Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 313, 2004 г.

Р. Б. Бешимов

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА O_β

В работе [1] Т. Радул ввел ковариантный функтор $O : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ слабо аддитивных нормированных и сохраняющих порядок функционалов на категории бикомпактов. Он доказал, что функтор O удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов. В работе [2] А. Заитов определил ковариантный функтор $O : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Comp}$ слабо аддитивных нормированных, сохраняющих порядок функционалов $\mu : C_b(X) \to R$, определенных на пространстве $C_b(X)$ всех ограниченных, непрерывных функций $\varphi : X \to R$, заданных на тихоновском пространстве X. Доказано, что пространство $O(X)$ является бикомпактом для любого тихоновского пространства X.

Данная работа посвящена исследованию некоторых свойств функтора $O_\beta : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$, который является продолжением функтора $O : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$. Доказывается, что пространство $O_\beta(X)$ является выпуклым подмножеством пространства $C_p(C_b(X))$.

Пусть $X \in \mathrm{Comp}$. Через $C(X)$ обозначим множество всех непрерывных функций $\varphi : X \to R$ с обычной sup-нормой: $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in R$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$ для всех $x \in X$. Пусть $\varphi,\ \psi \in C(X)$. Мы говорим, что $\varphi \leqslant \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 1. *Функционал $v : C(X) \to \mathbb{R}$ называется*

(1) *слабо аддитивным, если $v(\varphi + c_X) = v(\varphi) + c$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $c \in R$;*

(2) *сохраняющим порядок, если для $\varphi,\ \psi \in C(X)$ таких, что $\varphi \leqslant \psi$, мы имеем $v(\varphi) \leqslant v(\psi)$;*

(3) *нормированным, если $v(1_X) = 1$.*

Для бикомпакта X через $O(X)$ обозначим множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов.

Пусть $X, Y \in \mathrm{Tych}$, $f : X \to Y$ – непрерывное отображение и $\beta f : \beta X \to \beta Y$ – Стоун–Чеховское продолжение отображения f. Рассмотрим $O(\beta f) : O(\beta X) \to O(\beta Y)$. Положим

$$O_\beta(X) = \Big\{\mu \in O(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\Big\}, \quad O_\beta(f) = O(\beta f)\big|_{O_\beta(X)}.$$

Отображение $O_\beta(f) : O_\beta(X) \to O_\beta(Y)$ действует по формуле

$$(O_\beta(f)(\mu))(\varphi) = \mu(\varphi \circ f),$$

где $\mu \in O_\beta(X)$ и $S_b(Y)$.

Легко видеть, что O_β является ковариантным функтором, действующим в категории тихоновских пространств. В работе [3] доказано, что для любого тихоновского пространства X пространства $O_\beta(X)$ и $O_b(X)$ гомеоморфны, где $O_b(X) = \{\mu \in O(bX) : \operatorname{supp}\mu \subset X\}$, bX – некоторое бикомпактное расширение пространства X.

Утверждение 1. *Для каждого слабо аддитивного нормированного функционала $\nu \in C_p(C(\beta X))$ и каждого $c \in R$ имеем*

$$\nu(c_X) = c.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\nu(0_X) = 0$. Имеем $1 =$(согласно нормированности $\nu = \nu(1_X) = \nu(0_X + 1_X) =$ (в силу слабой аддитивности ν) $= \nu(0_X) + 1$, откуда $\nu(0_X) = 0$.

Теперь рассмотрим общий случай.

$\nu(c_X) = \nu(0_X + c_X) =$(согласно слабой аддитивности ν) $= \nu(0_X) + c =$ (в силу только что доказанного)$= 0 + c = c$.

Утверждение 1 доказано.

Теорема 1. *Пусть X – тихоновское пространство и βX – его бикомпактное расширение Стоуна–Чеха. Тогда $O_\beta(X)$ является выпуклым подмножеством линейного пространства $C_p(C(\beta X))$.*

Доказательство. Пусть $\nu_1, \nu_2 \in O_\beta(X) \subset O(\beta X)$. Проверим условия (1), (2), (3) определения 1 для комбинации $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$, где $\alpha \in [0, 1]$.

1. Пусть $c \in R$ и $\varphi \in C_b(X)$ – произвольны. Тогда

$$(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(\varphi + c_X) = (\alpha\nu_1)(\varphi + c_X) + ((1-\alpha)\nu_2)(\varphi + c_X) =$$

$$= (\alpha\nu_1)(\varphi) + (\alpha\nu_1)(c_X) + ((1-\alpha)\nu_2)(\varphi) + ((1-\alpha)\nu_2)(c_X) =$$

$$= (\alpha\nu_1)(\varphi) + \alpha c + ((1-\alpha)\nu_2)(\varphi) + (1-\alpha)c = (\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(\varphi) + c,$$

т.е. функционал $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$ слабо аддитивен.

2. Пусть $\varphi \leqslant \psi$ для пары функций φ, $\psi \in C_b(X)$. Имеем:

$$(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(\varphi) = (\alpha\nu_1)(\varphi) + ((1-\alpha)\nu_2)(\varphi) =$$

$$= (\alpha\nu_1)(\varphi) + ((1-\alpha)\nu_2)(\varphi) \leqslant \alpha\nu_1(\psi) + (1-\alpha)(\nu_2)(\psi) =$$

$$= (\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(\psi),$$

т.е. функционал $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$ сохраняет порядок.

3. Проверим нормированность функционала $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$. В самом деле, $(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(1_X) = (\alpha\nu_1)(1_X) + (1-\alpha)\nu_2(1_X) =$(в силу нормированности функционалов $\nu_1, \nu_2) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\cdot 1 = \alpha + 1 - \alpha = 1$.

Теорема 1 доказана.

Утверждение 2. *Для всякого непрерывного отображения $f : X \to Y$ отображение $O_\beta(f)$ аффинно, т.е.*

$$O_\beta(f)(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1 O_\beta(f)(\mu_1) + \alpha_2 O_\beta(f)(\mu_2)$$

при α_1, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, μ_1, $\mu_2 \in O_\beta(X)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_b(Y)$. Имеем

$$O_\beta(f)(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)(\varphi) = (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)(\varphi \circ f) =$$

$$= \alpha_1\mu_1(\varphi \circ f) + \alpha_2\mu_2(\varphi \circ f) =$$

$$= \alpha_1 O_\beta(f)(\mu_1)(\varphi \circ f) + \alpha_2 O_\beta(f)(\mu_2)(\varphi \circ f) =$$

$$= (\alpha_1 O_\beta(f)(\mu_1) + \alpha_2 O_\beta(f)(\mu_2)(\varphi \circ f).$$

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Для произвольного бикомпакта X и произвольного его подпространства Y имеем*

$$O_\beta(Y) = \{\mu \in O(X) : \operatorname{supp}\mu \subset Y\}.$$

Доказательство. Пусть X – бикомпакт и $Y \subset X$. Положим $bY = [Y]_X$. Имеем

$$O_b(Y) = \{\mu \in O(bY) : \operatorname{supp}\mu \subset Y\} = \{\mu \in O(X) : \operatorname{supp}\mu \subset Y\}.$$

Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Если Y – подмножество тихоновского пространства X, то*
$$O_\beta(Y) \subset O_\beta(X),$$
т.е. функтор O_β мономорфен.

Доказательство. Пусть $Y \subset X$. Рассмотрим произвольное бикомпактное расширение bX пространства X. Тогда $[Y]_{bX} \subset bX$. Положим
$$O_b(Y) = \{\mu \in O([Y]_{bX})\colon \operatorname{supp}\mu \subset Y\}.$$
Но из мономорфности функтора $O : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ вытекает, что
$$O_b(Y) = O_\beta(Y) = \{\mu \in O([Y]_{bX})\colon \operatorname{supp}\mu \subset Y\} \subset$$
$$\subset \{\mu \in O(bX) : \operatorname{supp}\mu \subset X\} = O_b(X) = O_\beta(X).$$

Утверждение 4 доказано.

Замечание. Включение, доказанное в утверждении 4, неверно для функтора $O : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Comp}$.

В самом деле, пусть $i : \omega \to \omega + 1$ – тождественное вложение. Тогда бикомпакт $O(\omega)$ =(согласно [4, следствие 2.1.8])= $O(\beta\omega)$ имеет несчетный вес и его нельзя вложить в бикомпакт $O(\omega + 1)$ счетного веса.

Литература

1. T. Radul, *On the functor of order-preserving functionals.* — Comm. Math. Univ. Carol. **39**, No. 3 (1998), 609–615.
2. A. A. Zaitov, *On categorical properties of the functor of order-preserving functionals.* Methods of Functional Analysis and Topology **9**, No. 4 (2003), 357–364.
3. R. B. Beshimov, *On weakly additive functionals.* — Matematychni Studii **18**, No. 2 (2002), 179–186.
4. А. А. Заитов, *Некоторые свойства пространств знакопеременных мер и функтора слабо аддитивных нормированных и сохраняющих порядок функционалов.* Канд. дисс., Ташкент (2004).

Beshimov R. B. Some properties of the functor O_β.

In the paper it is proved that the space $O_\beta(X)$ of weakly additive, order-preserving, normed functionals with compact support is convex subset of the space $C_p(C_b(X))$.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН Республики Узбекистан
E-mail: mathinst@uzsci.net

Поступило 4 октября 2003 г.