelles $\widehat{\psi}_j$ en des fonctions C^∞ de la variable P, ψ_j par le théorème de E. Borel et relevons aussi $\widehat{\eta}$ ainsi qu'il suit. Si nous écrivons $\widehat{\eta} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \eta_i d\widehat{x}_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} p_i (x_1^{p_1} \ldots x_i^{p_i-1} \ldots x_n^{p_n})\eta_i = 0$. Cette dernière relation force η_i a être divisible par x_i, posons $\eta_i = x_i\tilde{\eta}_i$, on a $\sum_{i=1}^{n} p_i\tilde{\eta}_i = 0.$

Nous utilisons alors le théorème de E. Borel et nous relevons $\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{n-1}$ en des fonctions C^∞, $\tilde{\eta}_i \, (i = 1, \dots, n-1)$ puis nous posons $\tilde{\eta}_n = -\dfrac{1}{p_n}(p_1\tilde{\eta}_1 + \dots + p_{n-1}\tilde{\eta}_{n-1})$. La forme $\eta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \tilde{\eta}_i d\hat{x}_i$ relève η et vérifie $dP \wedge \eta = 0$.

Une fois relevées les formes formelles on se retrouve avec une différence.

$$\omega - d\eta - \sum_{j=1}^{d} \psi_j(P)\overline{\omega}_j = (1 + f)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où f est une fonction plate en $\{0\}$. On achève alors le théorème par le

Lemme 3. *Etant donné f une fonction plate en $\{0\}$ il existe une forme η à coefficients plats en $\{0\}$ telle que $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\eta$ et $dP \wedge \eta = 0$.*

Preuve. Il est facile de produire un champ $H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ où les λ_i sont des réels non nuls tel que

$$H \cdot P = (\lambda, p) x^p = 0,$$

posons $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. (On peut bien sûr supposer $\Lambda = 0$ si $n \geq 3$). Je dis alors qu'étant donné une fonction f plate en $\{0\}$, il est possible de produire h telle que

$$H \cdot h + \Lambda h = f.$$

Pour cela, il suffit de reprendre l'argumentation de R. Roussarie dans [3], encore que la situation soit ici élémentaire.

Le champ H est hyperbolique, il possède un sous-espace contractant et un dilatant, on peut se ramener à supposer f plate le long du dilatant de H et dans ce cas la solution est

$$h = -\int_0^{-\infty} e^{\Lambda t} \varphi_t^*(f)\, dt$$

où φ_t est le flot de H.

Il vient alors

$$f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = dh \wedge l_H d^n x + h d(l_H d^n x) = d(h l_H d^n x)$$

posons $\eta = h\, l_H d^n x$, on trouve

$$dP \wedge \eta = h dP \wedge l_H d^n x = h(H \cdot P) d^n x = 0.$$

References

[1] J. P. Françoise; *Modèle local simultané d'une fonction et d'une forme de volume*, Astérisque S.M.F., n.º 59-60, pp. 119-130, 1978.

[2] J. Moser; *On the volume elements on a manifold*, Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 120-121, pp. 286-294, 1965.

[3] R. Roussarie; *Modèles locaux de champas et de formes*, Astérisque S.M.F. n.º 30, 1975.

[4] M. Sebastiani; *Preuve d'une conjecture de E. Brieskorn*, Manuscripta Math. 2 pp 301-308, 1970.

[5] J. Vey; *Sur le lemme de Morse*, Inv. Math. n.º 40, pp. 1-9, 1977.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES, Institut Fourier
U.S.M.G.
B. P. 116 Saint Martin d'Héres 38402
et
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA (IMPA)
Estrada Dona Castorina, 110, J. Botânico
CEP 22.460 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil.