Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

С. П. Хэкало

ВРЕМЕННЫ́Е ДЕФОРМАЦИИ СТЕПЕНЕЙ ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА

0. Введение

В работе [1] М. Рисс построил фундаментальные решения для степеней волнового оператора в виде аналогов интегралов Римана–Лиувилля, называемых сейчас потенциалами Рисса. Были найдены условия, при которых для этих операторов справедлив принцип Гюйгенса: *псевдоевклидово пространство должно иметь четную размерность, по крайней мере вдвое превышающую степень оператора.*

В работах [2–4] установлено выполнение принципа Гюйгенса для произвольных степеней деформаций волнового оператора потенциалами Калоджеро–Мозера и Лагнезе–Штельмахера (для ультрагиперболического оператора и его степеней тоже самое установлено в [5]). Метод исследования заключался в построении классического анзатца Адамара [6, 4] для деформаций волнового оператора или его аналога для степеней этих деформаций. Под аналогом анзатца понимается ряд из потенциалов Рисса, к которым примененен так называемый оператор косого присоединенного действия [7]. “Обрыв” ряда-анзатца, и как следствие принцип Гюйгенса, достигаются за счет калибровочной эквивалентности [7] волнового оператора и его деформации.

Результаты, связанные с потенциалами Рисса и их обобщениями, нашли применение в интегральной геометрии [8, 9]. Связь между принципом Гюйгенса и задачами интегральной геометрии обсуждалась в [10].

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой – исследуется вопрос об эквивалентных преобразованиях операторов второго порядка к операторам, не содержащим “трения” (первые производные). Постановка такой задачи обусловлена инвариантностью принципа Гюйгенса относительно элементарных

Работа выполнена при финансовой поддержке “Фонда содействия отечественной науке” и РФФИ, проект No. 05-01-00248.

преобразований и заимствована из математической физики (см., например, [11]). Вторая часть работы посвящена построению изогюйгенсовых деформаций степеней волнового оператора с переменными по времени коэффициентами.

1. Эквивалентность операторам без трения

1. Инвариант Коттона. Пусть X – односвязная область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$; $x = (x^0 = t, x^1, \dots, x^n) \in$ X; $\partial_i = \partial/\partial x^i$ – оператор взятия частной производной по переменной x^i на X.

На X рассмотрим линейные дифференциальные операторы второго порядка

$$\begin{gathered} \mathcal{P} = g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + b^i(x)\partial_i + c(x), \\ g^{ij}(x) = g^{ji}(x), \quad i, j = 0, \dots, n, \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

$\det(g^{ij}) \neq 0$, с гладкими коэффициентами (одновременной наличие одинакового верхнего и нижнего индексов означает суммирование).

Коэффициенты главной части оператора $\mathcal{P}$ порождают n-мерное риманово многообразие с метрическим тензором $\big(g^{ij}(x)\big)$ и метрической формой

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j\,,$$

где $g^{ij}(x) g_{jk}(x) = \delta_{ik}$, δ_{ik} – символ Кронеккера.

Определение ([3]). *Оператор $\mathcal{P}$ называется гюйгенвовым оператором (оператор удовлетворяет принципу Гюйгенса), если коразмерность носителя его главного фундаментального решения равна единице.*

Определение ([4]). *Два оператора $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ на X называются эквивалентными ($\mathcal{P}_1 \simeq \mathcal{P}_2$), если один из них получается из другого путем элементарных преобразований:*

1. *Невырожденная замена переменных: $x \to \tilde{x} = \{\psi^i(x)\}_{i=0}^n$;*
2. *Умножение оператора на ненулевую функцию: $\mathcal{P} \to \mu(x)\,\mathcal{P}\,\alpha(x)$*

Следующее предложение устанавливает инвариантность принципа Гююйгенса относительно элементарных преобразований.

Предложение ([4]). *Пусть оператор $\mathcal{P}_1$ – гюйгенсов. Если $\mathcal{P}_1 \simeq \mathcal{P}_2$, то оператор $\mathcal{P}_2$ также гюйгенсов.*

Далее, пусть

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\, g^{im}\left(\partial_k g_{mi} + \partial_j g_{mk} - \partial_m g_{jk}\right),$$

$$\mathcal{R}_{ij} = \partial_j \Gamma^k_{ik} - \partial_k \Gamma^k_{ij} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^k_{js} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^k_{sk}$$

– символы Кристофеля и тензор Риччи, соответственно; $\mathcal{R} = g^{ij}\mathcal{R}_{ij}$ – скалярная кривизна многообразия X.

Определение ([12, 11]). *Инвариантом Коттона оператора $\mathcal{P}$ называется функция*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2}\, a^i_{,i} - \frac{1}{4}\, a^i a_i - \frac{n-2}{4(n-1)}\mathcal{R} + c, \qquad (1.1.2)$$

где

$$a^i = b^i + g^{jk}\Gamma^i_{jk}; \quad a^i_{,j} = \partial_j a^i + a^k\Gamma^i_{kj}; \quad a_i = g_{ij}a^j. \qquad (1.1.3)$$

Инвариант Коттона (1.1.2) обладает следующим важным свойством.

Утверждение. *Пусть $\mathcal{P}_1$ – однородный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_2} \not\equiv 0$, то операторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ не эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку для оператора $\mathcal{P}_1$ выполнены условия $b^i = 0$, $c = 0$, $\Gamma^i_{jk} = 0$, то $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_1} = 0$. Если $\mathcal{P}_1 \simeq \mathcal{P}_2$, то очевидно, что $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_1}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_2}$ отличаются на ненулевой множитель. Последнее противоречит условию.

2. Достаточные условия эквивалентности операторам без трения. Пусть $\alpha(x)$ – функция, покоординатно дифференцируемая на X. Рассмотрим систему уравнений первого порядка, порожденную коэффициентами оператора (1.1.1):

$$\alpha'_i \equiv \partial_i \alpha(x) = -\frac{1}{2}\, b_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (1.2.1)$$

Предложение. *Интеграруемость системы* (1.2.1) *равносильна выполнению следующих равенств*

$$\mathcal{K}_{ij} := \partial_i\, b_j(x) - \partial_j\, b_i(x) = 0, \;\; 0 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Если система (1.2.1) интегрируема, то в силу гладкости элементов $b_i = g_{ij}b^j$, имеем

$$\mathcal{K}_{ij} = -2\partial_i \alpha'_j + 2\partial_j \alpha'_i = 2(\alpha''_{ij} - \alpha''_{ji}) = 0.$$

Пусть теперь $\mathcal{K}_{ij} = 0$, тогда дифференциальная 1-форма, порожденная правой частью системы (1.2.1)

$$\omega = -\frac{1}{2}\, b_i(x)\, dx^i,$$

является замкнутой. Действительно,

$$\begin{aligned} d\omega &= -\frac{1}{2} db_i(x) \wedge dx^i = -\frac{1}{2}\, \partial_j b_i(x)\, dx^j \wedge dx^i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \left(\partial_i b_j(x) - \partial_j b_i(x)\right) dx^j \wedge dx^i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \mathcal{K}_{ij}\;\, dx^j \wedge dx^i = 0. \end{aligned}$$

Далее, поскольку область X односвязна, то по теореме Пуанкаре [13], форма ω является точной. Таким образом, существует дифференциальная 0-форма $\alpha(x)$, такая что $d\alpha(x) = \omega$ и $\alpha'_i(x) = -\frac{1}{2}\, b_i(x)$. Предложение доказано.

Обозначим через $\Gamma^i = g^{jk}\Gamma^i_{jk}$, тогда имеет место

Лемма. *Справедливо равенство*

$$a^k \Gamma^i_{ki} + a_i \Gamma^i = a^k g^{ij}\, \partial_j\, g_{ik}. \tag{1.2.3}$$

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} &a^k \Gamma^i_{ki} + a_i \Gamma^i - a^k g^{ij}\, \partial_j\, g_{ik} = a^k \left(\Gamma^i_{ki} + g_{ik}\Gamma^i - g^{ij}\, \partial_j\, g_{ik}\right) \\ =&a^k \left(\frac{1}{2} g^{ij}\, \partial_k\, g_{ij} + \left(g^{ij}\, \partial_i\, g_{kj} - \frac{1}{2} g^{ij}\, \partial_k\, g_{ij}\right) - g^{ij}\, \partial_j\, g_{ik}\right) \\ =&a^k \left(g^{ij}\, \partial_i\, g_{kj} - g^{ij}\, \partial_j\, g_{ik}\right) = 0. \end{aligned}$$

Предложение. *Если коэффициенты оператора* (1.1.1) *удовлетворяют условиям* (1.2.2), *то*

$$\mathcal{P} \simeq g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathcal{Q}(x), \tag{1.2.4}$$

где

$$\mathcal{Q}(x) = -\frac{1}{2}\, a^i_{,i} - \frac{1}{4}a^i a_i + c + \frac{1}{2}g^{ij}\,\partial_i\left(g_{jk}\Gamma^k\right) - \frac{1}{2}g_{ij}\Gamma^i\Gamma^j.$$

Доказательство. В силу условий (1.2.2) на X существует функция $\alpha(x)$, удовлетворяющая системе (1.2.1). Откуда, учитывая равенство $g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$, получаем

$$g^{ij}(x)\alpha'_j(x) = -\frac{1}{2}\, b^i(x).$$

Далее

$$\mathcal{P}\,\mathrm{e}^{\alpha(x)} = \mathrm{e}^{\alpha(x)}\, g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathrm{e}^{\alpha(x)}\,\left(2g^{ij}(x)\alpha'_j(x) + b^i(x)\right)\partial_i$$

$$+\mathrm{e}^{\alpha(x)}\,\left(g^{ij}(x)\alpha''_{ij}(x) + g^{ij}(x)\alpha'_i(x)\alpha'_j(x) + b^i(x)\alpha'_i(x) + c(x)\right).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}\,\mathrm{e}^{\alpha(x)} = \mathrm{e}^{\alpha(x)}\left(g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathcal{Q}(x)\right),$$

где

$$\mathcal{Q}(x) = g^{ij}(x)\left(\alpha''_{ij}(x) + \alpha'_i(x)\alpha'_j(x)\right) + b^i(x)\alpha'_i(x) + c(x).$$

Поскольку

$$a_i = b_i + g_{ij}\Gamma^j; \quad \alpha'_i = -\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}g_{ij}\Gamma^j;$$

$$b^i\alpha'_i = -\frac{1}{2}a^i a_i + a_i\Gamma^i - \frac{1}{2}g_{ij}\Gamma^i\Gamma^j;$$

$$g^{ij}\alpha'_i(x)\alpha'_j(x) = \frac{1}{4}a^i a_i - \frac{1}{2}a_i\Gamma^i + \frac{1}{4}g_{ij}\Gamma^i\Gamma^j;$$

$$\begin{aligned}
g^{ij}(x)\alpha''_{ij} &= -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_j a_i + \frac{1}{2}g^{ij}g_{ik}\partial_j\Gamma^k + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{ik}\Gamma^k \\
&= -\frac{1}{2}g^{ij}\left(g_{ik}\partial_j a^k + a^k\partial_j g_{ik}\right) + \frac{1}{2}\partial_i\Gamma^i + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{ik}\Gamma^k \\
&= -\frac{1}{2}\partial_i a^i - \frac{1}{2}g^{ij}a^k\partial_j g_{ik} + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{ik}\Gamma^k,
\end{aligned}$$

то

$$\mathcal{Q}(x) = -\frac{1}{2}\, a^i_{,i} - \frac{1}{4} a^i a_i + c + \frac{1}{2} g^{ij}\partial_i \left(g_{jk}\Gamma^k\right) - \frac{1}{2} g_{ij}\Gamma^i\Gamma^j$$
$$+ \frac{1}{2}\left(a^k\Gamma^i_{ki} + a_i\Gamma^i - a^k g^{ij}\partial_j g_{ik}\right).$$

В результате, по формуле (1.2.3), предложение доказано.

Следствие. *Если оператор $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям* (1.2.2), *то существует покоординатно дважды дифференцируемая функция $\alpha(x)$, такая что*

$$\mathrm{e}^{-\alpha(x)}\mathcal{P}\,\mathrm{e}^{\alpha(x)} = g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathcal{Q}(x). \tag{1.2.5}$$

Следствие. *Пусть $\mathcal{P}$ – оператор с постоянным метрическим тензором и для него выполняются условия* (1.2.2), *тогда*

$$\mathcal{P} \simeq g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathcal{H}_{\mathcal{P}},$$

где инвариант Коттона (1.1.2) *принимает вид*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2}\partial_i\, b^i(x) - \frac{1}{4} b^i(x) b_i(x) + c(x).$$

Доказательство. Из условий (1.1.2) следует, что

$$\mathcal{P} \simeq g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathcal{Q}(x),$$

где в силу постоянства метрического тензора

$$\mathcal{Q}(x) = -\frac{1}{2} a^i_{,i} - \frac{1}{4} a^i a_i + c.$$

Соответствующее $\mathcal{P}$ риманово пространство имеет нулевые символы Кристофеля и тензор Риччи и, следовательно, нулевую скалярную кривизну. Таким образом,

$$\mathcal{Q}(x) = \mathcal{H}_{\mathcal{P}}, \;\; g^{ij} = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство завершено.

Обозначим через $\mathcal{E}^{(p)}_{\simeq}(\xi, x)$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{P}^p_{\simeq}$, $p \in \mathbb{N}$, сосредоточенное в точке $\xi \in \mathrm{X}$, то есть

$$\mathcal{P}^p_{\simeq}\mathcal{E}^{(p)}_{\simeq}(\xi, x) = \delta_\xi(x) \equiv \delta(x - \xi).$$

Здесь

$$\mathcal{P}_{\simeq} = g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \mathcal{Q}(x)$$

и δ – дельта-функция Дирака.

Предложение. *Фундаментальное решение оператора* $\mathcal{P}^p$, $p \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющего условиям* (1.2.2), *имеет вид*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}^p}(\xi, x) = \mathrm{e}^{\alpha(x)-\alpha(\xi)} \mathcal{E}_{\simeq}^{(p)}(\xi, x),$$

где $\alpha(x)$ – *решение системы* (1.2.1).

Доказательство. В силу равенства (1.2.5) имеем

$$\mathrm{e}^{-\alpha(x)} \mathcal{P}^p \mathrm{e}^{\alpha(x)} = \left(\mathrm{e}^{-\alpha(x)} \mathcal{P} \mathrm{e}^{\alpha(x)}\right)^p = \left(g^{ij}\,\partial_i \partial_j + \mathcal{Q}(x)\right)^p = \mathcal{P}_{\simeq}^p.$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}^p \mathcal{E}_{\mathcal{P}^p}(\xi, x) = \mathrm{e}^{-\alpha(\xi)} \mathcal{P}^p \left(\mathrm{e}^{\alpha(x)} \mathcal{E}_{\simeq}^{(p)}(\xi, x)\right)$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha(x)-\alpha(\xi)} \mathcal{P}_{\simeq}^p \mathcal{E}_{\simeq}^{(p)}(\xi, x) = \mathrm{e}^{\alpha(x)-\alpha(\xi)}\, \delta_\xi(x) = \delta_\xi(x).$$

Доказательство завершено.

Приведем примеры деформаций волнового оператора

$$\Box = \partial_t^2 - \partial_1^2 - \ldots - \partial_n^2$$

на $\mathbb{R}^{1+n}$, для которых справедливы условия (1.2.2):

1. $$\mathcal{P} = \Box - \frac{2}{t + x^1}(\partial_t - \partial_1), \quad \mathcal{H}_{\mathcal{P}} = 0, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\xi, x) = \frac{t + x^1}{\xi^0 + \xi^1} \mathcal{E}_{\Box}(\xi, x);$$

2. $$\mathcal{P} = \Box - \frac{4t}{t^2 - (x^1)^2}\partial_t - \frac{4x^1}{t^2 - (x^1)^2}\partial_1 + \frac{4}{t^2 - (x^1)^2} - \frac{2}{t^2},$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} = -\frac{2}{t^2}, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\xi, x) = \frac{t^2 - (x^1)^2}{(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2} \mathcal{E}_{\Box - 2/t^2}(\xi, x).$$

(Явный вид фундаментальных решений $\mathcal{E}_{\Box}(\xi, x)$ и $\mathcal{E}_{\Box - 2/t^2}(\xi, x)$ можно найти, например, в [2, 3] или см. ниже.)

2. Временны́е деформации степеней волнового оператора

1. Алгебра Рисса над кольцом целых чисел, соответствующая волновому оператору. В этом пункте приводятся необходимые результаты, фактически изложенные в [14].

Пусть
$$\gamma(t,x) = t^2 - (x^1)^2 - \ldots - (x^n)^2.$$

Обобщенная функция γ_+^λ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ определена интегралом

$$\left(\gamma_+^\lambda, \varphi\right) = \int\limits_{\gamma>0} \gamma^\lambda(t,x)\varphi(t,x)dtdx, \ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Здесь φ – основная функция на $\mathbb{R}^{1+n}$ (бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем или с быстро убывающими производными).

Введем комплексно-параметрическое семейство

$$\Phi_+^{(\lambda)}(t,x) = \frac{1}{4^\lambda\, \pi^{(n-1)/2}} \cdot \frac{\gamma_+^{\lambda-(n+1)/2}}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda - \frac{n-1}{2}\right)} \tag{2.1.1}$$

целых по λ обобщенных функций.

Пусть S^n – сфера в $\mathbb{R}^n$. Для произвольной основной функции φ положим
$$\varphi_0(t,r) = \int\limits_{S^n} \varphi(t, \sqrt{r}\omega)d\omega.$$

Поскольку
$$\int\limits_{S^n} \varphi(t,(-\sqrt{r})\omega)d\omega = \int\limits_{S^n} \varphi(t,\sqrt{r}\omega)d\omega,$$

то по лемме Трева (см. [15], лемма 5.4, стр. 65) функция $\varphi_0(t,r)$ будет основной на $\mathbb{R}^2$.

Определение. *s-ой производной $\delta^{(s)}(\gamma)$ дельта-функции поверхности $\gamma = 0$ называется функционал*

$$\left(\delta^{(s)}(\gamma), \varphi\right) = \frac{2^{2s-n}}{\pi^{(n-1)/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-1}\, \frac{\partial^s}{\partial r^s}\, \left[r^{(n-2)/2}\varphi_0(t,r)\right]\Big|_{r=t^2} dt.$$

Предложение. *При нечетных n, для натуральных $p \leqslant \frac{n+1}{2}$ имеет место равенство*

$$\Phi_+^{(p)}(t,x) = \frac{1}{(p-1)!}\,\delta^{((n-1)/2-p)}(\gamma). \qquad (2.1.2)$$

Пусть $\beta(\tau,y) = \tau^2-(y^1)^2-\ldots-(y^n)^2$ и $\beta_\pm^\lambda$ – обобщенные функции, отвечающие обычным функциям

$$\beta_+^\lambda = \begin{cases} \beta^\lambda, & \beta>0,\\ 0, & \beta<0; \end{cases} \qquad \beta_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \beta>0,\\ (-\beta)^\lambda, & \beta<0. \end{cases}.$$

Предложение. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}\left(\Phi_+^\lambda\right)$ функционала Φ_+^λ имеет вид*

$$\mathcal{F}\left(\Phi_+^\lambda\right) = \cos(\pi\lambda)\cdot\beta_+^{-\lambda} + \beta_-^{-\lambda}. \qquad (2.1.3)$$

Теорема. *Семейство распределений* (2.1.1) *порождает сверточную алгебру Рисса $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$, отвечающую волновому оператору:*

$$\begin{cases} \Phi_+^{(0)} = \delta,\\[2ex] \Box\,\Phi_+^{(\lambda)} = \Phi_+^{(\lambda-1)},\\[2ex] \Phi_+^{(\lambda)} * \Phi_+^{(\mu)} = \Phi_+^{(\lambda+\mu)}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{Z}. \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

При этом $\operatorname{supp}\Phi_+^{(\lambda)} \subset \{\gamma \geqslant 0\}$.

Доказательство. Покажем, что преобразование Фурье разностей между левой и правой частями формул – нулевые.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\Phi_+^{(0)}-\delta\right) &= \ \beta_+^0+\beta_-^0-1 = 1-1 = 0;\\
\mathcal{F}\left(\Box\,\Phi_+^{(\lambda)}-\Phi_+^{(\lambda-1)}\right) &= -\beta\cdot\left(\cos(\pi\lambda)\cdot\beta_+^{-\lambda}+\beta_-^{-\lambda}\right)\\
&\quad -\cos(\pi(\lambda-1))\cdot\beta_+^{-\lambda+1}+\beta_-^{-\lambda+1}\\
&= -\left(\cos(\pi\lambda)-\cos(\pi(\lambda-1))\right)\beta_+^{-\lambda+1} = 0;\\
\mathcal{F}\left(\Phi_+^{(\lambda)}*\Phi_+^{(\mu)}-\Phi_+^{(\lambda+\mu)}\right) &= \ \mathcal{F}\left(\Phi_+^{(\lambda)}\right)\mathcal{F}\left(\Phi_+^{(\mu)}\right)-\mathcal{F}\left(\Phi_+^{(\lambda+\mu)}\right)\\
&= \ \cos(\pi\lambda)\cos(\pi\mu)\cdot\beta_+^{-\lambda-\mu}-\beta_-^{-\lambda-\mu}\\
&\quad -\left(\cos(\pi(\lambda+\mu))\cdot\beta_+^{-\lambda-\mu}-\beta_-^{-\lambda-\mu}\right)\\
&= \ \sin(\pi\lambda)\sin(\pi\mu)\beta_+^{-\lambda-\mu} = 0, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Замечание. *Потенциалы Рисса* в псевдоевклидовом пространстве [1, 8] определяются при помощи свертки

$$\mathcal{I}^{\lambda}\varphi(\tau,y) \equiv \Phi_{+}^{(\lambda)} * \varphi(\tau,y) = \frac{1}{4^{\lambda}\,\pi^{(n-1)/2}}$$

$$\times \int\limits_{\gamma>0} \frac{\gamma^{\lambda-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}\;\varphi(\tau-t,y-x)\,dtdx.$$

По аналогии с (2.1.4) для них справедливы равенства

$$\begin{cases} \mathcal{I}^{0}\varphi(\tau,y) = \varphi(\tau,y), \\ \square\left(\mathcal{I}^{\lambda}\varphi\right)(\tau,y) = \mathcal{I}^{\lambda}\left(\square\varphi\right)(\tau,y) = \mathcal{I}^{\lambda-1}\varphi(\tau,y), \\ \mathcal{I}^{\lambda}\mathcal{I}^{\mu}\varphi(\tau,y) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu}\varphi(\tau,y), \;\; \lambda \;\text{ или }\; \mu\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.15}$$

2. Калибровочно эквивалентные обыкновенные дифференциальные операторы. В этом пункте будут изложены основные результаты работы [16].

Определение ([7]). *Оператором косого присоединенного действия называется формальный оператор, заданный рекуррентным соотношением*

$$\operatorname{ad}^{k}_{A,B} C = \operatorname{ad}^{k-1}_{A,B}(AC-CB), \quad \operatorname{ad}^{0}_{A,B} C = C, \;\; k=1,2,\dots.$$

Определение ([3]). *Оператор $\mathcal{P}_2$ называется M-калибровочно эквивалентным оператору $\mathcal{P}_1$ на $\mathbb{R}$, если найдутся ненулевая функция f и натуральное число M такие, что выполнено равенство*

$$\operatorname{ad}^{M+1}_{\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1} f = 0.$$

Пусть $\mathcal{A}_k = \mathrm{const}$, $d_t^k = d^k/dt^k$, $k=0,1,\dots,N$; $(m,p) = m(m+1)\cdots(m+p-1)$ – символ Похгаммера ($p,\,m\in\mathbb{N}$), $\binom{p}{k}$ – биномиальный коэффициент.

На $\mathbb{R}$ введем операторы

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{A}_k\, d_t^k, \quad N \geqslant 2,$$
$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_0 + \sum_{k=0}^{N-2} \left(\sum_{p=2}^{N-k} (-1)^{p-1}(p-1) \binom{p+k}{k} \frac{(m,p)}{t^p} \mathcal{A}_{p+k} \right) d_t^k. \tag{2.2.1}$$

Теорема ([16]). *Обыкновенный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ порядка N является m—калибровочно эквивалентным оператору $\mathcal{L}_0$:*

$$\operatorname{ad}^{m+1}_{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_0} t^m = 0. \tag{2.2.2}$$

Схема доказательства. Можно непосредственно показать, что для любого $k = 1, \ldots, m$ имеют место 1-калибровочные эквивалентности

$$\operatorname{ad}^{1+1}_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k-1}} t = 0.$$

Из этих равенств следует сплетающее соотношение со спектральным параметром $\tau \in \mathbb{R}$:

$$(\partial_\tau - \mathcal{L}_m)\, \mathcal{T}^m_\tau(t) = \mathcal{T}^m_\tau(t)\, (\partial_\tau - \mathcal{L}_0)\,,$$

$$\mathcal{T}^m_\tau(t) = \prod_{k=1}^{m} \big(t + \tau \operatorname{ad}_{\mathcal{L}_{m-k+1}, \mathcal{L}_{m-k}} t\big).$$

Это сплетающее соотношение и влечет равенство (2.2.2).

Замечание. Операторы $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_m$ из (2.2.1) можно рассматривать как операторы на $\mathbb{R}^{1+n}$, где в роли $\mathcal{A}_k$ берутся дифференциальные операторы $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k(\partial_x)$ на $\mathbb{R}^n$ с постоянными коэффициентами.

3. Временны́е деформации степеней волнового оператора. На $\mathbb{R}^{1+n}$ рассмотрим деформации степеней волнового оператора с переменными по времени коэффициентами штельмахеровского типа:

$$\mathcal{L}_{m,N} = \Box^N + (-1)^N \sum_{k=0}^{2N-2} \left(\sum_{p=1+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{N} \frac{c_{p,k,N}}{t^{2p-k}}\ \Delta^{N-p} \right) \partial_t^k, \tag{2.3.1}$$

$$c_{p,k,N}=(-1)^{p+k+1}(2p-k-1)\binom{2p}{k}\binom{N}{p}(m,2p-k).$$

Здесь $m=0,1,\dots$; $N=1,2,\dots$; $[\cdot]$ – целая часть числа; $\binom{\cdot}{\cdot}$ – биномиальный коэффициент; $(\cdot,\cdot)$ – символ Похгаммера; $\Delta=\partial_1^2+\dots+\partial_n^2$ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^n$.

Приведем несколько примеров такого рода деформаций и укажем их фундаментальные решения.

Пример 1. (Деформация Штельмахера [17, 4, 3].) Пусть $N=1$, тогда

$$\mathcal{L}_{m,1}=\Box-\frac{m(m+1)}{t^2}.$$

При $m=1$ и $n=5$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_{1,1}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}_{1,1}}(t-\xi^0,x-\xi)=\frac{2}{\xi^0\,t}\delta(\gamma)+\delta'(\gamma),\quad \gamma=\gamma(t-\xi^0,x-\xi).$$

Пример 2. Пусть $N=2$, тогда

$$\mathcal{L}_{m,2}=\Box^2-\frac{2m(m+1)}{t^2}\Box-\frac{4m(m+1)}{t^2}\partial_t^2$$

$$+\frac{8m(m+1)(m+2)}{t^3}\partial_t-\frac{3m(m+1)(m+2)(m+3)}{t^4}.$$

При $m=1$ и $n=9$ его фундаментальное решение имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}_{1,2}}(t-\xi^0,x-\xi)$$
$$=\frac{1}{\xi^0}\left(\frac{4}{t^3}\,\delta(\gamma)+\frac{2(t+3\xi^0)}{3t^2}\,\delta'(\gamma)+\frac{t^2+\xi^0t+(\xi^0)^2}{3t}\,\delta''(\gamma)\right).$$

Замечание. В примере 2 приведена изогюйгенсова деформация квадрата волнового оператора. Эта деформация отличается от изогюйгенсовой деформации [2, 3]

$$\mathcal{L}_*=\Box^2-\frac{2m(m+1)}{t^2}\Box+\frac{4m(m+1)}{t^3}\partial_t-\frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{t^4},$$

являющейся второй степенью деформации волнового оператора потенциалом Штельмахера:

$$\mathcal{L}_*=\left(\Box-\frac{m(m+1)}{t^2}\right)^2.$$

Лемма. *Оператор*

$$\mathcal{D}_m = \frac{1}{(\xi^0)^m} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\mathrm{ad}^s_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N}\, t^m\right) \frac{\partial^s}{\partial \zeta^s}, \;\; \zeta \in \mathbb{R},$$

со спектральным параметром ζ *является сплетающим для операторов* $\mathcal{L}_{m,N} - \zeta$ *и* $\Box^N - \zeta$ *на* $\mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}$*:*

$$(\mathcal{L}_{m,N} - \zeta)^p\; \mathcal{D}_m = \mathcal{D}_m\; \left(\Box^N - \zeta\right)^p, \;\; p \in \mathbb{N}. \tag{2.3.2}$$

Доказательство. Пусть $[A, B] = AB - BA$, тогда

$$\mathcal{J} \equiv (\mathcal{L}_{m,N} - \zeta)\; \mathcal{D}_m - \mathcal{D}_m\; \left(\Box^N - \zeta\right) = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N}\mathcal{D}_m + [\mathcal{D}_m, \zeta].$$

Поскольку

$$[\mathcal{D}_m, \zeta] = -\frac{1}{(\xi^0)^m} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\mathrm{ad}^{s+1}_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N} t^m\right) \frac{\partial^s}{\partial \zeta^s},$$

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N}\mathcal{D}_m = \frac{1}{(\xi^0)^m} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\mathrm{ad}^{s+1}_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N} t^m\right) \frac{\partial^s}{\partial \zeta^s},$$

то

$$\mathcal{J} = \frac{(-1)^m}{(\xi^0)^m\, m!}\, \mathrm{ad}^{m+1}_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N} t^m.$$

Далее, в силу построения, оператор $\mathcal{L}_{m,N}$ (2.3.1) может быть представлен в виде (2.2.1), где

$$\mathcal{L}_0 \equiv \Box^N = \sum_{k=0}^{2N} \mathcal{A}_k\, \partial_t^k,$$

$$\mathcal{A}_k = \begin{cases} (-1)^{N-k/2} \dbinom{N}{k/2} \Delta^{N-k/2}, \;\; k = 2p, \\ \\ 0, \;\; k = 2p-1, \end{cases} \qquad p = 0, \ldots, N.$$

Таким образом, по (2.2.2) имеем $\mathcal{J} = 0$. Лемма доказана.

Далее, для $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим многочлен (по спектральному параметру ζ) высокой степени с коэффициентами из сверточной алгебры Рисса $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$ (2.1.4)

$$\Phi_+^{(\lambda)}(t - \xi^0, x - \xi; \zeta) = \sum_{k=0}^{<\infty} \frac{(\lambda, k)}{k!}\, \Phi_+^{(N(\lambda+k))}(t - \xi^0, x - \xi)\; \zeta^k,$$

где (λ, k) – символ Похгаммера.

Теорема. *Комплексно-параметрическое семейство целых по $\lambda \in \mathbb{C}$ обобщенных функций*

$$\Phi_m^{(\lambda)}(t-\xi^0, x-\xi) = \mathcal{D}_m \Phi_+^{(\lambda)}(t-\xi^0, x-\xi;\zeta)\Big|_{\zeta=0} \tag{2.3.3}$$

порождает ядро Рисса оператора $\mathcal{L}_{m,N}$:

$$\mathcal{L}_{m,N}\Phi_m^{(\lambda)} = \Phi_m^{(\lambda-1)}, \quad \Phi_m^{(0)} = \delta(t-\xi^0, x-\xi),$$
$$\operatorname{supp}\Phi_m^{(\lambda)} = \{\gamma(t-\xi^0, x-\xi) \geqslant 0\}.$$

Схема доказательства. Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m,N}\Phi_m^{(\lambda)} &= (\mathcal{L}_{m,N}-\zeta)\Phi_m^{(\lambda)}\Big|_{\zeta=0}\\ &= (\mathcal{L}_{m,N}-\zeta)\mathcal{D}_m\Phi_+^{(\lambda)}(t-\xi^0, x-\xi;\zeta)\Big|_{\zeta=0}.\end{aligned}$$

По формуле (2.3.2) имеем

$$\mathcal{L}_{m,N}\Phi_m^{(\lambda)} = \mathcal{D}_m\ \left(\Box^N - \zeta\right)\Phi_+^{(\lambda)}(t-\xi^0, x-\xi;\zeta)\Big|_{\zeta=0}.$$

Далее, используя свойства алгебры Рисса $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$ (2.1.4), получаем

$$\mathcal{L}_{m,N}\Phi_m^{(\lambda)} = \Phi_m^{(\lambda-1)},\ \ \Phi_m^{(0)} = \delta(t-\xi^0, x-\xi).$$

Следствие. *Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}^p_{m,N}$, $p=1,2,\ldots,$ имеет вид*

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{\mathcal{L}^p_{m,N}}(t-\xi^0, x-\xi)\\ &\quad= \frac{1}{(\xi^0)^m}\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\,(p,s)}{s!}\left(\operatorname{ad}^s_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N} t^m\right)\Phi_+^{(N(p+s))}(t-\xi^0, x-\xi).\end{aligned}$$

Следствие. *При нечетных n, удовлетворяющих условию*

$$n \geqslant 2N(m+p)+1,$$

для оператора $\mathcal{L}^p_{m,N}$ выполнен принцип Гюйгенса: главное фундаментальное решение этого оператора имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{\mathcal{L}^p_{m,N}}(t-\xi^0, x-\xi)\\ &= \frac{1}{(\xi^0)^m}\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\,(p,s)}{s!\,(N(p+s)-1)!}\left(\operatorname{ad}^s_{\mathcal{L}_{m,N},\Box^N} t^m\right)\delta^{((n-1)/2-N(p+s))}(\gamma)\end{aligned}$$

и

$$\operatorname{supp}\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}^p_{m,N}}(t-\xi^0, x-\xi) = \left\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n} \,\middle|\, \gamma(t-\xi^0, x-\xi) = 0\right\},$$

$$\operatorname{codim}\left(\operatorname{supp}\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}^p_{m,N}}(t-\xi^0, x-\xi)\right) = 1.$$

Литература

1. M. Riesz, *L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchi.* — Acta Math. **81**, (1949), 1–223.
2. Y. Berest, Y. Molchanov, *Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance.* — J. Math. Phis. **36**(8) (1995), 4324–4339.
3. Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов, *Принцип Гюйгенса и интегрируемость.* — УМН **49**, 6(300) (1994), 8–78.
4. Н. Х. Ибрагимов, А. О. Оганесян, *Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой.* — УМН **46**, в. 3(278) (1991), 111–146.
5. С. П. Хэкало, *Изогюйгенсовы деформации ультрагиперболического оператора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **285** (2002), 207–223.
6. В. М. Бабич, *Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения.* — Алгебра и анализ **3**, в. 5 (1991), 1–37.
7. Y. Berest, *Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture.* — Acta Appl. Math. **53** (1998), 125–185.
8. В. И.Семянистый, *Некоторые задачи интегральной геометрии в псевдоевклидовых и неевклидовых пространствах.* — МГУ, Труды сем. по вект. и тенз. ан. **13** (1963), 244–302.
9. B. Rubin, *Zeta integrals and integral geometry in the spase of rectangular matrices.* — Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, March (2004), 1–49.
10. И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев, *Избранные задачи интегральной геометрии.* — Добросвет, М. (2000).
11. Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике.* — Физматгиз, М. (1983).
12. E. Cotton, *Sur les invariants differentieles de quelques equations lineaires aux de rivees partielles du second ordre.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **17** (1900), 211 – 244.
13. В. А. Зорич, *Математический анализ.* Т. 2 — Наука, М. (1984).
14. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.*, Вып. 1 — Физматгиз, М. (1985).
15. Ж. Трев, *Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами.* — Мир, М. (1965).
16. С. П. Хэкало, *Калибровочно эквивалентные деформации обыкновенных линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **308** (2004), 235–251.
17. J. E. Lagnese, K. L. Stellmacher, *A method of generating classes of Huygens' operators.* — J. Math. Mech. **17**, No. 5 (1967), 461–472.

Khekalo S.P. Temporary deformations of degrees of the wave operator.

The conditions at which the linear differential operators of the second order are equivalent to operators not containing of "friction" (first partial derivatives) are investigated. One can construct iso-Huygens deformations for degrees of the wave operator with time-dependent coefficients. The fundamental solutions of these deformations and conditions, at which the Huygens principle holds are found.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

Поступило 5 февраля 2005 г.