BOL. SOC. BRAS. MAT., VOL. 10 Nº 2 (1979), 51-56

Regularisation C^∞ des champs vectoriels qui préservent l'élément de volume

Carlos Zuppa

1. Introduction.

Dans [3], J. Palis et C. Pugh posent le problème suivant: soit ϕ un système dynamique de classe C^r sur une variété compacte qui préservent l'élément de volume (la variété est supposé orientable), est-il possible d'approcher ϕ dans la topologie C^r par un système ψ de classe C^∞ qui préservent aussi l'élément de volume?

Pour des champs vectoriels de classe C^{r+a} $(a > 0)$, la réponse à cette question est affirmative en vertu d'une élémentaire application de la théorie de Hodge. Ici on se propose démontrer que, quand ϕ est un champ vectoriel de classe C^1, la réponse aussi est-elle affirmative. On élargit même ce résultat aux champs vectoriels dépendant du temps.

Dans tout ce suit, M dénotera une C^∞-variété de Riemann compacte et orientable et μ la forme volume induite par la métrique de Riemann. Pour r entier positif ou $r = \infty$, $\mathfrak{H}^r$ et $\mathfrak{H}^r_\mu$ sont les espaces de champs vectoriels sur M de classe C^r et champs vectoriels sur M de classe C^r avec divergence nulle respectivement. On considère ces espaces munis de la topologie C^r.

Théorème 1. *$\mathfrak{H}^\infty_\mu$ est dense dans $\mathfrak{H}^r_\mu$. Plus précisément, pour un $X \in \mathfrak{H}^r_\mu$ quelconque, il existe un chemin continu $\gamma : [0, b] \to \mathfrak{H}^r_\mu$ tel que $\gamma(0) = X$ et $\gamma(t) \in \mathfrak{H}^\infty_\mu$ quand $t > 0$.*

On dénote avec $\mathfrak{H}^{r,0}$ l'espace d'applications continues

$$X : [0, 1] \to \mathfrak{H}^r.$$

De même, $\mathfrak{H}^{r,0}_\mu$ est le sous espace de $\mathfrak{H}^{r,0}$ de ces champs vectoriels qui préservent l'élément de volume c'est à dire, $\operatorname{div}_\mu(X_t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Théorème 2. *Soit $X \in \mathfrak{H}^{r,0}_\mu$ quelconque. Alors, il existe un chemin continu $\gamma : [0, b] \to \mathfrak{H}^{r,0}_\mu$ tel que $\gamma(0) = X$ et $\gamma(t) \in \mathfrak{H}^{\infty,0}_\mu$ pour $t > 0$.*

Rappel. Les espaces $\mathfrak{H}^{r,0}$ sont munis de la topologie ouverte-compacte.

Recebido em março de 1979

Remarques. Si θ est une autre C^∞-forme volume sur M, on peut toujours modifier la métrique de Riemann de manière que

$$\int_M \mu = \int_M \theta$$

Dans ce cas-ci, en vertu d'un résultat de J. Moser ([2]), il existe un C^∞-difféomorphisme $f : M \to M$ tel que $\theta = f^*\mu$. Il est clair maintenant que les théorèmes 1 et 2 réstent valables pour la forme θ.

Dans [4], E. Zehnder a donné une réponse positive au problème posé plus en haut pour des difféomorphismes de classe C^{r+a} $(a > 0)$. Si l'on voulait élargir ce résultat pour des difféomorphismes de classe C^1 en suivant la méthode de ce travail, on se heurte à la difficulté de trouver un analogue au Théorème 3 énoncé ci-dessous. Cependant, en utilisant le Théorème 2, on peut régulariser un difféomorphisme $f \in Diff_u^1(M)$ s'il exist un "bon chemin" dans $Diff_u^1(M)$ qui met en conexion f et un difféomorphisme $g \in Diff_\mu^\infty(M)$. Avec cela l'on veut dire qu'il existe $X \in \mathfrak{H}_\mu^{1,0}$ tel que $f = \phi_{X,1} \circ g$, où $\phi_{X,1} : M \to M$ est le difféomorphisme correspondant aux conditions initiales $(m, 0) \in M \times [0, 1]$ et $t = 1$ du flot de X.

En parcourant la démonstration du Théorème 1, on conçoit aisément que celle du Théorème 2 est en essence identifique. L'introduction du paramètre t ne comporte pas aucune complication supplémentaire. Ainsi, nous ne donnerons les détails que pour le Théorème 1.

2. La preuve du Théorème 1.

On dénotera avec B^p $(p \geq 0)$ le sous-space de $C^p(M, R)$ de fonctions f satisfaisant:

$$\int_M f \cdot u = 0.$$

Soit $p \geq 1$ et $L = \Delta \,|\, B^{p+2} : B^{p+2} \to B^p$, où Δ est le Laplacien. Il existe un opérateur continu $\Phi : B^p \to B^{p+1}$ tel que $\Delta \circ \Phi = \mathrm{id}$. En plus, si g est du classe C^∞, $\Phi(g)$ est du même classe, [1].

Soi $X \in \mathfrak{H}_\mu^r$. Supposons que l'on réussisse à trouver un chemin continu $\alpha : [0, b] \to \mathfrak{H}^1$ tel que

(a) $\alpha(0) = X$ et $\alpha(t) = X_t \in \mathfrak{H}^\infty$ pour $t > 0$.

(b) Le chemin $\beta : [0, b] \to B^r$ défini par $\beta(t) = \mathrm{div}(X_t)$ est continu.

Alors, on peut définir un chemin $\gamma : [0, b] \to \mathfrak{H}^r$ par la formule $\gamma(t) = X_t - \mathrm{grad}(\Phi(\beta_t))$. Il est clair que γ est continu et que $\gamma([0, b]) \subset \mathfrak{H}_\mu^r$.

Ainsi, le Théorème 1 découle de l'existence de cet arc. Quanto à ce sujet, on a le résultat suivante:

Théorème 3. *Soit $X \in \mathfrak{H}^r$ tel que div $(X) \in B^r$ (par exemple, si $X \in \mathfrak{H}_\mu^r$). Il existe alors un chemin continu α: $[0, b] \to \mathfrak{H}^r$ satisfaissant les conditions* (a) *et* (b) *énoncées en haut.*

On démontrera ce théorème dans la section 4.

3. Régularisation des champs vectoriels.

On décrira ici un procédé pour régulariser des champs vectoriels. Dans le cas local c'est le procédé classique de régularisation d'une application continue. On recollera ces régularisations locales par la méthode de partition de l'unité.

Soit $\theta_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par

$$\theta_1(x) = \exp((|x|^2 - 1)^{-1}) \quad \text{pour} \quad |x| < 1$$
$$\theta_1(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geq 1$$

et $\theta_a(x) = h_a^{-1} \cdot \theta_1(x/a)$, où $a > 0$ et $h_a > 0$ est tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_a(x)dx = 1.$$

Pour une application continue $f = (f_1, \ldots, f_p) : R^n \to R^p$ avec support compacte, la a-régularisation f^a de f est

$$f^a(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \cdot \theta_a(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \theta_a(x - y)dy.$$

Pour n'importe quel n-uple d'entiers ≥ 0 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $i = 1, \ldots, p$ on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i^a}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(y) \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} \theta_a}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x - y)dy \tag{1}$$

En outre, si f est aussi de classe C^k, (1) est aussi égal à

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x - y) \cdot \theta_a(y)dy$$

quand $|\alpha| \leq k$.

Il est évident que f^a est de classe C^∞ et que, si f est de classe C^k, alors $f^a \xrightarrow[k]{} f$ quand $a \to 0$. (Ici $\xrightarrow[k]{}$ signifie que f^a tend vers f dans la topologie C^k).

3.1 Soit maintenant $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel de classe C^1 avec support compacte. Supposons que $\operatorname{div}(X)$ est aussi une fonction de classe C^1. On considère ici la divergence de X quant à l'élément de volume naturel de R^n, $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Ainsi:

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

On sait que $X^a \xrightarrow[1]{} X$ nous allons voir que $\operatorname{div}(X^a) \xrightarrow[1]{} \operatorname{div}(X)$. On doit seulement vérifier que $\operatorname{div}(X^a) = (\operatorname{div}(X))^a$, c'est à dire, la a-régularisation de $\operatorname{div}(X)$ est précisément la divergence de X^a. Mais

$$\operatorname{div}(X^a)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i^a}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x-y) \cdot \theta_a(y)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x-y) \right) \cdot \theta_a(y)dy = (\operatorname{div}(X))^a.$$

3.2. On procèdera maintenant à définir ce qu'on comprendra par a-régularisation d'un champ vectoriel sur M.

On fixe dès maintenant une partition de l'unité $(U_j, h_j)_{j=1,\ldots,m}$, ou:

a) $(U_j)_{j=1,\ldots,m}$ est un recouvrement fini de M par des sous-ensembles ouverts de M.

b) Les sous ensembles U_j sont les domaines de C^∞-cartes de coordonnées $\phi_j : U_j \to B$, où B est la boule ouverte unitaire dans $\mathbb{R}^n$.

c) $(h_j)_{j=1,\ldots,m}$ est une partition de l'unité subordonnée à (U_j), c'est à dire, $\operatorname{supp}(h_j) \subset U_j$.

Pour $X \in \mathfrak{H}^r$ et $j = 1, \ldots, m$ on pose $X_j = h_j \cdot X$. On peut écrire alors $X = X_1 + \ldots + X_m$.

On considère $Y_j = (\phi_j)_*(X_j \mid U_j)$ comme des champs vectoriels dans $\mathbb{R}^n$ avec supports compactes, $j = 1, \ldots, m$. Il est évident qu'il existe $b > 0$ tel que:

$$\operatorname{supp}(Y_j^a) \subset B \text{ si } 0 < a \leq b \text{ et } j = 1, \ldots, m.$$

On considère maintenant $X_j^a = \phi_j^*(Y_j^a \mid B)$ étendu naturellement sur tour M et on pose

$$X^a = X_1^a + \ldots + X_m^a.$$

Certainement, X^a est de classe C^∞ et $X^a \xrightarrow[r]{} X$ quand $a \to 0$.

Une telle régularisation dépend evidemment du système (U_j, h_j). Nous en choisissons une quelconque.

4. La preuve du Théorème 3.

Soit $X \in \mathfrak{H}^1$ tel que $\operatorname{div}(X) \in B^1$. On sait que les champs vectoriels X^a définis dans 3 satisfont $X^a \xrightarrow[1]{} X$. On a seulement le besoin de montrer que $\operatorname{div}(X^a) \xrightarrow[1]{} div(X)$, puisque X^a $(a > 0)$ est de classe C^∞ en les variables $(x, a) \in M \times (0, b]$.

Observons d'abord que chaque fonction $\operatorname{div}(X_j)$, $j = 1, \ldots, m$, est aussi de classe C^1:

$$L_{X_j}\mu = L_{h_j \cdot X}\mu = dh_j \wedge i_X\mu + h_j \cdot L_X\mu.$$

Puisque les deux termes à droite sont de classe C^1, il résulte $L_{X_j}\mu = \operatorname{div}(X_j) \cdot \mu$ aussi de classe C^1.

Soit Y_j comme dans (3.2) et $\tilde{\mu}_j = (\phi_j)_*(\mu \mid U_j)$. Evidemment, il suffit de prouver que:

(2) $$\operatorname{div}_{\tilde{\mu}_j}(Y_j^a) \xrightarrow[1]{} \operatorname{div}_{\tilde{\mu}_j}(Y_j).$$

Dans ce qui suit on oubliera le sousindex j à fin de simplifier l'écriture. Si $\tilde{\mu} = f \cdot dx$, avec $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$, *alors*

(3) $$L_Z\tilde{\mu} = (L_Z f) \cdot dx + f \cdot L_Z\, dx$$

pour un champ vectoriel Z quelconque sur B de classe C^1. Comme $L_Y f$ est de classe C^1, (3) implique que $L_Y\tilde{\mu}$ est de classe C^1 si et suelement si $L_Y\, dx$ l'est aussi. D'ailleurs, puisque $Y^a \xrightarrow[1]{} Y$, on obtient

$$L_{Y^a} f \xrightarrow[1]{} L_Y f.$$

On arrive à la fin de la preuve du Théorème 3 si

$$L_{Y^a}\, dx \xrightarrow[1]{} L_Y\, dx$$

mais ceci est précisément l'affirmation démontrée dans (3.1).

References

[1] C. B. Jr Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, 1966.

[2] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., 120 (1965), 286-294.

[3] J. Palis and C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 468, (1975), p. 352.

[4] E. Zehnder, *Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphisms*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 597, (1977), p. 828.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Rua Luiz de Camões, 68
20.060 – Rio de Janeiro, Brasil.