Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 313, 2004 г.

А. А. Заитов

ФУНКТОР СЛАБО АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Определение 1. *Функционал* $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ *назовем*

(1) *слабо аддитивным, если для всех* $c \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi \in C_b(X)$ *выполняется равенство* $\nu(\varphi+c_X) = \nu(\varphi)+c$, *где через* c_X *обозначается постоянная на* X *функция, равная* c;

(2) *сохраняющим порядок, если для всех пар функций* $\varphi, \psi \in C(X)$ *из* $\varphi \leqslant \psi$ *следует* $\nu(\varphi) \leqslant \nu(\psi)$;

(3) *нормированным, если* $\nu(1_X) = 1$.

Для тихоновского пространства X через $O \circ \beta(X)$ обозначим множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Для краткости, слабо аддитивный сохраняющий порядок нормированный функционал, будем просто называть слабо аддитивным функционалом. Рассмотрим $O\circ\beta(X)$ как подпространство пространства $C_p(C_b(X))$ всех непрерывных функций на $C_b(X)$, снабженного топологией поточечной сходимости.

Пусть X – компакт, O – функтор слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов. Известно, что пространство $O(X) \equiv O \circ \beta(X)$ является компактом для любого компакта X [1]. Напомним, что

$$\operatorname{supp} \mu = \cap\{F : F \text{ замкнуто в } X \text{ и } \mu \in O(F)\}.$$

Для компакта X обозначим через $O_n(X)$ множество всех слабо аддитивных функционалов $\mu \in O(X)$, для которых $|\operatorname{supp}\mu| \leqslant n$, где $|A|$ – мощность множества A. а n – положительное целое число. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение компакта X в Y. Отображение $O_n(f) : O_n(X) \to O(Y)$, определенное по формуле

$$O_n(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = \mu\big(\varphi \circ f\big|_{\operatorname{supp}\mu}\big) = \mu\big(\varphi\big|_{\operatorname{supp}\mu} \circ f\big),$$

где $\mu \in O_n(X)$, $\varphi \in C(Y)$ является непрерывным. Очевидно, что $O_n(f)(O_n(X)) \subset O_n(Y)$. Таким образом определено отображение

$O_n(f) : O_n(X) \to O_n(Y)$. Непосредственная проверка показывает, что $O_n(g \circ f) = O_n(g) \circ O_n(f)$, где $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – непрерывные отображения компактов. Кроме того, если $\mathrm{id}_X : X \to X$ – тождественное отображение компакта X, то легко проверить, что $O_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{O_n(X)}$. Таким образом O_n – ковариантный функтор степени $\leqslant n$, действующий в категории Comp. Легко видеть, что если $f : X \to Y$ – вложение компакта X в компакт Y, то отображение $O_n(f)$ – также вложение пространства $O_n(X)$ в $O_n(Y)$, а если $f : X \to Y$ – отображение "на", то отображение $O_n(f)$ также является отображением "на". Иными словами, функтор O_n мономорфен и эпиморфен. Так как мономорфный функтор конечной степени непрерывен, то функтор O_n является непрерывным. Кроме того, функтор O_n сохраняет вес бесконечного компакта, пустое множество, точку и пересечение замкнутых подмножеств компакта. Заметим, что он не сохраняет прообраза.

Пример. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ – конечные компакты (все точки x_1, x_2, x_3, $y)1$, y_2 различны). Отображение $f : X \to Y$ построим как следующее: $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = f(x_3) = y_2$. Рассмотрим функционал $\delta_{y_2} \in O(Y)$, сосредоточенный на $\{y_2\} \subset Y$. Функционал $\mu \in O(X)$ определим по формуле

$$\mu(\varphi)=\max\big\{\min\{\varphi(x_1),\varphi(x_2)\},\min\{\varphi(x_1),\varphi(x_3)\},\min\{\varphi(x_2),\varphi(x_3)\}\big\}.$$

Возьмем произвольную функцию $\psi \subset C(Y)$. Имеем

$$O(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f) = \max\big\{\min\{\psi(f(x_1)), \psi(f(x_2))\},$$
$$\min\{\psi(f(x_1)), \psi(f(x_3))\}, \min\{\psi(f(x_2)), \psi(f(x_3))\}\big\} =$$
$$= \max\big\{\min\{\psi(f(y_1)), \psi(f(y_2))\}, \psi(y_2)\big\} = \psi(y_2) = \delta_{y_2}(\psi),$$

т.е. $O(f)(\mu) = \delta_{y_2}$. С другой стороны, $\mu \notin O(\{x_2, x_3\})$, хотя $f^{-1}(y_2) = \{x_2, x_3\}$. Значит функтор O_n не сохраняет прообразы.

Положительным целым числом n мы будем также обозначать дискретное пространство $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, содержащее ровно n точек. Если X – компакт, то пространство X^n всех отображений $\xi : n \to X$ также является компактом.

Теперь построим отображение $\pi_{OXn} : X^n \times O(n) \to O_n(X)$ формулой $\pi_{OXn}(\xi, \mu) = O + n(\xi)(\mu)$ для $\xi : n \to X$ и $\mu \in O(n) \equiv O_n(n)$. Определенное отображение π_{OXn} непрерывно (см. [2]). Так как $O(n)$ является компактом, то произведение $X^n \times O(n)$ – также компонент.

Теорема 2. $O_n(X)$ *является компактом для любого компакта* X.

Доказательство. Достаточно показать, что отображение π_{OXn} является отображением "на". Сначала заметим, что множество $O_n(X)$ представляется в виде объединения

$$O_n(X) = \cup\{O(Y) : Y \subset Y \text{ и } |Y| \leqslant n\}. \qquad (1)$$

Пусть $Y = \{x_0, \dots, x_n\}$ – произвольное конечное подмножество пространства X, содержащее не более n точек. Тогда множества $O(Y)$ и $O(k+1)$ гомеоморфны. Теперь выберем $\xi \in X^k \subset X^n$ так, чтобы было $\xi(i) = x_i$, $i = 0, \dots, k$. Следовательно, для любого $\nu \in O(Y)$ существует $\mu \in O(k+1)$ такое, что $\pi_{OXn}(\xi, \mu) = O_n(\xi)(\mu) = \mu$.

Пусть теперь $\nu \in O_n(X)$ – произвольный функционал. Тогда $|\operatorname{supp}\nu| = m \leqslant n$ и $\nu \in O(|\operatorname{supp}\nu|)$. Значит отображение π_{OXn} является отображением "на". Таким образом, множество $O_n(X)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Теорема 2 доказана.

Пусть теперь X – тихоновское пространство, а βX – его стоун–чеховское расширение. Известно [3], что пространство $O \circ \beta(X)$ является компактом; компакты $O \circ \beta(X)$ и $O(\beta X)$ – гомеоморфны для любого тихоновского пространства X. Положим

$$O_n(X) \equiv \bigl\{\mu \in O \circ \beta(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\bigr\}. \qquad (2)$$

Тогда теорема 2 обобщается следующем образом.

Теорема 2$'$. $O_n(X)$ – *компакт для любого тихоновского пространства* X. *Следовательно, компакты* $O_n(X)$ *и* $O_n(\beta X)$ *гомеоморфны для произвольного тихоновского пространства* X.

Замечания. (а) Сначала отметим, что $O_1(X)$ гомеоморфно пространству X для любого компакта X. Следовательно, $O_1(X) \equiv O_1(\beta X)$ гомеоморфно стоун–чеховскому расширению βX для любого тихоновского пространства X. Таким образом, стоун–чеховское расширение βX тихоновского пространства X – это в точности пространство $O_1(X)$.

(б) В общем случае носитель функционала $\mu \in O\circ\beta(X)$ не определен для тихоновского пространства X. Это связано с тем, что не всякая непрерывная ограниченная функция, определенная на произвольном замкнутом подмножестве тихоновского пространства, может быть продолжена непрерывно и ограничено на все пространство. Поскольку имеет место теорема Брауэра–Титце–Урысона, носитель любого функционала $\mu \in O \circ \beta(X)$ определен для нормального пространства X. Но носитель произвольного функционала $\mu \in O_n(X)$ для любого тихоновского пространства X определен, поскольку всякая функция, определенная на конечном подмножестве произвольного пространства, имеет хотя бы одно непрерывное и ограниченное продолжение.

Литература

1. T. Radul, *On the functor of order-preserving functionals.* — Comm. Math. Univ. Carol. **39**, No. 3 (1998), 609–615.
2. A. A. Zaitov, *On categorical properties of the functor of order-preserving functionals.* Methods of Functional Analysis and Topology **9**, No. 4 (2003), 357–364..
3. В. Н. Басманов, *Ковариантные функторы конечных степеней на категории бикомпактных пространств.* — Фунд. и прикл. матем. **2**, No. 3 (2002), 637–654.
4. В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции.* МГУ, М. (1988).

Zaitov A. A. The functor of order-preserving functionals of finite degree.

In this paper we proved that the space of all order-preserving functionals with finite supports is a compact, and we showed that this space is the Stone–Chech compactification of given Tychonoff space if supports consist only one point.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН Республики Узбекистан
E-mail: mathinst@uzsci.net

Поступило 4 октября 2003 г.