Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 318, 2004 г.

Р. С. Сакс

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА РОТОР И ОПЕРАТОРА СТОКСА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Посвящается памяти
Ольги Александровны Ладыженской**

1. Введение

Работа посвящена изучению спектра операторов ротора и Стокса в кубе Q на функциях, удовлетворяющих условию периодичности. Здесь через Q обозначено множество $(0, 2\pi)^3$ – куб с ребром 2π.

Операторы вихря, градиента и дивергенции являются основными операторами математического анализа. Собственные вектор-функции оператора rot в кубе с условием периодичности, соответствующие минимальному ненулевому собственному значению, известны. Они встречаются в работах по физике и механике. Отметим, например, работы В. И. Арнольда [1–3], М. Энона [7], а также учебники В. С. Владимирова [5], В. А. Зорича [6] и Б. В. Шабата [15]. В работе Б. Р. Вайнберга и В. В. Грушина [4] оператор $\mathrm{rot} + \mathrm{I}$ приводится как пример оператора (приводимого к эллиптическому) из класса, изученного авторами. Из их теоремы вытекает, что на любом гладком многообразии без края этот оператор является нетеровым в соответствующих пространствах Соболева. Краевые задачи для оператора $\mathrm{rot} + \lambda\mathrm{I}$ при $\lambda \neq 0$ изучались в работах Р. С. Сакса [10–12]. Спектральная задача в шаре для этого оператора была изучена в работе [13].

Целью настоящей работы является нахождение всех собственных значений и всех периодических собственных вектор-функций операторов вихря и Стокса. Краткое изложение первой части этой работы было представлено на международном семинаре

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-01167, 03-07-90077 и программы Президиума РАН No. 17.

"Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики" [14], а также на международных конференциях.

Оказывается, что спектр ротора состоит из чисел, квадраты которых равны квадратам длин целочисленных векторов, и тем самым он представляет собой дискретное бесконечное счетное множество. Простых точек спектра нет. Точка $\lambda = 0$ имеет бесконечную кратность. Все остальные точки спектра имеют конечную кратность, не меньшую шести. Кратность собственного значения λ равна числу узлов целочисленной решетки, лежащих на сфере радиуса $|\lambda|$, это число обозначим через $\varkappa(|\lambda|)$. Собственные вектор-функции вычисляются явно.

Обозначим через $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ пространство 2π-периодических вектор-функций, интегрируемых с квадратом на кубе Q, а через $\mathbf{L}_2^0(Q)$ пересечение пространства $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ с ядром оператора ротор. Базис этого подпространства состоит из вектор-функций $\{\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\}$, если $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$, и базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, если $\mathbf{k} = 0$.

Конечномерные подпространства в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, образованные собственными вектор-функциями оператора ротор, отвечающими собственным значениям $\pm|\mathbf{k}|$, обозначим через $\mathbf{L}_2^{\pm|\mathbf{k}|}(Q)$. Эти гиперплоскости взаимноортогональны в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, их размерности совпадают и равны $\varkappa(|\mathbf{k}|)$.

Обозначим через $\mathbf{L}_2^{\pm}(Q)$ объединения гиперплоскостей $\mathbf{L}_2^{\pm|\mathbf{k}|}(Q)$ при всех $|\mathbf{k}| > 0$. Это бесконечномерные подпространства в $\mathbf{L}_2(Q)$, которые также взаимноортогональны и ортогональны подпространству $\mathbf{L}_2^0(Q)$. Мы доказываем, что пространство $\mathbf{L}_2(Q)$, разлагается в прямую сумму трех взаимно ортогональных подпространств:

$$\mathbf{L}_2(Q, 2\pi) = \mathbf{L}_2^0(Q) \oplus \mathbf{L}_2^+(Q) \oplus \mathbf{L}_2^-(Q).$$

Это означает, что любая вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ из $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ может быть представлена в виде суммы трех вектор-функций:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^+(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^-(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2^0(Q)$, а $\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2^{\pm}(Q)$.

Используя разложение функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в комплексный ряд Фурье, мы получаем разложение функции в ряды по базисным функциям подпространств $\mathbf{L}_2^0(Q)$, $\mathbf{L}_2^+(Q)$, $\mathbf{L}_2^-(Q)$.

В §5.3 приводится диаграмма кратности собственных значений, меньших восьми, составленная на основе программы, написанной Ю. Н. Поляковым.

В §6 приводится решение уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ при любом заданном комплексном числе λ и комплексной функции $\mathbf{f}$ из пространства $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

Доказано следующее утверждение: 1) пусть число λ не совпадает ни с одним из собственных значений оператора ротор, то есть $\lambda \neq \pm|\mathbf{k}|$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$. Тогда это уравнение имеет единственное решение, которое дается формулой (26) (детальнее см. теорему 1); 2) если $\lambda = 0$, тогда это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости (62), (63) на функцию $\mathbf{f}$. Однородное уравнение имеет бесконечно много линейно независимых решений, которые можно получить из формулы (64), дающей общее решение уравнения (см. теорему 2); 3) если же λ совпадает с одним из ненулевых собственных значений оператора ротор, то уравнение разрешимо по Фредгольму, и его индекс равен нулю. При этом однородное уравнение имеет $\varkappa(\mathbf{k}_0)$ линейно независимых решений, а неоднородное уравнение разрешимо при таком же числе линейно независимых условий ортогональности (71).

Формула (73) дает общее решение уравнения при выполнении условий разрешимости (детальнее см. теорему 3).

В §7 формулируется результат решения спектральной задачи для системы уравнений Стокса с периодическими краевыми условиями. Собственные значения этой задачи равны $\nu|\mathbf{k}|^2$ для всех $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ (теорема 4). Получается, что каждому ненулевому собственному числу $\nu|\mathbf{k}|^2$ оператора Стокса соответствует два собственных числа $(|\mathbf{k}_0|)$ и $(-|\mathbf{k}_0|)$ ротора, причем собственные функции ротора являются также собственными функциями оператора Стокса (теорема 5). Отметим, что не все собственные функции ротора являются собственными функциями оператора Стокса, таковыми являются вектор-функции $\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, которые не являются соленоидальными. В §8 решается система

$$-\nu(\Delta \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{S}$$

с параметром $\lambda^2 \in \mathbb{C}$ в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, и доказаны следующие утверждения.

1. Если $\lambda^2 \neq |\mathbf{k}|^2$ при любых $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$, то система (S) разрешима для любой $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, причем v определяется однозначно, а p – с точностью до произвольной постоянной, и $v \in W_2^2(Q, 2\pi)$, а $p \in W_2^1(Q, 2\pi)$ (теорема 6).

2. Если $\lambda = 0$, то система (S) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (99). При выполнении этого условия v определяется с точностью до произвольного постоянного вектора, а p – с точностью до константы (теорема 7).

3. Если $\lambda^2 = |\mathbf{k}_0|^2$, то система (S) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия (101). При их выполнении общее решение системы задается формулами (88), (89) и (102), (103) (теорема 8).

2. Постановка задачи

2.1. Постановка задачи 1.

Задача 1. Найти все собственные значения λ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ оператора rot в классе $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, то есть числа λ и ненулевые вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q.$$

Замечание. Это уравнение понимается в смысле теории обобщенных функций. В §5 мы выпишем явные выражения для собственных вектор-функций этой задачи при $\lambda \neq 0$, которые показывают, что они бесконечно дифференцируемы.

О точке спектра $\lambda = 0$.

Утверждение 1. *Нулевой точке спектра оператора вихря соответствует бесконечная система собственных вектор-функций вида*

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^0 = \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{если} \ \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\},$$

$$\text{и базисные векторы} \quad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \quad \text{если} \quad \mathbf{k} = 0.$$

Действительно, пусть $v(\mathbf{x})$ – любая гладкая периодическая функция, производные которой также периодичны. Тогда $\mathbf{u}(x) = \nabla v(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Полагая $v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = -ie^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ получим указанные выше функции при $\mathbf{k} \neq 0$. Любые постоянные вектор-функции, в частности векторы $\mathbf{e}_j$, очевидно также удовлетворяют этому уравнению.

Отметим, что любой комплексный вектор $\mathbf{c} = (c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)})$ представляется в виде суммы $\sum_{j=1}^{3} c^{(j)}\mathbf{e}_j$ с комплексными компонентами $c^{(j)}$ в базисе $\mathbf{e}_j$. Мы предполагаем, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют ортонормальный базис в $\mathbf{R}^3$. Этот базис фиксирован.

3. Исследование задачи

3.1. Переход к вспомогательным задачам.

Введем в рассмотрение операторы $A_\lambda = (\operatorname{rot} + \lambda\,\mathrm{I})$ и $A_{-\lambda} = (\operatorname{rot} - \lambda\,\mathrm{I})$. Решение спектральной задачи 1 состоит в решении операторного уравнения

$$A_{-\lambda}\mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

относительно λ и $\mathbf{u}$. Применив к этому уравнению оператор div, получим

$$\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

Так как $\lambda \neq 0$, то $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Из известных формул для квадрата оператора ротор легко получить соотношение

$$A_\lambda A_{-\lambda}\mathbf{u} = A_{-\lambda}A_\lambda\mathbf{u} = -(\Delta + \lambda^2)\mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{3}$$

Из этих соотношений получаем, что любое решение уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

при $\mu = \lambda^2$. Мы приходим к задаче.

Задача 2. Найти все собственные значения μ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ оператора (4) в классе $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, то есть числа μ_n и ненулевые вектор-функции $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$, удовлетворяющие уравнениям (4).

Отметим, что в системе (4) первые три уравнения распадаются. Поэтому каждая компонента u_j решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ уравнения (1) является решением скалярного уравнения

$$-\Delta v = \mu v, \quad v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, \operatorname{mod} 2\pi), \tag{5}$$

при $\mu = \lambda^2$; $v = u_j$, $j = 1, 2, 3$.

Мы приходим к задаче.

Задача 3. Найти все собственные значения μ и собственные функции $v(\mathbf{x})$ в классе $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ скалярного оператора Лапласа (5).

Далее нас будут интересовать собственные функции, отвечающие ненулевым собственным значениям λ. Чтобы их выделить, удобно ввести понятие S-пары задачи 1. S-парой называется пара $(\lambda, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$, в которой как собственное значение λ, так и соответствующая ему собственная вектор-функция, отличны от нуля.

Аналогично определяются S-пары задач 2 и 3.

В этих терминах полученные выше результаты формулируется так.

Утверждение 2. *Любой S-паре $(\lambda, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ задачи* 1 *соотвествует S-пара $(\lambda^2, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ задачи* 2.

Утверждение 3. *Любой S-паре $(\lambda, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ задачи* 1 *соотвествуют три S-пары $(\lambda^2, \mathbf{u}_\mathrm{j}(\mathbf{x}))$ задачи* 3.

3.2. Решение задачи 3.

Решение задачи 3 известно. Она решается методом разделения переменных. Если $\mu = |\mathbf{k}|^2$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ (то есть вектор $\mathbf{k}$ имеет целочисленные компоненты), то функция $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ удовлетворяет уравнению:

$$-\Delta v = |\mathbf{k}|^2 v.$$

Обратно, периодические решения уравнения (5) существуют только тогда, когда $\mu = |\mathbf{k}|^2, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$. При $\mathbf{k} = 0$ периодическим решением уравнения (6) является любая комплексная постоянная ($v = c \neq 0$).

Зафиксируем $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ и рассмотрим все вектора $\mathbf{k}$ такие, что $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$. Тогда функции $v_\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \alpha_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, где $\alpha_\mathbf{k} \in \mathbb{C}$, являются решениями одного и того же уравнения (6) с $\mu = |\mathbf{k}_0|^2 = |\mathbf{k}|^2$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}_0|} v_\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}_0|} \alpha_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{6}$$

Отметим, что функции $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ при различных $\mathbf{k}$ взаимноортогональны в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$. Поэтому они линейно независимы.

Таким образом, $(|\mathbf{k}|^2, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})$ образуют S-пары задачи 3 для любого $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$, $|\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2 + \mathbf{k}_3^2$. Собственному значению $|\mathbf{k}_0|^2$ отвечает столько линейно независимых собственных функций, сколько точек пересечения имеет целочисленная решетка со сферой радиуса $|\mathbf{k}_0|$. Это число обозначим через $\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$.

Итак, имеет место

Утверждение 4. *Собственное значение $\mu = |\mathbf{k}_0|^2$ задачи 3 имеет кратность, равную числу точек целочисленной решетки в $\mathbf{R}^3$ лежащих на сфере радиуса $|\mathbf{k}_0|$. Ему отвечают собственные функции вида $w_\mathbf{k} = (2\pi)^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ при всех $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$. Они образуют часть ортонормированного базиса в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.*

Известно, что любая функция из $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ разлагается в ряд Фурье по функциям $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|^2=0}^{\infty} f_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{7}$$

где

$$f_\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_Q f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}, \tag{8}$$

причем ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ сходится к ней в среднем (то есть по норме пространства $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$), а функции $(2\pi)^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$, образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ (см. [5, 6]).

Указанный в (7) способ суммирования ряда Фурье означает, что

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} S_N(\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \mathbf{L}_2(Q, 2\pi),$$

его частичные суммы имеют вид

$$S_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|^2=0}^{N} f_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3.$$

Они содержат собственные функции оператора Лапласа, отвечающие собственным значениям от $\mu = 0$ до $\mu = N$ и соответствуют точкам целочисленной решетки, лежащим внутри замкнутого шара радиуса $\sqrt{N}$. Но не для всякого $n \in [1, N]$ существует вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ такой, что $n = |\mathbf{k}|^2$, первое из таких чисел равно семи.

Поэтому при переходе от S_{N-1} к S_N мы либо добавляем к S_{N-1} все собственные функции, отвечающие $\mu = N$, если существует вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ такой, что $|\mathbf{k}|^2 = N$, либо ничего не добавляем в противном случае. Очевидно, что при стремлении N к бесконечности мы не пропустим ни одной точки целочисленной решетки.

Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 5. *Число μ является собственным значением задачи 3 тогда и только тогда, когда существует целочисленный вектор $\mathbf{k}_0$ такой, что $\mu = |\mathbf{k}_0|^2$. Линейное пространство решений уравнения (5) с $\mu = |\mathbf{k}_0|^2$ имеет вид (6). Его комплексная размерность равна $\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$.*

4. Решение задачи 2

Пусть $\mathbf{c_k}$ – трехмерный вектор с комплексными компонентами, то есть $\mathbf{c_k} \in \mathbb{C}^3$, тогда вектор-функция $\mathbf{u_k} = \mathbf{c_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ является решением уравнения

$$-\Delta\mathbf{u} = |\mathbf{k}|^2\mathbf{u}. \tag{9}$$

Так как

$$\operatorname{div}\mathbf{u_k} = \operatorname{div}\mathbf{c_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = i\sum_{j=1}^{3} c_{\mathbf{k}}^{(j)} k_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = i(\mathbf{c_k}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

где $(\mathbf{c_k}, \mathbf{k}) = \sum\limits_{j=1}^{3} c_{\mathbf{k}}^{(j)} k_j$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{c_k}$ и $\mathbf{k}$ в $\mathbb{C}^3$, то вектор-функция $\mathbf{u_k}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{c_k}, \mathbf{k}) = 0. \tag{10}$$

Если $\mathbf{k} = 0$, то условию (10) удовлетворяет любой комплексный вектор $\mathbf{c}_0$, и, в частности, базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Если же $\mathbf{k} \neq 0$, то векторы $\mathbf{c}_k$, удовлетворяющие этому условию, образуют в $\mathbb{C}^3$ двумерную комплексную плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{k}$. Обозначим ее через $\mathbf{P_k}$. Действительно, из трех комплексных компонент вектора $\mathbf{c_k}$ только две являются линейно независимыми. Третья же выражается через них согласно соотношению (10).

Таким образом, решениями задачи 2 являются S-пары $(|\mathbf{k}|^2, \mathbf{c_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$, где векторы $\mathbf{c_k}$ удовлетворяют условию (10) при $\mathbf{k} \neq 0$.

Любую вектор-функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ из векторного пространства $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ можно разложить в ряд Фурье, аналогичный ряду (7), коэффициенты $\mathbf{f}_k$ которого определяются формулой (8). Причем они являются векторами, так как $\mathbf{f}$ является вектором.

Нулевому собственному значению задачи 2 соответствуют собственные векторы $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$.

Ненулевому собственному значению $|\mathbf{k}_0|^2$ задачи 2 соотвеству-ют вектор-функции $\mathbf{c}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ для всех $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ таких, что $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$ и $\mathbf{c}_\mathbf{k} \in \mathbf{P}_\mathbf{k}$. В пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ из этих вектор-функций можно составить ортонормированную систему векторов. Линейную оболочку этой системы векторов обозначим $\mathbf{N}_{|\mathbf{k}_0|^2}$. Так как комплексная плоскость $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ имеет размерность 2, то комплексная размерность $\mathbf{N}_{|\mathbf{k}_0|^2}$ равна $2\varkappa(\mathbf{k}_0)$, где $\varkappa(\mathbf{k}_0)$ – это число точек пересечения целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$ и сферы С радиуса $|\mathbf{k}_0|$.

Отметим, что при любом $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ гиперплоскость $\mathbf{N}_{|\mathbf{k}|^2}$ ортогональна в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ системе функций из ядра оператора ротор, указанных в п. 2.2. Действительно, учитывая ортогональность функций $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ при различных $\mathbf{k}$ и соотношение (10) имеем

$$(\mathbf{c}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \mathbf{n} e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}) = (\mathbf{c}_\mathbf{k}, \mathbf{n})(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}) =$$
$$= (\mathbf{c}_\mathbf{k}, \mathbf{n})\delta_{\mathbf{kn}}(2\pi)^3 = (2\pi)^3(\mathbf{c}_\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 0.$$

Чтобы упростить формулы, будем обозначать $|\mathbf{k}_0|$ через λ.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Если вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ принадлежит гиперплоскости $\mathbf{N}_{\lambda^2}$, то*

$$A_{\pm\lambda} A_{\pm\lambda} \mathbf{u} = \pm 2\lambda A_{\pm\lambda} \mathbf{u}, \quad A_{\pm\lambda} A_{\mp\lambda} \mathbf{u} = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Эти соотношения легко получить прямым вычислением, используя формулы (3), (4).

Обозначим $B_\lambda = \frac{1}{2\lambda} A_\lambda$. Из леммы 1 вытекает

Следствие. *На гиперплоскости $\mathbf{N}_{\lambda^2}$ операторы $B_{\pm\lambda}$ являются проекторами, так как они удовлетворяют соотношениям*

$$B_{\pm\lambda} B_{\pm\lambda} \mathbf{u} = B_{\pm\lambda} \mathbf{u}, \quad B_{\pm\lambda} B_{\mp\lambda} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{N}_{\lambda^2}. \tag{12}$$

Обозначим через $R_{\pm\lambda}$ ядра операторов $B_{\mp\lambda}$. По определению $R_{\pm\lambda}$ являются гиперплоскостями. Из соотношений (2) и (3) вытекает, что гиперплоскости $R_{\pm\lambda}$ являются подпространствами линейного пространства $\mathbf{N}_{\lambda^2}$. Из соотношений (12) вытекает, что операторы $B_{\pm\lambda}$ отображают гиперплоскость $\mathbf{N}_{\lambda^2}$ в ядра операторов $B_{\mp\lambda}$, т.е. в $R_{\pm\lambda}$.

Лемма 2. *Образ оператора $B_{\pm\lambda}$ совпадает с ядром оператора $B_{\mp\lambda}$ на $\mathbf{N}_{\lambda^2}$.*

Доказательство. Одно из включений мы уже доказали. Докажем обратное. Пусть $\mathbf{u} \in R_\lambda$. Соотношение $B_{-\lambda}\mathbf{u} = 0$ эквивалентно соотношению $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Добавим к левой и правой части этого равенства $\lambda\mathbf{u}$ и разделим на 2λ. Получим соотношение $B_\lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Лемма 2 доказана.

Следствие. *Всякая точка $\mathbf{u}^\pm$ из $R_{\pm\lambda} \subset \mathbf{N}_{\lambda^2}$ является неподвижной при отображении $B_{\pm\lambda}$, то есть $\mathbf{u}^\pm = B_{\pm\lambda}\mathbf{u}^\pm$.*

Нетрудно доказать, что на периодических вектор-функциях ротор является самосопряженным оператором в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{3} \int_Q (\operatorname{rot}\mathbf{u})_j \overline{\mathbf{v}_j} d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} \int_Q \mathbf{u}_j \overline{(\operatorname{rot}\mathbf{v})_j} d\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v}).$$

Следовательно, при вещественных λ операторы $B_{\pm\lambda}$ также являются самосопряженными в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$:

$$(B_{\pm\lambda}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, B_{\pm\lambda}\mathbf{v}). \tag{13}$$

Докажем, что гиперплоскости R_λ и $R_{-\lambda}$ взаимноортогональны в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

Действительно, пусть $\mathbf{u}^\pm \in R_{\pm\lambda}$, тогда согласно предыдущему $\mathbf{u}^\pm = B_{\pm\lambda}\mathbf{u}^\pm$. Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)$. Используя формулы (13) и (12), получаем

$$(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = (B_\lambda\mathbf{u}^+, B_{-\lambda}\mathbf{u}^-) = (B_{-\lambda}B_\lambda\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = 0. \tag{14}$$

Таким образом, линейные пространства R_λ и $R_{-\lambda}$ являются взаимноортогональными подпространствами в пространстве $\mathbf{N}_{\lambda^2}$.

Докажем, что их прямая сумма совпадает с $\mathbf{N}_{\lambda^2}$, то есть

$$\mathbf{N}_{\lambda^2} = R_\lambda \oplus R_{-\lambda}, \quad \lambda = |\mathbf{k}_0| \neq 0. \tag{15}$$

Действительно, обозначим $\mathbf{u}^{\pm} = B_{\pm\lambda}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{N}_{\lambda^2}$ и положим $\mathbf{h} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{+} - \mathbf{u}^{-}$. Отметим, что $\mathbf{u}^{\pm} \in R_{\pm\lambda}$ согласно (12). Применим к $\mathbf{h}$ оператор B_{λ}:

$$B_{\lambda}\mathbf{h} = B_{\lambda}\mathbf{u} - B_{\lambda}\mathbf{u}^{+} - B_{\lambda}\mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{+} - \mathbf{u}^{+} = 0,$$

так как $B_{\lambda}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{+} = B_{\lambda}\mathbf{u}^{+}$ и $B_{\lambda}\mathbf{u}^{-} = 0$ согласно формулам (12).

Аналогично получаем $B_{-\lambda}\mathbf{h} = 0$. Вспоминая определения операторов $B_{\pm\lambda}$, видим, что эти соотношения эквивалентны соотношениям $(\operatorname{rot} \pm\lambda)\mathbf{h} = 0$. Откуда имеем $2\lambda\mathbf{h} = 0$ и, значит, $\mathbf{h} = 0$. Следовательно, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{+} + \mathbf{u}^{-}$, где $\mathbf{u}^{\pm} \in R_{\pm\lambda}$, причем $\mathbf{u}^{+} \perp \mathbf{u}^{-}$ согласно формуле (14).

5. Решение задачи 1

Согласно утверждению 3, любой S-паре $(\lambda, \mathbf{u})$ задачи 1 соответствует S-пара $(\lambda^2, \mathbf{u})$ задачи 2. Как показано в предыдущем пункте любая собственная вектор-функция, отвечающая собственному значению $\lambda^2 = |\mathbf{k}_0|^2$ принадлежит гиперплоскости $\mathbf{N}_{\lambda^2}$. Наша задача теперь состоит в том, чтобы среди вектор-функций $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ выбрать те, которые удовлетворяют уравнениям $A_{\pm\lambda}\mathbf{u} = 0$ и, тем самым, являются собственными вектор-функциями оператора ротор. Так как $\lambda \neq 0$, то эти уравнения эквивалентны уравнениям $B_{\pm\lambda}\mathbf{u} = 0$. Значит, согласно определению пространств $R_{\pm\lambda}$, необходимо выбрать вектора $\mathbf{u}^{\pm}$, принадлежащие пространствам R_{λ} и $R_{-\lambda}$, соотвественно.

5.1. Сведение к алгебраической задаче. Зафиксируем вектор $\mathbf{k}$ такой, что $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0| = \lambda$, и рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Она принадлежит пространству $\mathbf{N}_{\mathbf{k}_0^2}$ тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ принадлежит комплексной плоскости $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$, то есть удовлетворяет условию (10). К функции $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ применим операторы $B_{\pm\lambda}(\partial)$ и обозначим $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}{}^{\pm}(\mathbf{x}) \equiv B_{\pm\lambda}\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$. Так как вектор $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ постоянный, то оператор дифференцирования действует только на экспоненту. Поэтому

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{x}) \equiv B_{\pm\lambda}(\partial)\left(\mathbf{c}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c}_{\mathbf{k}}, \qquad (16)$$

где $B_{\lambda}(i\mathbf{k})$ символическая матрица оператора $B_{\lambda}(\partial)$. Она получается из матрицы $B_{\lambda}(\partial)$ заменой знаков дифференцирования ∂_j

на ik_j, а именно,

$$B_\lambda(\partial) = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \lambda & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & \lambda & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$B_\lambda(i\mathbf{k}) = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \lambda & -ik_3 & ik_2 \\ ik_3 & \lambda & -ik_1 \\ -ik_2 & ik_1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Если обозначить $\mathbf{c_k}^{\pm} \equiv B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}$, то соотношение (16) принимает вид

$$\mathbf{u_k}^{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{c_k}^{\pm}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{c_k}^{\pm} \equiv B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}. \tag{17}$$

Лемма 3. *На двумерной комплексной плоскости $\mathbf{P_k}$ в $\mathbb{C}^3$ матрицы $B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})$ являются проекторами, так как для любого вектора $\mathbf{c_k} \in \mathbf{P_k}$ имеют место соотношения*

$$B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k} = B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}, \quad B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})B_{\mp\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k} = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Эти формулы являются следствием формул (12), соотношений (16) и определения линейного пространства $\mathbf{N}_{\lambda^2}$ как линейной оболочки системы векторов $\mathbf{u_k} = \mathbf{c_k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Применяя формулы (12) к $\mathbf{u_k}$ и сокращая экспоненту получим (18).

Обозначим через $\mathbf{P_k}^{\pm}$ ядра матриц $B_{\mp\lambda}(i\mathbf{k})$ на плоскости $\mathbf{P_k}$. Отметим, что они содержат ненулевые вектора, так как определители матриц $B_{\mp\lambda}(i\mathbf{k})$ равны нулю в предположении, что $\lambda = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$, которое здесь и ниже будем сохранять. Нетрудно убедиться, что ранги этих матриц равны двум, если $\mathbf{k} \neq 0$. Из соотношения (18) видно, что при любых $\mathbf{c_k} \in \mathbf{P_k}$ векторы $\mathbf{c_k}^{\pm} \equiv B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}$ принадлежат множествам $\mathbf{P_k}^{\pm}$ и не меняются при отображениях $B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})$, то есть $B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}^{\pm} = \mathbf{c_k}^{\pm}$. Аналогично лемме 2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. *На двумерной комплексной плоскости $\mathbf{P_k}$ образ матрицы $B_{\pm\lambda}(i\mathbf{k})$ совпадает с ядром матрицы $B_{\mp\lambda}(i\mathbf{k})$.*

Матрицы $B_\lambda(i\mathbf{k})$ при действительных λ являются самосопряженными относительно эрмитового скалярного произведения комплексных векторов, поэтому из соотношений (18) аналогично (14) имеем

$$(\mathbf{c_k}^+, \mathbf{c_k}^-) = (B_\lambda(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}^+, B_{-\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}^-) =$$

$$= (B_{-\lambda}(i\mathbf{k})B_{\lambda}(i\mathbf{k})\mathbf{c_k}^+, \mathbf{c_k}^-) = 0.$$

Таким образом комплексные прямые $\mathbf{P_k}^\pm$ ортогональны на комплексной плоскости $\mathbf{P_k}$, а их прямая сумма совпадает с $\mathbf{P_k}$:

$$\mathbf{P_k} = \mathbf{P_k}^+ \oplus \mathbf{P_k}^-, \quad |\mathbf{k}| \neq 0. \tag{19}$$

Доказательство этого соотношения аналогично доказательству равенства (15).

Таким образом, при $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$ вектор-функции $\mathbf{u_k}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{c_k}^\pm e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ принадлежат пространствам $R_{\pm|\mathbf{k}_0|}$ тогда и только тогда, когда вектора $\mathbf{c_k}^\pm$ принадлежат комплексным прямым $\mathbf{P_k}^\pm$.

Любой вектор из $R_{|\mathbf{k}_0|}$ представляется в виде

$$\sum_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}_0|} \mathbf{c_k}^+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{c_k}^+ \in \mathbf{P_k}^+.$$

Размерности пространств $R_{\pm|\mathbf{k}_0|}$ равны числу точек пересечения целочисленной решетки со сферой радиуса $|\mathbf{k}_0|$.

5.2. Построение ортогонального базиса в пространствах $R_{\pm|\mathbf{k}_0|}$.

Рассмотрим два случая:

а) $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

Ненулевой вектор $\mathbf{a_k} = (k_2, -k_1, 0)$ очевидно ортогонален вектору $\mathbf{k}$. Тогда векторы $\mathbf{a_k}^\pm = B_{\pm|\mathbf{k}_0|}(i\mathbf{k})\mathbf{a_k}$ имеют вид

$$\mathbf{a_k}^\pm = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \pm\lambda k_2 + ik_1k_3 \\ \mp\lambda k_1 + ik_2k_3 \\ -i(k_1^2 + k_2^2) \end{pmatrix}, \qquad \lambda = |\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}|.$$

Они не равны нулю, так как $|\mathbf{a_k}^\pm|^2 = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)$.

б) $k_1^2 + k_3^2 \neq 0$.

Ненулевой вектор $\mathbf{b_k} = (k_3, 0, -k_1)$ также ортогонален вектору $\mathbf{k}$. Тогда вектора $\mathbf{b_k}^\pm = B_{\pm|\mathbf{k}_0|}(i\mathbf{k})\mathbf{b_k}$ имеют вид

$$\mathbf{b_k}^\pm = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \pm\lambda k_3 - ik_1k_2 \\ i(k_1^2 + k_3^2) \\ \mp\lambda k_1 - ik_2k_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = |\mathbf{k}_0|.$$

Они также не равны нулю, так как $|\mathbf{b_k}^\pm|^2 = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_3^2)$.

Очевидно, что вектора $\mathbf{a_k}^+$ и $\mathbf{b_k}^+$ принадлежат комплексной прямой $\mathbf{P_k}^+$, а вектора $\mathbf{a_k}^-$ и $\mathbf{b_k}^-$ принадлежат комплексной прямой $\mathbf{P_k}^-$.

В случае, когда выполняются условия а) и б) одновременно, вектора $\mathbf{a_k}^{\pm}$ и $\mathbf{b_k}^{\pm}$ линейно выражаются друг через друга (над полем $\mathbb{C}$).

Так как хотя бы одно из этих условий выполняется, если $\mathbf{k} \neq 0$, то полученные вектора образуют ортогональный базис в плоскости $\mathbf{P_k}$.

Рассмотрим все вектора $\mathbf{k}$, лежащие на сфере радиуса $|\mathbf{k}_0|$. Будем выбирать в качестве векторов $\mathbf{c_k}^{\pm}$ вектора $\mathbf{a_k}^{\pm}$, если выполняется условие а). В противном случае будем брать вектора $\mathbf{b_k}^{\pm}$. Используя эти векторы составим вектор-функции $\mathbf{u_k}^{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{c_k}^{\pm} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, для которых

$$\operatorname{rot} \mathbf{u_k}^{\pm}(\mathbf{x}) = \pm|\mathbf{k}_0|\mathbf{u_k}^{\pm}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|.$$

Они образуют ортогональные базисы в каждом из пространств $R_{\pm|\mathbf{k}_0|}$.

Собственному числу $\lambda = 1$ соответствуют шесть линейно независимых вектор-функций:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mp i \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i x_1}, \quad \begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i x_2}, \quad \begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i x_3}.$$

Вещественных линейно независимых собственных вектор-функций также шесть (так как для любого собственного значения λ собственные вектор-функции, соответствующие векторам $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ являются комплексно сопряженными). Общее решение уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{u}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A\sin x_2 + D\sin x_3 + F\cos x_2 + E\cos x_3 \\ B\sin x_1 - E\sin x_3 + C\cos x_1 + D\cos x_3 \\ -C\sin x_1 + F\sin x_2 + B\cos x_1 - A\cos x_2 \end{pmatrix},$$

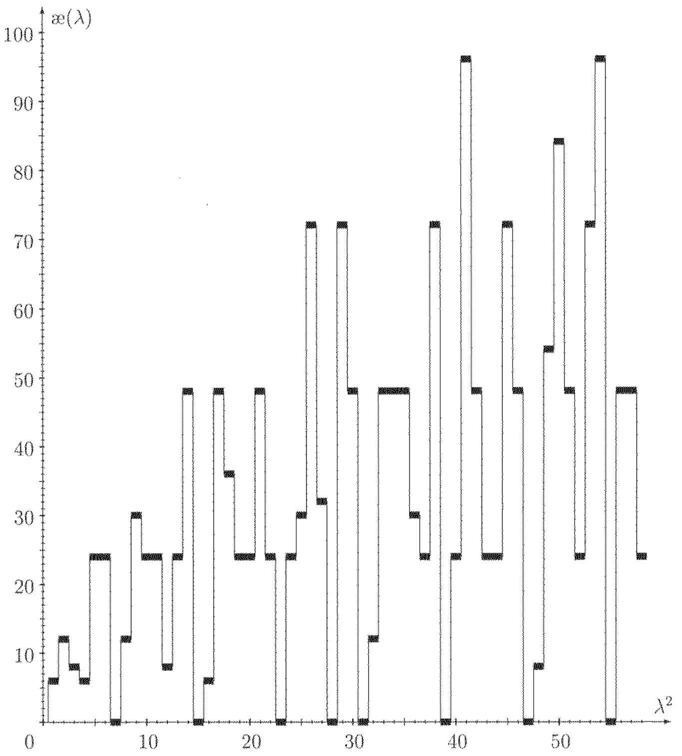
где A, B, C, D, E, F – произвольные действительные постоянные. Французский математик М. Эно провел экспериментальное исследование топологии линий этого поля, в котором $A = C = E = 0$, на трехмерном торе $\{x_1, x_2, x_3, \operatorname{mod} 2\pi\}$ при помощи машины Института астрофизики в Париже. В результате обнаружено (как пишет В. И. Арнольд) "некоторое количество торов, заполненных линиями поля ("магнитных поверхностей"), и наряду с ними целые области трехмерного пространства, которые линии поля заполняют, насколько можно судить по экспериментальным данным, эргодически плотным образом".

5.3. Диаграмма кратности собственных значений оператора вихря.

Как известно, не всякое целое число представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел. Ниже приводится таблица последовательных значений $\mu = \lambda^2$, представимых в виде $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = |\mathbf{k}|^2$, соответствующие значения $|\lambda|$ и их кратности, которые равны числу целочисленных точек, лежащих на сфере радиуса $|\lambda|$. Представленные значения найдены программой, написанной Ю. Н. Поляковым.

Знач. λ^2	Модуль λ	Кратн.	Знач. λ^2	Модуль λ	Кратн.
1	1	6	26	5.0990	72
2	1.4142	12	27	5.1962	32
3	1.7321	8	28		0
4	2	6	29	5.3852	72
5	2.2361	24	30	5.4772	48
6	2.4495	24	31		0
7		0	32	5.6569	12
8	2.8284	12	33	5.7446	48
9	3	30	34	5.8310	48
10	3.1623	24	35	5.9161	48
11	3.3166	24	36	6	30
12	3.4641	8	37	6.0828	24
13	3.6056	24	38	6.1644	72
14	3.7417	48	39		0
15		0	40	6.3246	24
16	4	6	41	6.4031	96
17	4.1231	48	42	6.4807	48
18	4.2426	36	43	6.5574	24
19	4.3589	24	44	6.6332	24
20	4.4721	24	45	6.7082	72
21	4.5826	48	46	6.7823	48
22	4.6904	24	47		0
23		0	48	6.9282	8
24	4.8990	24	49	7	54
25	5	30	50	7.0711	84

На основании этой таблицы составлена диаграмма кратностей собственных значений, которая иллюстрирует их более наглядно.



5.4. Разложение произвольного вектора из $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$ по собственным вектор-функциям оператора вихря.

Пусть вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(Q,2\pi)$, разложим ее в ряд Фурье

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|^2=0}^{\infty} \mathbf{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_Q \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \tag{21}$$

причем ряд Фурье функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ сходится к ней в среднем (то есть по норме пространства $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$). Вектора $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$ единственным образом представляются в виде суммы

$$\mathbf{f_k} = \alpha_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^{+}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{+} + \beta_{\mathbf{k}}^{-}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{-}, \tag{22}$$

если $|\mathbf{k}| > 0$, и $\mathbf{f}_0 = \sum_{j=1}^{3} f_0^j \mathbf{e}_j$. Из взаимной ортогональности векторов $\dot{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, $\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{+} = \frac{\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{+}}{|\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{+}|}$ и $\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{-} = \frac{\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{-}}{|\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{-}|}$ получаем, что

$$\alpha_{\mathbf{k}} = (\mathbf{f_k}, \dot{\mathbf{k}}), \qquad \beta_{\mathbf{k}}^{\pm} = (\mathbf{f_k}, \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\pm}). \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в формулу (20) получаем разложение вектора $\mathbf{f}$ по собственным функциям оператора вихря:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} f_0^j \mathbf{e}_j + \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} (\alpha_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^{+}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{+} + \beta_{\mathbf{k}}^{-}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{-}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{24}$$

Запишем это разложение по другому,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^{+}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^{-}(\mathbf{x}), \tag{24_1}$$

где

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} f_0^j \mathbf{e}_j + \sum_{|\mathbf{k}^2|=1}^{\infty} \alpha_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{24_2}$$

$$\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}^2|=1}^{\infty} \beta_{\mathbf{k}}^{\pm}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{24_3}$$

вектор-функции $\mathbf{f}^0$, $\mathbf{f}^{+}$ и $\mathbf{f}^{-}$ принадлежат ортогональным подпространствам $\mathbf{L}_2^0(Q)$, $\mathbf{L}_2^{+}(Q)$ и $\mathbf{L}_2^{-}(Q)$ (соответственно) пространства $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$; формулы (24_2) и (24_3) дают их разложения по базисным векторам.

Из равенства Парсеваля вытекает

$$||\mathbf{f}||^2 = ||\mathbf{f}^0||^2 + ||\mathbf{f}^{+}||^2 + ||\mathbf{f}^{-}||^2 \tag{π}$$

аналог теоремы Пифагора, где $||\mathbf{f}|| = (\mathbf{f}, \mathbf{f})^{1/2}$ норма в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

6. Решение уравнения

Пусть заданы комплексное число λ и комплексная функция $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

Решим уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{25}$$

Решение уравнения также будем искать в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

Рассмотрим три случая:

1) пусть число λ не совпадает ни с одним из собственных значений оператора ротор, то есть $\lambda \neq \pm|\mathbf{k}|$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$. Тогда уравнение (25) имеет единственное решение, которое дается формулой

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} \frac{f_0^j}{\lambda}\mathbf{e}_j + \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{\lambda}\dot{\mathbf{k}} + \frac{\beta_{\mathbf{k}}^+}{\lambda + |\mathbf{k}|}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^+ + \frac{\beta_{\mathbf{k}}^-}{\lambda - |\mathbf{k}|}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^- \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{26}$$

Эта формула получается следующим образом. Функцию $\mathbf{f}$ представим в виде разложения (24), а неизвестное решение $\mathbf{u}$ аналогично представим в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{u}_0^j\mathbf{e}_j + \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} (\xi_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}}^+\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^+ + \eta_{\mathbf{k}}^-\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^-)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{27}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (25) получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\lambda u_0^j = f_0^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \lambda\xi_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}}, \tag{28}$$

$$(\lambda + |\mathbf{k}|)\eta_{\mathbf{k}}^+ = \beta_{\mathbf{k}}^+, \quad (\lambda - |\mathbf{k}|)\eta_{\mathbf{k}}^- = \beta_{\mathbf{k}}^-, \quad \forall\mathbf{k} : |\mathbf{k}| > 0. \tag{29}$$

По условию все эти уравнения разрешимы относительно неизвестных чисел u_0^j, $\xi_{\mathbf{k}}$, $\eta_{\mathbf{k}}^{\pm}$. Следовательно, решение уравнения (25) в этом случае дается формулой (26).

Рассмотрим структуру решения (26), $\mathbf{u} = \mathbf{G}_\lambda\mathbf{f}$, уравнения (25) детальнее. Введем операторы

$$\mathbf{G}_\lambda^0\mathbf{f}^0 = \lambda^{-1}\mathbf{f}^0 \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{f_i^j}{\lambda}\mathbf{e}_i + \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{\lambda}\dot{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{30}$$

$$\mathbf{G}_\lambda^+\mathbf{f}^+ = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^+}{\lambda + |\mathbf{k}|}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{31}$$

$$\mathbf{G}_\lambda^-\mathbf{f}^- = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^-}{\lambda - |\mathbf{k}|}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^- e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{32}$$

где f_i^j, $\alpha_{\mathbf{k}}$, $\beta_{\mathbf{k}}^+$ и $\beta_{\mathbf{k}}^-$ задаются формулами (21), (23). Они действуют в ортогональных подпространствах пространства $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$ (и каждый в своем)

$$\mathbf{G}_\lambda^0 : \mathbf{L}_2^0(Q) \to \mathbf{L}_2^0(Q), \quad \mathbf{G}_\lambda^\pm : \mathbf{L}_2^\pm(Q) \to \mathbf{L}_2^\pm(Q). \tag{33}$$

В операторной записи решение (26) уравнения (25) имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_\lambda \mathbf{f} \equiv \mathbf{G}_\lambda^0 \mathbf{f}^0 + \mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{f}^+ + \mathbf{G}_\lambda^- \mathbf{f}^-. \tag{34}$$

Оператор $\mathbf{G}_\lambda^0$ есть оператор умножения $\mathbf{f}^0(\mathbf{x})$ на комплексное число $\lambda^{-1} \neq 0$. Для него

$$\|\mathbf{G}_\lambda^0 \mathbf{f}^0\| = |\lambda|^{-1} \|\mathbf{f}^0\|. \tag{35}$$

Отметим, что $|\lambda|$ есть расстояние на комплексной плоскости от точки λ до нулевой точки спектра оператора ротор.

Для оператора $\mathbf{G}_\lambda^+$ имеем оценку

$$\|\mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{f}^+\|^2 = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{|\beta_{\mathbf{k}}^+|^2}{|\lambda + |\mathbf{k}||^2} \leqslant \frac{1}{(\rho_\lambda^-)^2} \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} |\beta_{\mathbf{k}}^+|^2 = \frac{1}{(\rho_\lambda^-)^2} \|\mathbf{f}^+\|^2,$$

где

$$\rho_\lambda^- = \min_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} |\lambda + |\mathbf{k}||, \tag{36}$$

из которой вытекает ограниченность $\mathbf{G}_\lambda^+$ в $\mathbf{L}_2^+(Q)$,

$$\|\mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{f}^+\| \leqslant \frac{1}{\rho_\lambda^-} \|\mathbf{f}^+\|, \tag{37}$$

где ρ_λ^- есть расстояние от точки λ до отрицательной части спектра ротора.

Аналогично,

$$\|\mathbf{G}_\lambda^- \mathbf{f}^-\| \leqslant \frac{1}{\rho_\lambda^+} \|\mathbf{f}^-\|, \tag{38}$$

где ρ_λ^+ есть расстояние от λ до положительной части спектра ротора.

Из этих оценок получаем оценку оператора $\mathbf{G}_\lambda$

$$\|\mathbf{G}_\lambda \mathbf{f}\|^2 = \|\mathbf{G}_\lambda^0 \mathbf{f}^0\|^2 + \|\mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{f}^+\|^2 + \|\mathbf{G}_\lambda^- \mathbf{f}^-\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|^2} \|\mathbf{f}^0\|^2 + \frac{1}{(\rho_\lambda^-)^2} \|\mathbf{f}^+\|^2 + \frac{1}{(\rho_\lambda^+)^2} \|\mathbf{f}^-\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho_\lambda^2} \|\mathbf{f}\|^2,$$

а именно,

$$\|\mathbf{G}_\lambda \mathbf{f}\| \leqslant \frac{1}{\rho_\lambda}\|\mathbf{f}\|, \tag{39}$$

где

$$\rho_\lambda = \min(|\lambda|, \rho_\lambda^-, \rho_\lambda^+) \tag{40}$$

есть расстояние от λ до спектра ротора Sp(rot).

Таким образом, если $f \in \mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ и $\lambda \notin \mathrm{Sp(rot)}$, то решение (26) уравнения (25) принадлежит $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ и для него имеет место оценка (39).

Рассмотрим три частных случая.

(a) Пусть заданная вектор-функция $\mathbf{f}$ принадлежит подпространству $\mathbf{L}_2^0(Q)$ в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, т.е.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{f}^+ = \mathbf{f}^- \equiv 0. \tag{41}$$

Тогда решение уравнения (25) дается формулой

$$\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}, \quad \text{где} \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}^0. \tag{42}$$

Отметим, что в этом случае $\mathrm{rot}\,\mathbf{f} \equiv 0$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \equiv 0$ также.

(b) Пусть заданная функция $\mathbf{f}$ принадлежит $\mathbf{L}_2^+(Q)$, т.е.

$$\mathbf{f}^0 \equiv 0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}^+, \quad \mathbf{f}^- \equiv 0. \tag{43}$$

Тогда решение уравнения (25) дается формулой

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}^+, \tag{44}$$

которое удовлетворяет оценке (37). Из формулы (31) оператора $\mathbf{G}^+$ видно, что он является сглаживающим и повышает гладкость $\mathbf{f}$ на единицу. Рассмотрим норму $\|\mathbf{u}\|_1^2$ в пространстве Соболева $W_2^1(Q, 2\pi)$. Через коэффициенты Фурье $\mathbf{u}_\mathbf{k}$ вектор-функции $\mathbf{u}$ она выражается формулой

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 = \sum_{|\mathbf{k}|^2=0}^{\infty} (1 + |\mathbf{k}|^2)|\mathbf{u}_\mathbf{k}|^2. \tag{45}$$

Для оператора $\mathbf{G}_\lambda^+$ имеем оценку

$$\|\mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{f}^+\|_1^2 = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{1 + |\mathbf{k}|^2}{|\lambda + |\mathbf{k}||^2}|\beta_\mathbf{k}^+|^2 \leqslant (C_\lambda^+)^2 \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} |\beta_\mathbf{k}^+|^2 = (C_\lambda^+)^2 \|\mathbf{f}^+\|_0^2,$$

где

$$(C_\lambda^+)^2 = \max_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{1+|\mathbf{k}|^2}{|\lambda+|\mathbf{k}||^2}. \tag{46}$$

Откуда следует оценка

$$\|\mathbf{G}_\lambda^+\mathbf{f}^+\|_1 \leqslant C_\lambda^+\|\mathbf{f}^+\|_0, \tag{47}$$

где $\|\mathbf{f}^+\|_0 = \|\mathbf{f}^+\|$ – норма $\mathbf{f}^+$ в $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$.

Таким образом, в условиях (43) решение (44) принадлежит пространству $W_2^1(Q,2\pi)$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{G}_\lambda^+\mathbf{f}\|_1 \leqslant C_\lambda^+\|\mathbf{f}\|_0, \quad \mathbf{f}=\mathbf{f}^+. \tag{48}$$

(c) Пусть заданная функция принадлежит пространству $\mathbf{L}_2^-(Q)$, т.е.

$$\mathbf{f}^0 \equiv 0, \quad \mathbf{f}^+ \equiv 0, \quad \mathbf{f}=\mathbf{f}^-. \tag{49}$$

Тогда решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_\lambda^-\mathbf{f}, \quad \text{где} \quad \mathbf{f}=\mathbf{f}^-, \tag{50}$$

удовлетворяет оценке (38). Для оператора $\mathbf{G}^-$ по симметрии имеет место оценка, аналогичная (47)

$$\|\mathbf{G}_\lambda^-\mathbf{f}^-\|_1 \leqslant C_\lambda^-\|\mathbf{f}^-\|_0. \tag{51}$$

Значит решение (50) принадлежит классу $W_2^1(Q,2\pi)$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{G}_\lambda\mathbf{f}\|_1 \leqslant C_\lambda^-\|\mathbf{f}\|_0, \quad \mathbf{f}=\mathbf{f}^-. \tag{52}$$

Эти рассуждения показывают, что в общем случае, если проекция $\mathbf{f}^0$ вектора $\mathbf{f}$ на пространство $\mathbf{L}_2^0(Q)$ не принадлежит никакому из пространств $W_2^\alpha(Q,2\pi)$ при $\alpha>0$, то решение уравнения (25) принадлежит $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$ и тоже не принадлежит никакому из пространств $W_2^\alpha(Q,2\pi)$ с $\alpha>0$. Рассмотрим подпространство $\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)$ в $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$ определяемое условиями; вектор-функция

$$\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(0,2\pi) \quad \text{и функция} \quad \operatorname{div}\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(0,2\pi). \tag{53}$$

Это пространство заключено между пространством $W_2^1(Q,2\pi)$ и $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$, а именно

$$W_2^1(Q,2\pi)\subset\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)\subset\mathbf{L}_2(Q,2\pi). \tag{54}$$

Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ принадлежит $\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)$. Для нее нормы $\|\mathbf{f}\|<\infty$ и $\|\operatorname{div}\mathbf{f}\|<\infty$. Согласно (24)

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = i\sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty}\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \operatorname{div}\mathbf{f}^0. \tag{55}$$

Следовательно,

$$\|\operatorname{div}\mathbf{f}\|^2 = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty}|\alpha_{\mathbf{k}}|^2|\mathbf{k}|^2 < \infty. \tag{56}$$

Откуда получаем, что проекция $\mathbf{f}^0$ вектора $\mathbf{f}$ на пространство $\mathbf{L}_2^0(Q)$ принадлежит пространству $W_2^1(Q,2\pi)$ и

$$\|\mathbf{f}^0\|_1^2 = \|\mathbf{f}^0\|_0^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{f}\|_0^2. \tag{57}$$

Значит, $\mathbf{G}_\lambda^0\mathbf{f}^0 = \lambda^{-1}\mathbf{f}^0(\mathbf{x}) \in W_2^1(Q,2\pi)$. Так как $\mathbf{G}_\lambda^+\mathbf{f}^+$ и $\mathbf{G}_\lambda^-\mathbf{f}^-$ также принадлежат этому пространству Соболева, то решение (34) принадлежит $W_2^1(Q,2\pi)$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{G}_\lambda\mathbf{f}\|_1 \leqslant C_\lambda\left(\|\operatorname{div}\mathbf{f}\|_0^2 + \|\mathbf{f}\|_0^2\right)^{1/2}, \quad \text{где} \quad C_\lambda = \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, C_\lambda^+, C_\lambda^-\right). \tag{58}$$

Отметим, что принадлежность $\mathbf{f}$ пространству $\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)$ является не только достаточным условием принадлежности решения (26) пространству $W_2^1(Q,2\pi)$, но и необходимым. Действительно, если $\mathbf{u}\in W_2^1(Q,2\pi)$ и удовлетворяет уравнению (25) с $\lambda\neq 0$, то

$$\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(Q,2\pi), \quad \operatorname{div}\mathbf{f} = \lambda\operatorname{div}\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(Q,2\pi) \tag{59}$$

и, значит, $\mathbf{f}\in\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)$. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Если число λ не принадлежит спектру оператора ротор, то уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{f}$ однозначно разрешимо для любой вектор-функции $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$. Его решение $\mathbf{u}=\mathbf{G}_\lambda\mathbf{f}$ задается рядом* (26) *(или формулой* (34)*) и согласно оценке* (39) *принадлежит пространству $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$. Однако, это решение может не принадлежать ни одному из пространств Соболева $W_2^\alpha(Q,2\pi)$ с $\alpha>0$. Если же $\mathbf{f}$ принадлежит пространству $\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)$ (см.* (53)*), то вектор-функция $\mathbf{u}=\mathbf{G}_\lambda\mathbf{f}$ принадлежит пространству $W_2^1(Q,2\pi)$.*

В этом случае оператор $\operatorname{rot}+\lambda\mathrm{I}$ отображает пространство $W_2^1(Q,2\pi)$ на пространство $\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)$ гомеоморфно (взаимно-однозначно и взаимно непрерывно), т.к. операторы

$$\operatorname{rot}+\lambda\mathrm{I}: W_2^1(Q,2\pi)\to\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi), \tag{60}$$

$$\mathbf{G}_\lambda=\mathbf{G}_\lambda^0\oplus\mathbf{G}_\lambda^+\oplus\mathbf{G}_\lambda^-:\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q,2\pi)\to W_2^1(Q,2\pi) \tag{61}$$

ограничены. Отметим, что оператор ротор не является ограниченным в пространстве $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$.

2) Пусть $\lambda=0$, тогда система уравнений (28) разрешима тогда и только тогда, когда f_0^j и $\alpha_{\mathbf{k}}$ равны нулю, т.е. когда обращается в нуль проекция $\mathbf{f}^0$ вектор-функции $\mathbf{f}$ на $\mathbf{L}_2^0(Q)$. Учитывая формулы (21) и (23) и соотношение (53) видим, что эта система условий разрешимости эквивалентна дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})=0 \tag{62}$$

и условию ортогональности к единичным базисным векторам, т.е.

$$\mathbf{f}_0=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_Q\mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0. \tag{63}$$

Если эти условия выполнены, то решение уравнения (25) при $\lambda=0$ дается формулой

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^3\mathbf{u}_0^j\mathbf{e}_j+\sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty}(\xi_{\mathbf{k}}\mathbf{k}+\frac{\beta_{\mathbf{k}}^+}{|\mathbf{k}|}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^+-\frac{\beta_{\mathbf{k}}^-}{|\mathbf{k}|}\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^-)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{64}$$

где $\mathbf{u}_0^j$ и $\xi_{\mathbf{k}}$ – произвольные комплексные постоянные.

Обозначив

$$\mathbf{a}_0=\sum_{j=1}^3\mathbf{u}_0^j\mathbf{e}_j,\quad \psi(\mathbf{x})=-i\sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty}\xi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\quad\text{и}\quad\varphi^0(\mathbf{x})=\mathbf{a}_0+\nabla\psi, \tag{65}$$

и учитывая обозначения (31) и (32), эту формулу перепишем в виде

$$\mathbf{u}=\varphi^0(\mathbf{x})+\mathbf{G}_0^+\mathbf{f}^++\mathbf{G}_0^-\mathbf{f}^-, \tag{66}$$

причем вектор $\mathbf{a}_0$ и функция $\psi(\mathbf{x})$ – произвольны. Операторы $\mathbf{G}_0^+$ и $\mathbf{G}_0^-$ ограничены в $\mathbf{L}_2^+(Q)$ и в $\mathbf{L}_2^-(Q)$ и удовлетворяют оценкам

$$\|\mathbf{G}_0^+\mathbf{f}^+\|\leqslant\|\mathbf{f}^+\|,\quad\|\mathbf{G}_0^-\mathbf{f}^-\|\leqslant\|\mathbf{f}^-\|, \tag{67}$$

т.к. согласно формулам (37) и (38), $\rho_0^- = \rho_0^+ = 1$. Поэтому решение (66) принадлежит пространству $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$, если произвольная вектор-функция $\varphi^0 \equiv \mathbf{a}_0 + \nabla\psi \in \mathbf{L}_2^0(Q)$.

Если же произвольная функция $\varphi^0(\mathbf{x})$ принадлежит классу $W_2^1(Q, 2\pi)$, то решение (66) также принадлежит классу $W_2^1(Q, 2\pi)$ потому, что операторы $\mathbf{G}_0^+$ и $\mathbf{G}_0^-$ повышают гладкость на единицу и удовлетворяют оценкам (47) и (51)

$$\|\mathbf{G}_0^+\mathbf{f}^+\|_1 \leqslant C_0^+\|\mathbf{f}^+\|_0, \quad \|\mathbf{G}_0^-\mathbf{f}^-\|_1 \leqslant C_0^-\|\mathbf{f}^-\|_0, \tag{68}$$

причем $C_0^+ = C_0^- = \sqrt{2}$ согласно формулам (46) и ее аналогу для C_λ^-.

Итак, доказана следующая

Теорема 2. *Система* $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ *разрешима в классе* $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ *тогда и только тогда, когда вектор-функция* $\mathbf{f}$ *из* $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ *удовлетворяет условиям* (62) *и* (63). *Если эти условия выполнены, то решение задачи определяется с точностью до произвольной функции* φ^0 *из* $\mathbf{L}_2^0(Q)$ *вида* $\varphi^0 = \mathbf{a}_0 + \nabla\psi$. *Если* $\varphi^0 \in \mathbf{L}_2^0(Q)$, *то решение уравнения (66) удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{u}\| \leqslant \left(\|\varphi^0\|^2 + \|\mathbf{f}\|^2\right)^{1/2}. \tag{69}$$

Если же $\varphi^0(\mathbf{x}) \in W_2^1(Q, 2\pi)$, *то решение* (66) *принадлежит классу* $W_2^1(Q, 2\pi)$ *и удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant \left(\|\varphi^0\|_1^2 + 2\|\mathbf{f}\|^2\right)^{1/2}. \tag{70}$$

3) Пусть λ совпадает с одним из ненулевых собственных значений оператора ротор. Для определенности пусть $\lambda = |\mathbf{k}_0|$, где $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}^3\backslash\{0\}$. Тогда система (29) разрешима тогда и только тогда, когда $\beta_{\mathbf{k}}^- = 0$ для всех $\mathbf{k}$ таких, что $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$.

Ввиду формул (23) эти условия имеют вид

$$\int\limits_Q (f(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^-)e^{-i\mathbf{kx}}\,dx = 0 \ \forall\mathbf{k} : |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|. \tag{71}$$

Их число равно $\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$.

При выполнении этих условий решение уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} + |\mathbf{k}_0|\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad |\mathbf{k}_0| \neq 0 \tag{72}$$

дается формулой

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^0_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^0 + \mathbf{G}^+_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^+ + \widehat{\mathbf{G}}^-_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^- + \sum_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}_0|}^{\infty} \eta^-_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c}^-_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad (73)$$

где $\eta_{\mathbf{k}}$ – произвольные комплексные постоянные и

$$\mathbf{G}_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^0 = |\mathbf{k}_0|^{-1}\mathbf{f}^0, \quad \mathbf{G}^+_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^+ = \sum_{\mathbf{k}^2=1}^{\infty} \frac{\beta^+_{\mathbf{k}} \dot{C}^+_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}_0| + |\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \qquad (74)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}^-_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^- = \sum_{\substack{\mathbf{k}^2=1 \\ |\mathbf{k}|^2 \neq |\mathbf{k}_0|^2}}^{\infty}{}' \frac{\beta^-_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{c}}^-_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}_0| - |\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \qquad (75)$$

Согласно (35) и (37), операторы $\mathbf{G}^0_{|\mathbf{k}_0|}$ и $\mathbf{G}^+_{|\mathbf{k}_0|}$ удовлетворяют оценкам

$$\|\mathbf{G}^0_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^0\| = \frac{1}{|\mathbf{k}_0|}\|\mathbf{f}^0\| \quad \text{и} \quad \|\mathbf{G}^+_{|\mathbf{k}_0|}\mathbf{f}^+\| \leqslant \frac{1}{|\mathbf{k}_0| + 1}\|\mathbf{f}^+\|. \qquad (76)$$

Теорема 3. *Уравнение* (72) *разрешимо в* $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ *тогда и только тогда, когда вектор-функция* $\mathbf{f}$ *из* $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ *удовлетворяет условиям* (71). *Если эти условия выполнены, то общее решение уравнения дается формулой* (73)*; оно принадлежит пространству* $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$. *Однородное уравнение имеет* $\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$ *линейно-независимых решений. Индекс задачи равен нулю. Если же функция* $\mathbf{f}$ *принадлежит пространству* $\mathbf{L}_{2,\mathrm{div}}(Q, 2\pi)$, *то решение* (73) *принадлежит пространству* $W^1_2(Q, 2\pi)$.

§7. Собственные функции оператора Стокса

Собственные функции $\mathbf{u}_n$ оператора Стокса являются решениями задач (см. [9])

$$-\nu\Delta\mathbf{u}_n + \nabla\mathbf{p}_n = \mu_n\mathbf{u}_n, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_n = 0, \qquad (77)$$

где $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{p}_n$ (комплексно-значные) вектор-функции и функции в кубе Q, удовлетворяющие условиям периодичности, μ_n – неизвестные постоянные, а постоянная $\nu > 0$ задана. Из уравнений (77) следует, что $\Delta\mathbf{p}_n = 0$ в Q. Периодические гармонические функции $\mathbf{p}_n$ являются постоянными в Q и, значит, $\nabla\mathbf{p}_n = 0$. Таким образом, при периодических граничных условиях система

(77) отличается от системы (4) лишь множителем $\nu > 0$ (при $\nu = 1$ они совпадают), а решение спектральной задачи для оператора Стокса совпадает с решениями задачи (2). Из решения задач (1) и (2) вытекают утверждения.

Теорема 4. *Собственные значения оператора Стокса при периодических краевых условиях равны $\nu|\mathbf{k}|^2$, где $\mathbf{k}$ – любой целочисленный вектор, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$. Нулевое собственное значение имеет кратность три. Каждое ненулевое собственное значение $\nu|\mathbf{k}|^2$ имеет кратность $2\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$, где $\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$ – число точек пересечения целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$ со сферой радиуса $|\mathbf{k}_0|$, и $2\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$ не меньше* 12. *Простых точек спектра нет.*

Теорема 5. *Собственные значения оператора Стокса, отвечающие нулевому собственному хначению, – это базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Собственные функции оператора Стокса, отвечающие ненулевому собственному значению $\nu|\mathbf{k}_0|^2$, – это совокупность собственных функций ротора: $\mathbf{u}_\mathbf{k}^+ = \dot{\mathbf{c}}_\mathbf{k}^+ e^{i\mathbf{kx}}$ и $\mathbf{u}_\mathbf{k}^- = \dot{\mathbf{c}}_\mathbf{k}^- e^{i\mathbf{kx}}$, отвечающих собственным значениям $|\mathbf{k}_0|$ и $-|\mathbf{k}_0|$, где $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$, а векторы $\mathbf{c}_\mathbf{k}^\pm$ определены в п.* 5.2. *Система собственных функций ортогональна и полна.*

§8. Решение системы Стокса

Пусть заданы комплексное число λ и комплексная функция $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

Аналогично решению уравнения (25) (в §6) решается следующая система с параметром λ:

$$-\nu(\Delta\mathbf{v} + \lambda^2\mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{78}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{79}$$

в пространстве $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$.

Действительно, вектор-функция $\mathbf{f}$ имеет представление (24) и (24_1)–(24_3), соответственно. Вектор-функцию v также представим в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-, \tag{80}$$

где

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \sum_{|\mathbf{k}^2|=1}^{\infty} \delta_\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kx}}, \tag{80_1}$$

$$\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}^2|=1}^{\infty} \gamma_{\mathbf{k}}^{\pm} \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \tag{80_2}$$

Из уравнения (79) вытекает, что все числа $\delta_{\mathbf{k}} = 0$ и, значит, $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{v}_0$ есть постоянный вектор. Далее

$$\Delta\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{x}) = -\sum_{|\mathbf{k}^2|=1}^{\infty} |\mathbf{k}|^2 \gamma_{\mathbf{k}}^{\pm} \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \tag{81}$$

Функция $p(\mathbf{x})$ представим в виде ряда Фурье (7)

$$p(\mathbf{x}) = p_0 + \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} p_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{82}$$

Откуда

$$\nabla p(\mathbf{x}) = i \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \mathbf{k} p_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{83}$$

Подставим выражения для $\mathbf{v}$, $\Delta\mathbf{v}$, ∇p и f в уравнение (78) и сравним коэффициенты при одинаковых экспонентах $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Учитывая ортогональность собственных функций ротора получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел $\mathbf{v}_0$, $p_{\mathbf{k}}$, $\gamma_{\mathbf{k}}^{+}$ и $\gamma_{\mathbf{k}}^{-}$:

$$-\nu\lambda^2\mathbf{v}_0 = \mathbf{f}_0, \quad i|\mathbf{k}|p_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}}, \tag{84}$$

$$\nu(|\mathbf{k}|^2 - \lambda^2)\gamma_{\mathbf{k}}^{\pm} = \beta_{\mathbf{k}}^{\pm}, \quad \forall\mathbf{k} : |\mathbf{k}| > 0. \tag{85}$$

Рассмотрим три случая.

Число $\nu\lambda^3$ не принадлежит спектру оператора Стокса, т.е. $\lambda^2 \neq |\mathbf{k}|^2$ при любых $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$. Тогда система (84), (85) однозначно разрешима и, следовательно, решение (v, p) системы (78), (79) имеет вид

$$\mathbf{v} = S_\lambda \mathbf{f} \equiv S_\lambda^0 \mathbf{f}^0 + S_\lambda^{+} \mathbf{f}^{+} + S_\lambda^{-} \mathbf{f}^{-}, \tag{86}$$

где

$$S_\lambda^0 \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{f}_0}{\nu\lambda^2}, \quad S_\lambda^{\pm} \mathbf{f}^{\pm} = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^{\pm}}{\nu(|\mathbf{k}|^2 - \lambda^2)} \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{87}$$

а функция $p(\mathbf{x})$ равна

$$p = p_0 + P\mathbf{f}^0, \tag{88}$$

где p_0 – произвольная постоянная, а

$$Pf^0 = -i \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{89}$$

причем величины f_0, $\alpha_{\mathbf{k}}$, $\beta_{\mathbf{k}}^{+}$ и $\beta_{\mathbf{k}}^{-}$ определяются формулами (21), (23). Операторы S_λ^0, S_λ^+ и S_λ^- (также как и операторы (30)–(32)) действуют в подпространствах (33) пространства $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$. Оператор S_λ^0 является функционалом. Из (87) получаем оценки

$$\|S_\lambda^0 \mathbf{f}^0\| \leqslant \frac{1}{\nu|\lambda|^2}\|\mathbf{f}^0\|, \quad \|S_\lambda^{\pm} \mathbf{f}^{\pm}\| \leqslant \frac{1}{\nu\rho_0}\|\mathbf{f}^{\pm}\|, \tag{90}$$

где

$$\rho_0 = \min_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \big| |\mathbf{k}|^2 - \lambda^2 \big|, \tag{91}$$

из которых следует, что

$$\|S_\lambda \mathbf{f}\| \leqslant \frac{1}{\nu\rho_\lambda}\|\mathbf{f}\|, \tag{92}$$

где ρ_λ есть расстояние на комплексной плоскости от точки λ^2 до точек спектра оператора Стокса при $\nu = 1$.

Оператор (89) действует в пространстве $\mathbf{L}_2^0(Q)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|P\mathbf{f}^0\| \leqslant \|\mathbf{f}^0\| \leqslant \|\mathbf{f}\|. \tag{93}$$

Итак, операторы S_λ и P ограничены в $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$. Следовательно, решение $(\mathbf{v}, p)$ системы (78), (79) принадлежит $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$. Далее, ввиду (88), (89),

$$\nabla p = \sum_{|\mathbf{k}|^2=1}^{\infty} \alpha_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{94}$$

Следовательно,

$$\|\nabla p\| \leqslant \|\mathbf{f}^0\| \leqslant \|\mathbf{f}\| \tag{95}$$

и ∇p также принадлежит $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$. Кроме того, вектор-функция $\mathbf{v}$ принадлежит пространству $W_2^2(Q, 2\pi)$, так как операторы S_λ^+ и S_λ^- являются сглаживающими на 2 порядка и удовлетворяют неравенствам

$$\big\|S_\lambda^{\pm} \mathbf{f}^{\pm}\big\|_2 \leqslant \frac{C_\lambda}{\nu}\|\mathbf{f}^{\pm}\|_0, \tag{96}$$

где

$$C_\lambda^2 = \max_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{(1+|\mathbf{k}|^2)^2}{|\,|\mathbf{k}|^2-\lambda^2|^2}. \tag{97}$$

Откуда получаем, что

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \|S_\lambda \mathbf{f}\|_2 \leqslant C_\lambda \nu^{-1}\|\mathbf{f}\|_0. \tag{98}$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 6. *Если число $\nu\lambda^2$ не принадлежит спектру оператора Стокса, то система (78), (79) безусловно разрешима в $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$ для любой $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(Q,2\pi)$. Причем, вектор-функция $\mathbf{v}$ определяется по $\mathbf{f}$ однозначно, $\mathbf{v}$ принадлежит пространству Соболева $W_2^2(Q,2\pi)$ и удовлетворяет оценкам (92) и (98). Функция p определяется по $\mathbf{f}$ с точностью до произвольной постоянной, принадлежит пространству $W_2^1(Q,2\pi)$ и удовлетворяет неравенствам (93), (95). Неоднозначность $p(\mathbf{x})$ легко устраняется, задавая p в произвольной точке из Q, например, $p(0)=q$, где q – заданное число.*

Введем пространство $H^{(\overline{2},1)}(Q,2\pi)$.

Мы скажем, что 4-х компонентый вектор $(\mathbf{v},p)$ принадлежит $H^{(\overline{2},1)}(Q,2\pi)$, если и только если компоненты v_j вектора $\mathbf{v}$ принадлежат пространству Соболева $W_2^2(Q,2\pi)$, а компонента p принадлежит пространству $W_2^1(Q,2\pi)$.

Тогда из теоремы 6 получаем

Следствие. (a) Если λ^2 удовлетворяет условиям теоремы 6 и $p(0)=q$, то оператор Стокса (78), (79) осуществляем гомеоморфизм пространства $H^{(\overline{2},1)}(Q,2\pi)$ и пространства $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$.

(b) Пусть $\lambda=0$ в системе (78), (79). Тогда из уравнений (84), (85) и аналогичных рассуждений и оценок следует следующая теорема.

Теорема 7. *Система Стокса (с периодическими краевыми условиями) разрешима в $\mathbf{L}_2(Q,2\pi)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_Q \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0. \tag{99}$$

При выполнении этого условия вектор-функция $\mathbf{v}$ определяется по $\mathbf{f}$ с точностью до произвольного постоянного вектора $\mathbf{v}_0$ по формуле

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + S_0^+\mathbf{f}^+ + S_0^-\mathbf{f}^-, \tag{100}$$

где операторы S_0^+ *и* S_0^- *задаются формулами* (87) *при* $\lambda = 0$, *при этом* $\mathbf{v} \in W_2^2(Q, 2\pi)$; *а функция* $p(\mathbf{x})$ *определяется по* $\mathbf{f}$ *с точностью до произвольной постоянной* p_0 *по формулам* (88) *и* (89) *и* $p \in W_2^1(Q, 2\pi)$.

(c) Пусть $\lambda^2 = |\mathbf{k}_0|^2$, где $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. Ввиду уравнений (84) и (85) аналогично получается следующая теорема.

Теорема 8. *Система* (78), (79) *при* $\lambda^2 = |\mathbf{k}_0|^2$ *разрешима в пространстве* $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{f}$ *удовлетворяет* $2\varkappa(|\mathbf{k}_0|)$ *условиям*

$$\int\limits_Q (f(\mathbf{x}), \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{\pm}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{k} : |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|, \tag{101}$$

где векторы $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ *определены в п.* 5.2. *Если эти условия выполнены, то вектор-функция* $\mathbf{v}$ *определяется по* $\mathbf{f}$ *формулой*

$$\mathbf{v} = \sum_{|\mathbf{k}|^2 = |\mathbf{k}_0|^2} \left(\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^+ \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^+ + \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^- \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^-\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + S_{\mathbf{k}_0}^0 \mathbf{f}^0 + \widehat{S}_{\mathbf{k}_0}^+ \mathbf{f}^+ + \widehat{S}_{\mathbf{k}_0}^- \mathbf{f}^-, \tag{102}$$

где $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^+$ *и* $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^-$ – *произвольные постоянные, а*

$$S_{\mathbf{k}_0}^0 \mathbf{f}^0 = -\frac{\mathbf{f}_0}{\nu |\mathbf{k}_0|^2}, \quad \widehat{S}_{\mathbf{k}_0}^{\pm} \mathbf{f}^{\pm} = \nu^{-1} \sum_{\substack{|\mathbf{k}|^2 = 1 \\ |\mathbf{k}|^2 \neq |\mathbf{k}_0|^2}}^{\infty}{}' \frac{\beta_{\mathbf{k}}^{\pm}}{|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{k}_0|^2} \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \tag{103}$$

При этом $\mathbf{v} \in W_2^2(Q, 2\pi)$. *Функция* p *определяется по* $\mathbf{f}$ *формулами* (88) *и* (89) *с точностью до произвольной постоянной* p_0 *и* $p \in W_2^1(Q, 2\pi)$.

Литература

1. В. А. Арнольд, *Избранное – 60*. ФАЗИС, М. (1997), 215–236.
2. В. И. Арнольд, *Избранное – 60*. ФАЗИС, М. (1997), 203–212.
3. В. И. Арнольд, Е. И. Коркина, *Избранное – 60*. ФАЗИС, М. (1997), 345–349.
4. Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, *О равномерно неэллиптических задачах, I*. — Мат. сб. **72**, No. 4 (1967), 126–154.
5. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*. Наука, М. (1988).
6. В. А. Зорич, *Математический анализ*. Ч. II, Наука, М. (1984).
7. M. Henon, *Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier*. — C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), 312–314.

8. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры.* Наука, М. (1975).
9. О. А. Ладыженская *Математические вопросы дмнамики вязкой несжимаемой жидкости.* 2-ое изд., Наука, М. (1970).
10. Р. С. Сакс, *О краевых задачах для системы* $\operatorname{rot} u+\lambda u = h$. — ДАН СССР **199**, No. 5 (1971), 1022–1025.
11. Р. С. Сакс, *О краевых задачах для системы* $\operatorname{rot} u+\lambda u = h$. — Дифф. уравн. **8**, No. 1 (1972), 126–133.
12. Р. С. Сакс, *Нормально разрешимые и нетеровые краевые задачи для некоторых систем уравнений математической физики, Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными.* — В кн.: Труды семинара акад. С. Л. Соболева, ИМ СО АН СССР, No. 2, Новосибирск (1983), 129–158.
13. Р. С. Сакс, *Спектр оператора вихря в шаре при условии непротекания и собственные значения колебаний упругого шара, закрепленного на границе.* — В кн.: Труды международной конференции "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы", IV. Прикладная математика, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа (2000), 61–68.
14. Р. С. Сакс, Ю. Н. Поляков, *О спектре оператора вихря в классе периодических вектор-функций.* — В кн.: Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики (материалы международного научного семинара-совещания с одноименным названием), БашГУ, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа (2000), 52–55.
15. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ.* Наука, М. (1976).

Sakc R. S. The solution of a spectral problem for the curl and the Stokes operators with periodic boundary condition.

In this paper, the relations between eigenvalues and eigenfunctions of the curl operator and the Stokes operator (with periodic boundary condition) are considered. These relations show that the curl operator is a square root of the Stokes operator with $\nu = 1$. The multiplicity of zero eigenvalue of the curl operator is infinite. The space $\mathbf{L}_2(Q, 2\pi)$ is decomposed into a directe sum of the eigensubspaces of the operator curl. For any complex number λ, the equation $\operatorname{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ and the Stokes equation $-\nu(\Delta v + \lambda^2 v) + \nabla p = \mathbf{f}$, $\operatorname{div} v = 0$, are solved.

Институт математики с ВЦ
Уфимского научного центра РАН
E-mail: saks@ic.bashedu.ru

Поступило 15 ноября 2003