Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 313, 2004 г.

А. А. Иванов

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, ИХ ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ. 2

Введение

1. Основные объекты. Эта статья является второй частью книги “Пространственные структуры, их теория и применение”, первая часть которой опубликована в Записках научных семинаров ПОМИ в 2002 году (том 287). Первая часть была посвящена структурам непрерывности, структурам расширений и битопологическим структурам, как классическим так и общим, теперь будут рассмотрены различные *структуры топологического типа*, являющиеся топологическими структурами на множествах некоторой шкалы множеств.

Напомним, что шкалой множеств (по Бурбаки) называют совокупность множеств, которые могут быть образованы из некоторых (базовых) множеств операциями произведения и перехода к множеству подмножеств. Заметим, что топологические и общие битопологические структуры являются структурами топологического типа, как топологические структуры на множестве X и, соответственно, на множестве $X \times X$, где X – произвольное множество. В настоящей статье будут рассмотрены, прежде всего, топологические структуры на множествах вида $PX = \{A | A \subset X\}$ для произвольного множества X. Такие структуры мы будем называть *P-топологическими или сеттопологическими структурами*. Тем самым окажутся уже рассмотренными топологические структуры на множествах X, $X \times X$, PX – простейших множествах шкалы множеств над X. Следующими по сложности будут элементы шкалы над X, строящиеся двумя операциями, а именно $X \times X \times X$, $X \times PX$, $PX \times X$, $P(X \times X)$, $P(PX)$, дальнейшее усложнение потребует трех таких операций и так далее. Если база некоторой шкалы множеств состоит из двух множеств X, Y, то к ее простейшим элементам добавятся множества $X \times Y$, $P(X \times Y)$, ... С расширеним базы увеличивается разнообразие элементов построенной над ней шкалы множеств. В этой части мы рассмотрим кроме P-топологических структур также топологические структуры на $X \times Y$, на $P(X \times Y)$, в частности на $P(X \times X)$, на $P^2X = P(PX)$, $P^2(X \times Y)$ и P^3X, представляющие особый интерес.

Заметим, прежде всего, что точки множества $P(X \times Y)$ можно рассматривать как графики отображений $f : X \longrightarrow Y$, в общем случае частичных и многозначных, поэтому топологическую структуру на этом множестве можно рассматривать как топологическую структуру на множестве отображений X в Y. Что касается множеств P^2X, $P^2(X \times X)$ и P^3X, то их точками являются системы подмножеств базового множества X, системы подмножеств множества $X \times X$ и совокупности систем подмножеств множества X, соответственно. Таким образом любая топологическая структура открытых (замкнутых) множеств является точкой множества P^2X, любая равномерная структура окружений является точкой множества $P^2(X \times X)$, любая равномерная структура покрытий является точкой множества P^3X. Это означает, что топологические структуры на множествах P^2X, $P^2(X \times X)$ и P^3X определяют, в частности, топологические структуры на множествах всех топологий на X, на множествах всех равномерных структур окружений на X, на множествах всех равномерных структур покрытий на X, соответственно, и в этом состоит их интерес.

2. Пространства сходимости. В дальнейшем мы будем говорить не о топологических структурах а просто о структурах, имея в виду тот факт, что не все топологические проблемы решаются в категории топологических пространств. При этом основными структурами, фигурирующими в этой части, будут структуры сходимости направленных систем точек более общего характера чем в первой части.

Напомним относящиеся к этому понятию определения, содержащиеся в первой части книги, с некоторыми изменениями и дополнениями.

Определение. *Множество Λ называется упорядоченным множеством, если на нем фиксировано некоторое отношение порядка, то есть для некоторых, не обязательно всех, пар точек λ_1, λ_2 этого множества мы имеем либо $\lambda_1 \leq \lambda_2$ либо $\lambda_1 \geq \lambda_2$, причем выполняются следующие условия:*

1. *$\lambda \leq \lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$,*

2. $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *и* $\lambda_2 \leq \lambda_3 \Longrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_3$.

Определение. *Упорядоченное множество* Λ *называется направленным по возрастанию (убыванию) упорядоченным множеством, если для любых его элементов* λ_1, λ_2 *найдется такой его элемент* λ, *что* $\lambda_1 \leq \lambda$ *и* $\lambda_2 \leq \lambda$ *(*$\lambda_1 \geq \lambda$ *и* $\lambda_2 \geq \lambda$*).*

Замечание. Очевидно, что можно ограничиться множествами направленными по возрастанию, к ним всегда можно перейти обращением порядка. В дальнейшем мы ограничимся направленностью по возрастанию, если не будет оговорено противное.

Определение. *Упорядоченное множество* Λ', *содержащееся в упорядоченном множестве* Λ, *называют его конфинальной частью, если для любого* $\lambda \in \Lambda$ *найдется* $\lambda' \in \Lambda'$ *такое, что* $\lambda \leq \lambda'$.

Замечание. Рассматривая конфинальные части Λ' направленного множества Λ мы будем считать, что порядок на множествах Λ' индуцирован порядком на множестве Λ. Конфинальными частями являются, например, так называемые *конуса* $\Lambda(\mu) = \{\lambda | \lambda \in \Lambda, \lambda \geq \mu\}$.

Определение. *Направленной системой (направленностью) в множестве* X *называют любую систему* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, $x_\lambda \in X$, *где* Λ *– некоторое направленное упорядоченное множество, называемое множеством индексов этой направленности.*

Замечание. Тривиальными направленностями являются так называемые стационарные системы. Система $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ называется *стационарной*, если найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$ и такая точка $x \in X$, что $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Определение. *Направленность* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda')$ *является конфинальной частью направленности* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, *если* Λ' *– конфинальная часть направленного упорядоченного множества* Λ. *Таковыми являются, например, конусы* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda(\mu))$.

Определение. *Пусть* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая направленность в* X. *Фиксируем какой-нибудь элемент* $\mu \in \Lambda$. *Тогда множество* $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda(\mu)\}$ *будем называть носителем этой направленности. Если рассматривается не одна направленность в* X, *а некоторое множество направленностей, то носителем этого множества будем называть объединение произвольно фиксированных носителей его направленностей.*

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Сходимостью (направленностей) в X к точке $x \in X$ называется произвольно фиксированный класс $\mathcal{S}_x$ направленностей, удовлетворяющий следующим условиям:*

1. Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ стационарна и $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$, то она принадлежит $\mathcal{S}_x$ (аксиома стационарности).

2. Любая направленность и любой ее конус принадлежат или не принадлежат $\mathcal{S}_x$ одновременно (аксиома конуса).

3. Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ является конфинальной частью направленности $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, принадлежащей $\mathcal{S}_x$, то она также принадлежит $\mathcal{S}_x$ (аксиома конфинальности).

Так как мощности множеств Λ ничем не ограничены, то классы S_x не обязаны быть множествами, то есть не являются в общем случае структурами в смысле Бурбаки. Тем не менее эти классы могут определяться соответствующими структурами.

Определение. *Базой сходимости $\mathcal{S}_x$ направленностей в X к точке x будем называть любое множество $S \subset \mathcal{S}_x$, обладающее следующим свойством:*

если направленность $s \in \mathcal{S}_x$, то для каждого носителя системы S найдется, содержащийся в нем носитель направленности s.

Теорема. *Каждая сходимость к точке имеет базу.*

Доказательство. Предположим, что некоторая сходимость S_x к точке $x \in X$ не имеет базу. Фиксируем произвольное множество $S \subset S_x$. По условию теоремы оно не является базой класса S_x, поэтому найдется направленность $s \in S_x$ и некоторый носитель системы S, в котором не содержится ни один носитель направленности s. Присоединим s к S. Полученное множество направленностей не является базой S_x и мы опять присоединим к ней некоторую направленость из S_x, выбранную таким же образом, и так далее. Мы получим некоторую трансфинитную последовательность множеств направленностей сколь угодно большой мощности. Для каждого из этих множеств рассмотрим множество его носителей. Так как каждый носитель является подмножеством множества X, то мощность множества всевозможных множеств носителей ограничена некоторым кардинальнм числом, в то время как процедура присоединения направленностей имеет неограниченную мощность. Таким образом множества носителей должны повторяться, что противоречит процедуре присоединения направленностей.

Замечание. Нетрудно привести пример, показывающий, что задание некоторой базы сходимости не определяет в общем случае саму сходимость – возможны разные сходимости с одинаковой базой. Дело в том, что обращение условия фигурирующего в определении базы сходимости вообще говоря неверно. Оно оказывается справедливым только для некоторых (слабо топологических) сходимостей. В общем же случае необходимы дополнительные рассуждения для задания сходимостей структурами.

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Структурой сходимости (сходимостью) на X называется множество $\mathcal{S}$, состоящее из независимо выбранных классов сходимости $\mathcal{S}_x$ для всех точек $x \in X$.*

Замечание. Если $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \mathcal{S}_x$, то говорят, что эта *система сходится к точке x* или, другими словами, *имеет место сходимость $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$.*

Определение. *Если на некотором множестве X определена некоторая структура сходимости $\mathcal{S}$, то пару $(X, \mathcal{S})$ будем называть пространством сходимости (направленных систем).*

Определение. *Пусть $(X, \mathcal{S})$ и $(X', \mathcal{S}')$ – некоторые пространства сходимости. Отображение $f : X \longrightarrow X'$ будем называть непрерывным отображением $(X, \mathcal{S})$ в $(X', \mathcal{S}')$, если из сходимости $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ в $(X, \mathcal{S})$ следует сходимость $(f(x_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(x)$ в $(X', \mathcal{S}')$.*

Пространства сходимости и их непрерывные отображения образуют категорию, которую мы обозначим через **Conv**.

3. Категории сходимости. Более широким и более удобным понятием конфинальности является понятие конфинальности по носителям.

Определение. *Говорят, что направленность $s = (x_\lambda | \lambda \in \Lambda')$ является конфинальной по носителям для некоторого множества S направленностей, если в каждом носителе этого множества содержится какой-нибудь носитель направленности s. При этом, если S состоит из одной направленности, то соответствующая конфинальность по носителям называется простой.*

Замечание. Если множество S направленностей состоит только из одной направленности $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ и направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ является ее конфинальной частью, то она является конфинальной по носителям этой направленности. Обратное утверждение неверно хотя бы потому, что направленность s' конфинальная по носителям для направленности s не обязана быть частью этой направленности.

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Квазитопологической сходимостью направленностей в X к точке $x \in X$ называется произвольно фиксированный класс $\mathcal{S}_x$ направленностей, удовлетворяющий следующим условиям:*

1. *Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ стационарна и $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$, то она принадлежит $\mathcal{S}_x$ (аксиома стационарности).*
2. *Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ конфинальна по носителям для некоторой направленности из класса $\mathcal{S}_x$, то она сама принадлежит этому классу (аксиома простой конфинальности по носителям).*

Замечание. Здесь нет необходимости добавлять аксиому конусов, так как ее покрывает аксиома простой конфинальности по носителям. Дейтвительно, для произвольно фиксированной сходимости и любого ее конуса их носители для достаточно больших индексов совпадают и, следовательно, они конфинальны друг другу.

Замечание. Это определение существенно отличается от определения квазитопологической сходимости в первой части книги.

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Квазитопологической структурой сходимости на X называется множество $\mathcal{S}$, состоящее из независимо выбранных классов квазитопологической сходимости $\mathcal{S}_x$ для всех точек $x \in X$. Пара (X, S) называется квазитопологическим пространством (сходимости).*

Класс квазитопологических пространств и их непрерывных отображений образует категорию, которую мы будем обозначать через **QConv**.

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Слабо топологической сходимостью направленностей в X к точке $x \in X$ на-*

зывается произвольно фиксированный класс $\mathcal{S}_x$ направленностей, удовлетворяющий следующим условиям:

1. *Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ стационарна и $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$, то она принадлежит $\mathcal{S}_x$ (аксиома стационарности).*

2. *Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ конфинальна по носителям для некоторого множества S направленностуй из класса $\mathcal{S}_x$, то она сама принадлежит этому классу (аксиома конфинальности по носителям).*

Замечание. Условие 2 является обращением условия фигурирующего в определении базы сходимости, поэтому каждая база сходимости однозначно определяет соответствующую слабо топологическую сходимость.

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Слабо топологической структурой сходимости на X называется множество $\mathcal{S}$, состоящее из независимо выбранных классов слабо топологической сходимости $\mathcal{S}_x$ для всех точек $x \in X$. Пара (X, S) называется слабо топологическим пространством (сходимости).*

Класс слабо топологических пространств сходимости и их непрерывных отображений образует категорию, которую мы будем обозначать через **WConv**.

Определение. *Рассмотрим упорядоченное множество Ξ и упорядоченные множества Λ_ξ, определенные для каждого $\xi \in \Xi$. Композицией этих упорядоченных множеств будем называть множество $M = \{(\xi, h)|\xi \in \Xi, h : \Xi \longrightarrow \Lambda, h(\xi) \in \Lambda_\xi\}$, $\Lambda = \bigcup \Lambda_\xi|\xi \in \Xi$, на котором определено следующее отношение порядка:*

$$(\xi, h) \leq (\xi', h') \iff \xi \leq \xi' \quad \text{и} \quad h \leq h',$$

где $h \leq h' \iff h(\xi) \leq h'(\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$.

Нетрудно понять, что если все исходные множества являются направленными упорядоченными множествами, то и их композиция является направленным упорядоченным множеством.

Определение. *Пусть $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ и $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi)$, – направленности в X, тогда их композицией будем называть направленность $(x_\mu|\mu \in M)$, где $x_\mu = x_{h(\xi)}$.*

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Топологической структурой сходимости на X называется множество $\mathcal{S}$, состоящее из классов $\mathcal{S}_x$ сходимости направленностей для всех точек $x \in X$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ стационарна и $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$, то она принадлежит $\mathcal{S}_x$ (аксиома стационарности).

2. Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ конфинальна по носителям для некоторого множества S направленностуй из класса $\mathcal{S}_x$, то она сама принадлежит этому классу (аксиома конфинальности по носителям).

3. Если $(x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow x$ и $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow x_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$, то $(x_\mu|\mu \in M) \longrightarrow x$, $x_\mu = x_{h(\xi)}$ (аксиома композиции).
Пара (X, S) называется топологическим пространством сходимости.

Класс топологических пространств сходимости и их непрерывных отображений образует категорию, которую мы будем обозначать через **TConv**.

Нетрудно заметить, что имеют место следующие включения:

$$T\,\mathrm{Conv} \subset W\,\mathrm{Conv} \subset Q\,\mathrm{Conv} \subset \mathrm{Conv}$$

Каждая из этих категорий является полной подкатегорией всех последующих.

4. Функторные связи между категориями сходимости. В первой части книги (глава 1, параграф 2) рассматривались различные категории и связи между ними, в частности категории сходимости. Мы не будем приводить здесь полностью содержание этого параграфа, но кратко приведем необходимые сведения.

Определение. *Категорией $\mathcal{K}$ называют пару $(Ob\mathcal{K}, Mor\mathcal{K})$ классов, состоящих из так называемых объектов и, соответственно, морфизмов этой категории. Каждой паре (X, Y) объектов сопоставляется некоторое множество $C(X, Y)$ морфизмов объекта X в объект Y, каждый морфизм $f \in C(X, Y)$ определяет однозначно объекты X и Y называемые его областью задания и, соответственно, областью значений. Для каждой тройки X, Y, Z объектов определено отображение $C(X, Y) \times C(Y, Z) \longrightarrow C(X, Z)$, сопоставляющее морфизмам $f \in C(X, Y)$ и $g \in C(Y, Z)$ их композицию $gf \in C(X, Z)$. При этом должны выполняться следующие условия:*

1. *Композиция морфизмов ассоциативна, то есть* $h(gf) = (hg)f$ *для любых морфизмов* $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$, $h \in C(X,Z)$.

2. *Для любого* $Y \in Ob\mathcal{K}$ *существует тождественный морфизм* $1_Y \in C(Y,Y)$, *являющийся левой и правой единицей. Это значит, что* $1_Y f = f$ *для каждого* $f \in C(X,Y)$ *и* $h1_Y = h$ *для каждого* $h \in C(Y,Z)$.

Замечание. Вместо записи $f \in C(X,Y)$ пользуются часто эквивалентными ей записями $f : X \longrightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Определение. *Категория* $\mathcal{L}$ *называется подкатегорией категории* $\mathcal{K}$, *если каждый объект и каждый морфизм категории* $\mathcal{L}$ *является объектом и, соответственно, морфизмом категории* $\mathcal{K}$. *Если при этом* $C(X,Y)$ *в категории* $\mathcal{L}$ *совпадает с* $C(X,Y)$ *в категории* $\mathcal{K}$, *то категория* $\mathcal{L}$ *называется полной подкатегорией категории* $\mathcal{K}$.

Особое место занимет категория **Set**, объектами которой являются множества, а морфизмами – все отображения соответствующих множеств.

Связи между категориями осуществляются так называемыми функторами, связи между функторами – преобразованиями функторов.

Определение. *Пусть* $\mathcal{K}$ *и* $\mathcal{K}'$ *– некоторые категории. Соответствие* $\mathcal{F}$, *сопоставляющее каждому объекту и каждому морфизму категории* $\mathcal{K}$, *однозначно определенный объект и, соответственно, морфизм категории* $\mathcal{K}'$, *называется ковариантным (контравариантным) функтором, если каждому морфизму* $f : X \longrightarrow Y$ *соответствует морфизм* $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ $(\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X))$, *причем выполняются следующие условия:*

1. $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ *для каждого объекта* $X \in \mathcal{K}$.

2. $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$ $(\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))$ *для любой композиции* gf *морфизмов категории* $\mathcal{K}$.

Определение. *Пусть* $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ *и* $\mathcal{F}' : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ *– некоторые ковариантные функторы. Преобразованием функтора* $\mathcal{F}$ *в функтор* $\mathcal{F}'$ *называется соответствие* $\mathcal{G}$, *сопоставляющее каждому объекту категории* $\mathcal{K}$ *морфизм категории* $\mathcal{K}'$ *так, что для любого морфизма* $f : X \longrightarrow Y$ *в категории* $\mathcal{K}$ *имеет место соотношение* $\mathcal{G}(Y)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}'(f)\mathcal{G}(X)$.

Замечание. Наглядно, это соотношение можно записать для любого морфизма $f : X \longrightarrow Y$ следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ {\scriptstyle \mathcal{G}(X)}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{G}(Y)}\Big\downarrow \\ \mathcal{F}'(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}'(f)} & \mathcal{F}'(Y) \end{array}$$

Для контравариантных функторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ горизонтальные стрелки будут обращены.

Определение. *Категория $\mathcal{K}'$ называется $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{K}$, если $\mathcal{P}$ – функтор накрытия, то есть каждый объект X и каждый морфизм f категории $\mathcal{K}$ является $\mathcal{P}$-образом некоторого объекта X' и некоторого морфизма f' категории $\mathcal{K}'$. Объект X' и морфизм f' называются при этом $\mathcal{P}$-детализациями или просто детализациями объекта X и морфизма f. Классы всех таких детализаций будем обозначать через $\mathcal{P}^{-1}(X)$ и $\mathcal{P}^{-1}(f)$.*

Замечание. Классы $\mathcal{P}^{-1}(X)$ и $\mathcal{P}^{-1}(f)$ непусты. При этом в каждом классе $\mathcal{P}^{-1}(X)$ и в каждом классе $\mathcal{P}^{-1}(f)$ можно ввести отношение порядка.

Определение. *Положим $X_1' \leq X_2'$, если существует такой морфизм $j' : X_2' \longrightarrow X_1'$, что $\mathcal{P}(j')$ является тождественным морфизмом X на себя. Положим $f_1' \leq f_2'$, если $f_1' : X_1' \longrightarrow Y_1'$, $f_2' : X_2' \longrightarrow Y_2'$, $X_1' \leq X_2'$, $Y_1' \leq Y_2'$.*

Замечание. Это довольно громоздкое определение становится прозрачным, если обратиться к следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} X_2' & \xrightarrow{f_2'} & Y_2' \\ {\scriptstyle i'}\Big\downarrow & & {\scriptstyle j'}\Big\downarrow \\ X_1' & \xrightarrow{f_1'} & Y_1' \end{array}$$

$\mathcal{P}$-образ этой диаграммы будет отображением $X \xrightarrow{f} Y$. Заметим, что коммутативность этой диаграммы, то есть соотношение $j'f_2' = f_1'i'$, в условие не входит.

Наряду с функторами накрытия, рассматриваются и функторы вложения.

Определение. *Функтор* $\mathcal{I} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ *называется функтором вложения, если* $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow X = Y$ *и* $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g) \Longrightarrow f = g$. *При этом объект* $\mathcal{I}(X)$ *и морфизм* $\mathcal{I}(f)$ *категории* $\mathcal{K}'$ *называются* $\mathcal{I}$*-представителями или просто представителями объекта* X *и, соответственно, морфизма* f *категории* $\mathcal{K}$.

Существуют связи между категориями, использующие функторы накрытия и фунторы вложения одновременно.

Определение. *Категория* $\mathcal{K}$ *называется ретрактом категории* $\mathcal{K}'$*, если найдутся такие функторы* $\mathcal{I} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ *и* $\mathcal{P} : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$*, что* $\mathcal{PI}$ *– тождественный функтор.*

Замечание. Нетрудно заметить, что функторы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}$, фигурирующие в этом определении, являются функторами вложения и накрытия, соответственно.

Пусть кагория $\mathcal{K}'$ является $\mathcal{P}$*-детализацией* категории $\mathcal{K}$. Наличие такой функторной связи между этими категориями позволяет, при некоторых дополнительных предположениях, доказывать наличие различных свойств объектов и морфизмов этих категорий при соответствующих предположения, прежде всего так называемых аксиомах детализаций: существовании точной верхней границы накрывающих объектов, точной нижней границы накрывающих объектов, точной верхней границы накрывающих морфизмов, точной нижней границы накрывающих морфизмов, левых накрытий, правых накрытий, поднятия композиций, вложения.

Использование тех или иных из этих аксиом позволяет доказывать различные свойства детализаций например существование, при выполнении соответствующих аксиом, максимального функторного вложения или минимального функторного вложения категории $\mathcal{K}$ в ее $\mathcal{P}$-детализацию $\mathcal{K}'$.

Категорные определения прямого произведения и свободного объединения отличаются от соответствующих структурных определений.

Определение. *Прямым произведением в категории* $\mathcal{K}$ *ее объектов* X_ξ*, рассматриваемых для всех* $\xi \in \Xi$*, называется система* (X, p_ξ)*, состоящая из некоторого объекта* X *и морфизмов* $p_\xi : X \longrightarrow X_\xi$*, определенных для всех* $\xi \in \Xi$*. При этом должно выполняться следующее условие:*

Для любой системы (Y, f_ξ)*, состоящей из некоторого объекта*

Y категории $\mathcal{K}$ и ее морфизмов $f_\xi : Y \longrightarrow X_\xi$, найдется такой морфизм $f : Y \longrightarrow X$, что $f_\xi = p_\xi f$ для всех $\xi \in \Xi$.

Определение. *Свободным объединением в категории $\mathcal{K}$ ее объектов X_ξ, рассматриваемых для всех $\xi \in \Xi$, называется система (X, i_ξ), состоящая из некоторого объекта X и морфизмов $i_\xi : X_\xi \longrightarrow X$, определенных для всех $\xi \in \Xi$. При этом должно выполняться следующее условие:*

Для любой системы (Y, f_ξ), состоящей из некоторого объекта Y категории $\mathcal{K}$ и ее морфизмов $f_\xi : X_\xi \longrightarrow Y$, найдется такой морфизм $f : X \longrightarrow Y$, что $f_\xi = f i_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.

Замечание. Нетрудно заметить, что категорные понятие прямого произведения и свободного объединения двойственны друг другу. Определение одного из них получается из другого обращением стрелок.

Можно доказать при выполнении соответствующих аксиом, что прямое произведение $((X, p_\xi)|\xi \in \Xi)$ объектов X_ξ в категории $\mathcal{K}$ накрывается прямым произведением $((X', p'_\xi)|\xi \in \Xi)$ в категории $\mathcal{K}'$ произвольно фиксированных детализаций этих объектов и аналогичное утверждение, относящееся к свободным объединениям.

5. Сходимости и некоторые классические понятия. Рассмотрим некоторую операцию замыкания на произвольно фиксированном множестве X. Эта операция позволяет определить на X соответствующую сходимость $\mathcal{S}(\mathrm{cl})$.

Определение. *Пусть $x \in X$, $\mathcal{A}_x = \{A | x \notin \mathrm{cl}\, A\}$. Будем считать, что направленность s принадлежит $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$ тогда и только тогда, когда для любого $A \in \mathcal{A}_x$ найдется носитель этой направленности, не имеющий общих точек с A.*

В первой части было доказано, что класс $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$ является для любого $x \in X$ классом сходимости к точке x.

Рассмотрим, теперь, произвольную сходимость $\mathcal{S}$ в X. Эта сходимость позволяет определить соответствующую операцию замыкания $\mathrm{cl}(\mathcal{S})$ на X.

Определение. *Будем считать, что $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{S})A$ тогда и только тогда, когда существует направленность $s \in \mathcal{S}_x$, некоторый носитель которой содержится в A.*

В первой части было доказано, что операция $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}(\mathcal{S})$ является операцией замыкания а также, что для любой операции замыкания cl и любой сходимости S имеют место соотношения $\mathrm{cl}(\mathcal{S}\,\mathrm{cl})) = \mathrm{cl}$ и $\mathcal{S}\,\mathrm{cl}(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$. Была рассмотрена связь между сходимостями и операциями замыкания. Дополнив ее связью между операциями замыкания и структурами окрестностей, мы получили связь между сходимостями и структурами окрестностей. Эту связь можно установить непосредственно следующим образом.

Пусть $\mathcal{S}$ – некоторая структура сходимости на множестве X. $\mathcal{S}$-окрестностью точки $x \in X$ будем называть любое множество $O \subset X$, обладающее следующим свойством:

направленность $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ принадлежит $\mathcal{S}_x$ тогда и только тогда, когда некоторый ее носитель содержится в O. Все такие окрестности точки x составляют $\mathcal{O}(\mathcal{S})_x$, множество $\{\mathcal{O}(\mathcal{S})_x | x \in X\}$ обозначается через $\mathcal{O}(\mathcal{S})$.

С другой стороны, если $\mathcal{O}$ является некоторой структурой окрестностей, то сходимость $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ определяется следующим образом:

направленность $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathcal{O})_x$ тогда и только тогда, когда для каждого $O \in \mathcal{O}_x$ найдется носитель этой направленности, содержащийся в O.

Мы имеем, таким образом, взаимно однозначные соответствия между структурами окрестностей, операциями замыкания и слабо топологическими сходимостями. При этом топологическим структурам окрестностей взаимно соответствовали топологические операции замыкания – соответствующие им сходимости будем называть *топологическими сходимостями*. Выделение класса топологических сходимостей потребовало введения аксиомы композиции.

В первой части было доказано, что сходимость $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, соответствующая некоторой структуре окрестностей $\mathcal{O}$, удовлетворяет аксиоме композиции тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}$ – топологическая структура окрестностей.

К классическим понятиям относятся также сходимости фильтров и кофильтров.

Определение. *Фильтром в множестве X называют любую непустую систему ω подмножеств этого множества удовлетворяющую следующим условиям:*

1. $\emptyset \notin \omega$.

2. *Если* $G \in \omega$ *и* $G \subset G'$ *тогда* $G' \in \omega$.
3. *Если* $G \in \omega$ *и* $G' \in \omega$ *тогда* $G \cap G' \in \omega$.

Определение. *Кофильтром в множестве* X *называют любую непустую систему* γ *подмножеств этого множества удовлетворяющую следующим условиям:*

1. $\emptyset \notin \gamma$.
2. *Если* $F \in \gamma$ *и* $F \subset F'$ *тогда* $F' \in \gamma$.
3. *Если* $F \cup F' \in \gamma$ *тогда* $F \in \gamma$ *или* $F' \in \gamma$.

Замечание. Понятия фильтра и кофильтра двойственны друг другу в следующем смысле:

если ω является фильтром в X, то $\gamma(\omega) = \{F | X \setminus F \notin \omega\}$ является кофильтром в X,

если γ является кофильтром в X, то $\omega(\gamma) = \{G | X \setminus G \notin \gamma\}$ является фильтром в X,

при этом $\gamma(\omega(\gamma)) = \gamma$, $\omega(\gamma(\omega)) = \omega$.

Определение. *Будем говорить, что система* Ω *фильтров в* X *и система* Γ *кофильтров в* X *двойственны друг другу, если* $\omega \in \Omega \Longrightarrow \gamma(\omega) \in \Gamma$ *и* $\gamma \in \Gamma \Longrightarrow \omega(\gamma) \in \Omega$. *Будем также говорить, что это эквивалентные системы.*

Обычно сходимость фильтров рассматривается для окрестностных (слабо топологических) пространств. Считается, что фильтр ω сходится к точке $x \in X$, если он содержит фильтр $\mathcal{O}_x$ окрестностей этой точки. Соответственно, кофильтр γ сходится к точке $x \in X$, если $\omega(\gamma)$ сходится к этой точке. Введя для каждой точки $x \in X$ совокупность $\mathcal{C}_x$ множеств, замыкания которых содержат эту точку (эта совокупность является кофильтром), можно дать независимое от сходимости фильтров определение сходимости кофильтров, а именно:
кофильтр γ сходится к точке x, если он содержится в кофильтре $\mathcal{C}_x$.

Замечание. Не трудно доказать, что $\mathcal{O}_x$ и $\mathcal{C}_x$ двойственны друг другу.

В общем случае для произвольного множества X может быть определена сходимость фильтров заданием для каждой точки $x \in X$ произвольно фиксированного множества Ω_x фильтров.

Определение. *Будем говорить, что на множестве X задана сходимость фильтров к $x \in X$, если фиксировано некоторое непустое множество Ω_x фильтров в X, удовлетворяющее следующему условию:*
если $\omega \in \Omega_x$ и $\omega \subset \omega'$, тогда $\omega' \in \Omega_x$ (замкнутость по возрастанию).
Будем говорить, что на множестве X задана сходимость фильтров, если для всех $x \in X$ независимо определены сходимости Ω_x.

Замечание. Сходимость кофильтров вводится двойственным определением, в котором условие замкнутости по возрастанию заменяется на двойственное ему условие замкнутости по убыванию.

Определение. *Будем говорить, что на множестве X задана сходимость кофильтров к $x \in X$, если фиксировано некоторое непустое множество Γ_x кофильтров в X, удовлетворяющее следующему условию:*

если $\gamma \in \Gamma_x$ и $\gamma' \subset \gamma$, тогда $\gamma' \in \Gamma_x$ (замкнутость по убыванию).

Будем говорить, что на множестве X задана сходимость кофильтров, если для всех $x \in X$ независимо определены сходимости Γ_x.

Замечание. Нетрудно понять, что для любой сходимости Ω_x фильтров двойственная ей система Γ_x является сходимостью кофильтров и наоборот.

Глава I

P-топологические структуры

§1. Пространства подмножеств

1. Пространства подмножеств и пространства отображений. *Пространством подмножеств множества* X называют множество PX или какое-нибудь его подмножество, рассматриваемое с некоторой заданной на нем топологической структурой. *Пространством отображений множества* Y *в множество* Z называют множество $C(Y,Z)$ или какое-нибудь его подмножество, рассматриваемое с некоторой заданной на нем топологической структурой. Таким образом точки этих пространств имеют различное происхождение: *точками пространств подмножеств являются множества, точками пространства отображений являются отображения.* Однако, если нас интересует только топологическая структура этих пространств, а происхождение их точек нам безразлично, то их теория может быть объединена. Точки любого пространства подмножеств могут быть заменены некоторыми отображениями, а точки любого пространства отображений могут быть заменены некоторыми множествами. Действительно, вместо подмножеств F множества X можно рассматривать их характеристические функции, то есть отображения $\chi_F : X \longrightarrow D$, $D = \{0,1\}$, $\chi_F(x) = 1 \iff x \in F$, вместо отображений $f : Y \longrightarrow Z$ можно рассматривать их графики, то есть подмножества $\Gamma_F = \{(y,z) | f(y) = z\}$ множества $Y \times Z$. Этот факт позволяет переносить понятия и утверждения теории пространств подмножеств в теорию пространств отображений и наоборот. Для нас здесь будет первичным понятие пространства подмножеств. Пространство отображений $f : Y \longrightarrow Z$ будет рассматриваться как пространство подмножеств множества $Y \times Z$. Заметим, с другой стороны, что теория топологических структур на PX и теория топологических структур на $P(X \times X)$, рассматриваемых как структуры на X, существенно различны, хотя и связаны друг с другом. Эта связь порождается вложением $j : X \longrightarrow X \times X$, $j(x) = (x,x)$ и, следовательно, вложением $Pj : PX \longrightarrow P(X \times X)$, для которого $Pj(F) = \{(x,x) | x \in F\}$.

Мы рассмотрим здесь два классических подхода к введению топологических структур на множествах подмножеств и два классических подхода к введению топологических структур на множествах отображений

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. На нем можно рассматривать *ограниченные замкнутые множества* F, то есть замкнутые множества с конечным диаметром $\sup\{d(x,y)|x,\ y \in F\}$. На множестве $P_b X$ всех замкнутых ограниченных в (X, d) множеств естественно вводится *метрика Хаусдорфа* d_H, для которой $d_H(A,B) = \max\{\sup(\inf\{d(x,y)|y \in B\}|x \in A)\}$, $\sup(\inf\{d(x,y)|x \in A)\}|y \in B)\}$ – наибольшее из отклонений одного из этих множеств от другого. Нетрудно доказать, что d_H является метрикой. Эта метрика определяет топологическую структуру на $P_b X$.

Второй подход применим к произвольному топологическому пространству (X, τ). Пусть PX – множество всех замкнутых в (X, τ) множеств. В качестве предбазы топологической структуры $P\tau$ на PX рассмотрим совокупность множеств

$$PU = \{F|F \in PX, F \subset U\}, QU = \{F|F \in PX, F \cap U \neq \emptyset\},$$

взятых для всех $U \in \tau$.

Топологическое пространство $(PX, P\tau)$ называется *пространством замкнутых подмножеств пространства* (X, τ) *в топологии Виеториса.*

Пусть теперь X и Y – произвольные топологические пространства, $C(X, Y)$ – множество всех непрерывных отображений $f : X \longrightarrow Y$. Рассмотрим две топологизации этого множества, а именно *топологию поточечной сходимости* и *компактно открытую топологию.*

Топология поточечной сходимости определяется сходимостями направленных систем отображений, а именно:

$$(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f \iff (f_\lambda(x)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(x)$$

для всех $x \in X$.

Компактно открытая топология определяется предбазой, состоящей из множеств

$$O(K, U) = \{f|f(K) \subset U\}$$

рассматриваемых для всех компактных подмножеств K из X и всех открытых в Y множеств U.

Пусть X – некоторое топологическое пространство и PX – множество всех его непустых замкнутых множеств, D_r – правое колмогоровское двоеточие. Его топологическая структура состоит из трех (открытых) множеств: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$. Как мы уже отметили, замкнутым множествам F пространства (X,τ) соответствуют характеристические функции χ_F, для которых $\chi_F(x)=1 \iff x \in F$, $\chi_F(x)=0 \iff x \notin F$. Рассмотрим топологию поточечной сходимости на множестве этих характеристических функций.

$$(\chi_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow \chi) \iff (\chi_\lambda(x)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow \chi(x)$$

для всех $x \in X$. Здесь χ_λ – характеристическая функция замкнутого множества F_λ, χ – характеристическая функция множества F.

Но если $x \in F$, то $\chi(x)=1$ и поэтому $(\chi_\lambda(x)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow \chi(x)$, если же $x \notin F$, то $\chi(x)=0$ и поэтому из сходимости $(\chi_\lambda(x)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow \chi(x)$ следует $\chi_\lambda(x)=0$ для всех достаточно больших λ. Иначе говоря $x \notin F_\lambda$ для достаточно больших λ.

Рассмотрим теперь компактно открытую топологию на множестве характеристических функций замкнутых множеств топологического пространства X. Нетривиальными множествами $O(K,U)$ являются здесь множества $O(K,\{0\})$ характеристических функций множеств F, не имеющих с K общих точек. В PX им соответствуют множества $P(X \setminus F)$.

2. Категорные P-топологизации. Мы рассмотрели простые примеры пространств подмножеств. Вообще говоря имеется значительное количество различных P-топологизаций (топологизаций множества PX или некоторого его подмножества). Некоторые авторы вводят топологию на основе какой-то заданной на X топологической структуры, другие привлекают дополнительные структуры (метрики, равномерность, ...), используются специальные конструкции и методы, на соответствующую топологическую структуру накладываются дополнительные условия. Нам представляется естественным следующий (категорный) подход.
Рассматривается категория T топологических пространств, и их непрерывнх отображений. Требуется определить для каждого топологического пространства (X,τ) соответствующую топологическую структуру $P\tau$ на PX так, что *для любого непрерывного отображения* $f:(X,\tau) \longrightarrow ((X',\tau')$ *отображение* $Pf:(PX,P\tau) \longrightarrow (PX',P\tau')$ *является непрерывным отображением.*

Таким образом соответствия $(X, \tau) \mapsto (PX, P\tau)$ и $f \mapsto Pf$ определяют функтор $P : T \longrightarrow T$.
Такие P-топологизации мы будем называть *естественными*.
При построении таких функторов возникает некоторая трудность. Если мы рассматриваем PX, как множество всех *замкнутых* в (X, τ) множеств, то из $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ не следует $Pf : PX \longrightarrow PX'$, так как f-образ замкнутого множества может не быть замкнутым множеством. В этом случае можно считать, что $Pf(A) = \mathrm{cl}\, f(A)$. С другой стороны мы можем рассматривать PX, как *множество всех подмножеств множества* X, но при этом можно рассматривать топологические структуры $P\tau$ на PX, для которых каждые $A \subset X$ и $\mathrm{cl}\, A$ топологически неразличимы в $(PX, P\tau)$, то есть не существует замкнутого в $(PX, P\tau)$ множества, содержащего одну из точек A и $\mathrm{cl}\, A$ и не содержащего другую. При таком подходе безразлично считать ли $Pf(A) = f(A)$ или $Pf(A) = \mathrm{cl}\, f(A)$ – оба отображения одновременно непрерывны или нет.

Здесь мы выделим некоторый набор категорных соответствий, являющихся в некотором смысле минимальными решениями поставленной проблемы.

Рассмотрим правое колмогоровское двоеточие $D = D_r$. Топологическая структура τ любого топологического пространства (X, τ) определяется совокупностью $\mathcal{F}$ всех его непрерывных отображений f в D, а именно $\tau = \{f^{-1}(0) | f \in \mathcal{F}\}$. Фиксируем какую-нибудь топологическую структуру $P\delta$ на PD, для которой вложение $i : D \longrightarrow PD$, $i(0) = \{0\}$, $i(1) = \{1\}$, непрерывно, и введем на PX топологическую структуру $P\tau$, как минимальную топологическую структуру среди топологических структур ζ на PX, для которых $Pf : (PX, \zeta) \longrightarrow (PD, P\delta)$ непрерывно, если $f : (X, \tau) \longrightarrow (D, \delta)$ непрерывно. Эта структура порождается множествами $(Pf)^{-1}(U)$, образуемыми для всех таких $f \in \mathcal{F}$ и всех $U \in P\delta$.

Пусть $h : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ – непрерывное отображение, $P\tau$ и $P\tau'$ – топологические структуры на PX и PX', полученные указанной выше конструкцией для фиксированной на PD топологической структуры $P\delta$. Так как $\{fh | f \in \mathcal{F}'\} \subset \mathcal{F}$ и $(P(fh))^{-1}(U) = (Ph)^{-1}(Pf)^{-1}(U)$, отображение Ph непрерывно. Тем самым фиксация топологической структуры $P\delta$ на PD определяет соответствующий функтор P.

Всего в PD имеется три точки: $a = \{0\}$, $b = \{1\}$, $c = \{0, 1\}$ (пустое множество в PD не включаем) и, следовательно, восемь подмножеств, из которых и образуются различные топологические структуры на PD. Два из этих подмножеств, а именно $\emptyset$ и $\{a, b, c\}$ входят во все топологические структуры на PD. Подмножества $\{b\}$ и $\{b, c\}$ не принадлежат ни одной из рассматриваемых топологических структур, так как i является вложением. Таким образом остается рассмотреть четыре множества, а именно $\{a\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ и $\{c\}$. Заметим теперь, что хоть одно из первых двух множеств должно принадлежать $P\delta$, так как i является вложением, на остальные предварительные условия не накладываются. Для упрощения записи перенумеруем эти множества в указанном порядке.

$1 = \{a\}$, $2 = \{a, c\}$, $3 = \{a, b\}$, $4 = \{c\}$. Заметим, что $\{a, b\} \cup \{c\} = D$, $\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$.

Рассмотрим два случая, $1 \in P\delta$ и $2 \in P\delta$ и в каждом из них рассмотрим все в принципе возможные восемь вариантов. В первом случае для $P\delta$ возможны следующие варианты (включены только нетривиальные множества):

1. $\{1\}$,
2. $\{1,\ 2\}$,
3. $\{1,\ 3\}$,
4. $\{1,\ 4\}$,
5. $\{1,\ 2,\ 3\}$,
6. $\{1,\ 2,\ 4\}$,
7. $\{1,\ 3,\ 4\}$,
8. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Во втором случае следует также рассмотреть восемь вариантов.

1. $\{2\}$,
2. $\{2,\ 1\}$,
3. $\{2,\ 3\}$,
4. $\{2,\ 4\}$,
5. $\{2,\ 1,\ 3\}$,
6. $\{2,\ 1,\ 4\}$,
7. $\{2,\ 3,\ 4\}$,
8. $\{2,\ 1,\ 3,\ 4\}$.

На самом деле здесь будут повторы. Например, случай $\{1,\ 4\}$ не полностью описывает топологическую структуру, так как объединение множеств 1 и 4 дает множество $\{1,\ 2,\ 4\}$, этот случай следует убрать. Аналогично следует убрать случай $\{1,\ 3,\ 4\}$, эквивалентный случаю $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Тем самым в первой группе остается шесть случаев. Во второй группе останется всего два случая. Случай 2 есть в первой группе, случай 3 эквивалентен случаю 5 и он есть в первой группе, случаи 5 и 6 также присутствуют в первой группе, случай 7 эквивалентен случаю 8, который входит в первую группу. Таким образом во второй группе остаются только случаи $\{2\}$ и $\{2.\ 4\}$, а всего мы будем иметь восемь случаев:

1. $\{1\}$,
2. $\{1,\ 2\}$,
3. $\{1,\ 3\}$,
4. $\{1,\ 2,\ 3\}$,
5. $\{1,\ 2,\ 4\}$,
6. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.
7. $\{2\}$,
8. $\{2,\ 4\}$.

Пусть X – произвольно фиксированное множество, $f : X \longrightarrow D$, $F = f^{-1}(1)$, то есть f – характеристическая функция множества F, $G = f^{-1}(0)$. Рассмотрим множества $(Pf)^{-1}(a)$, $(Pf)^{-1}(b)$, $(Pf)^{-1}(c)$, $Pf : PX \longrightarrow PD$. Эти подмножества множества PX попарно не пересекаются, их объединение есть все PX. В соответствии с определением отображения Pf (если $M \in PX$, то есть $M \subset X$, то $Pf(M) = \cup\{f(x)\}|x \in M)$ мы имеем $(Pf)^{-1}(a) = PG$, $(Pf)^{-1}(b) = PF$, $(Pf)^{-1}(c) = QG \cap QF$. Выясним теперь что представляют собой Pf-прообразы каждого из четырех подмножеств $\{a\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$, $\{c\}$ множества PD, где $a = \{0\}$, $b = \{1\}$, $c = \{0, 1\}$, комбинации которых определяют рассмотренные выше топологические структуры на PD. Мы должны рассмотреть таким образом четыре случая, четыре подмножества множества PD, а именно: $(Pf)^{-1}(\{a\})$, $(Pf)^{-1}(\{a, c\})$, $(Pf)^{-1}(\{a, b\})$, $(Pf)^{-1}(\{c\})$.

Первый и четвертый случаи по существу уже были рассмотрены, так как $(Pf)^{-1}(\{a\}) = (Pf)^{-1}(a) = PG$, $(Pf)^{-1}(\{c\}) = (Pf)^{-1}(c) = QG \cap QF$.

Во втором случае $(Pf)^{-1}(\{a, c\}) = (Pf)^{-1}(\{a\}) \cup (Pf)^{-1}(\{c\}) = PG \cup (QG \cap QF) = QG$.

В третьем случае $(Pf)^{-1}(\{a, b\}) = (Pf)^{-1}(\{a\}) \cup (Pf)^{-1}(\{b\}) = PG \cup PF$.

Расположив базы восьми рассматриваемых здесь структур в более естественном порядке мы получаем, таким образом:

1. PG
2. QG
3. PG, QG
4. PG, $PG \cup P(X \setminus G)$
5. QG, $QG \cap Q(X \setminus G)$
6. PG, QG, $PG \cup P(X \setminus G)$
7. PG, QG, $QG \cap Q(X \setminus G)$
8. PG, QG, $PG \cup P(X \setminus G)$, $QG \cap Q(X \setminus G)$

Замечание. В третьем варианте мы получаем широко известную топологию Виеториса. Последний вариант дает, очевидно, наиболее тонкую топологию на PD и, следовательно, наиболее тонкую из рассмотренных здесь категорных P-топологий. В силу этого она имеет особый интерес и заслуживает специального изучения.

Мы перейдем сейчас к изучению некоторых свойств P-топологии, определяемых множествами PG, QG, $PG \cup P(X \setminus G)$, $QG \cap Q(X \setminus G)$ для всех открытых в X множеств G.

Отметим, прежде всего, то что для каждого открытого в X множества G имеют место следующие соотношения:

$$(PG \cup P(X \setminus G)) \cap QG \cap Q(X \setminus G) = \emptyset,$$

$$PG \cup P(X \setminus G) \cup (QG \cap Q(X \setminus G)) = PX.$$

Это означает, что каждая пара $PG \cup P(X \setminus G)$ и $QG \cap Q(X \setminus G)$ непустых множеств является разбиением PX на непересекающиеся открытые множества. Тем самым каждое собственное, то есть не совпадающее с PX, открытое в PX множество PG содержится в открыто замкнутом множестве $PG \cup P(X \setminus G)$, не совпадающем с PX, и каждое открытое в PX множество QG содержит непустое открыто замкнутое множество $QG \cap Q(X \setminus G)$.

3. Свойства категорных P-топологий.

Для любого отображения $f : X \longrightarrow PX'$ определено его *естественное продолжение* $f : PX \longrightarrow PX'$, для которого $f(A) = \bigcup f(x) | x \in A$. Представляют определенный интерес *продолжимые* естественные P-топологизации.

Определение. *Естественная P-топологизация называется продолжимой, если любое непрерывное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$ естественно продолжимо до непрерывного отображения $f : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$.*

Теорема. *Естественная P-топологизация естественно продолжима тогда и только тогда, когда естественное продолжение $i : (P^2X, P^2\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ тождественного отображения $i : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ непрерывно для любого топологического пространства (X, τ).*

Доказательство. Пусть естественная P-топологизация естественно продолжима. Тогда тождественное отображение $i : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ естественно продолжимо до непрерывного отображения $i : (P^2X, P^2\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$. С другой стороны, если естественное отображение $i : (P^2X, P^2\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ непрерывно для любого (X, τ) и $f : (X, \tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$ непрерывно, то непрерывно и отображение $Pf : (PX, P\tau) \longrightarrow (P^2X', P^2\tau')$, а потому непрерывно и отображение $iPf : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$, где $i : (P^2X', P^2\tau') \longrightarrow (PX', P\tau')$.

Можно доказать, что все P-топологизации определяемые вариантами PD естественно продолжимы. Для естественной продолжимости достаточно, как мы видели, доказать непрерывность отображения $i : P^2D \longrightarrow PD$.

Точки множества D мы обозначали через 0 и 1, точки множества PD мы обозначали через $a = \{0\}$, $b = \{1\}$ и $c = \{0, 1\}$, точками множества P^2D будут множества $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ – всего семь точек, Мы перенумеруем их в указанном порядке наклонными цифрами. Для стандартного отображения $i : P^2D \longrightarrow PD$:

$i(\mathit{1}) = a$

$i(\mathit{2}) = b$

$i(\mathit{3}) = i(\mathit{4}) = i(\mathit{5}) = i(\mathit{6}) = i(\mathit{7}) = c$.

Рассмотрим все варианты для правого двоеточия.

Вариант 1. В PD имеется одно нетривиальное открытое множество $P\{0\} = \{a\}$ и поэтому в P^2D имеется одно нетривиальное открытое множество $P\{a\} = \{\mathit{1}\}$, которое будет i-прообразом открытого множества $\{a\}$. Таким образом отображение $i : P^2D \longrightarrow PD$ непрерывно.

Вариант 2. В PD имеется одно нетривиальное открытое множество $Q\{0\} = \{a, c\}$ и поэтому в P^2D имеется одно нетривиальное открытое множество $Q\{a, c\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, которое будет i-прообразом открытого множества $\{a, c\}$. Таким образом отображение $i : P^2D \longrightarrow PD$ непрерывно.

Вариант 3. Множества $P\{0\} = \{a\}$ и $Q\{0\} = \{a, c\}$ образуют здесь предбазу топологической структуры на PD. Их i-прообразами являются множества $\{1\} = P\{a\}$ и $\{1,3,4,5,6,7\} = Q\{a, c\}$, то есть открытые множеста, поэтому отображение $i : P^2D \longrightarrow PD$ непрерывно.

Вариант 4. Предбазой топологической структуры на PD являются здесь множества $P\{0\} = \{a\}$ и $P\{0\} \cup P\{1\}) = \{a, b\}$. Их i-прообразами являются множества $\{1\} = P\{a\}$ и $\{1,2\} = P\{a, b\} \cap (P\{a\} \cup P\{b, c\})$, то есть открытые множества, поэтому отображение $i : P^2D \longrightarrow PD$ непрерывно.

Вариант 5. Предбазой топологической структуры на PD являются здесь множества $Q\{0\} = \{a, c\}$ и $Q\{0\} \cap Q\{1\} = \{c\}$. Их i-прообразами являются здесь множества $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\} = Q\{a, c\}$ и $\{3,5,6,7\} = Q\{c\}$, то есть открытые множества, поэтому отображение $i : P^2D \longrightarrow PD$ непрерывно.

Варианты 6, 7, 8. В этих вариантах фигурируют i-прообразы множеств рассмотренные в предыдущих вариантах, они являются открытыми множествами в соответствующих топологиях на P^2D, поэтому отображения $i : P^2D \longrightarrow PD$ в этих топологиях непрерывны.

4. Локальные P-топологии. Подобно тому, как определялись локальные битопологии, можно ввести понятие локальных P-топологий. Как обычно мы будем отождествлять одноточечные множества с самими точками, то есть считать, что $X \subset PX$. При этом P-топологическая структура ζ, заданная на X, определяет на X топологическую структуру $\tau = \zeta | X$, играющую существенную роль при определении локальной P-топологической структуры.

Определение. *Будем говорить, что некоторая P-топологическая структура ζ локальна (является локальной P-топологической структурой), если множество $PX \setminus X$ и все его подмножества принадлежат ζ.*

Таким образом для локальной битопологической структуры сходятся только стационарные направленности и некоторые направленности, сходящиеся к точкам $x \in X$.

Определение. *Локализацией P-топологической структуры ζ на множестве X называется структура, получаемая присоединением к ζ множества $PX \setminus X$ и всех его подмножества.*

Ясно, что локализация любой P-топологической структуры является является локальной P-топологической структурой.

Рассмотрим локализации всех восьми категорных P-топологизаций, рассмотренных в разделе 1.2 этой главы. Эти топологизации были там определены нижеследующими базами.

1. PG
2. QG
3. PG, QG
4. PG, $PG \cup P(X \setminus G)$
5. QG, $QG \cap Q(X \setminus G)$
6. PG, QG, $PG \cup P(X \setminus G)$
7. PG, QG, $QG \cap Q(X \setminus G)$
8. PG, QG, $PG \cup P(X \setminus G)$, $QG \cap Q(X \setminus G)$

Так как любая локальная P-топологическая структура на множестве PX определяется заданием системы окрестностей для каждой точки $x \in X$, то нам надо рассмотреть эти окрестности в каждом из указанных восьми вариантов.

1. База окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

2. База окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств QG для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

3. Так как для любого множества $G \subset X$ имеет место включение $PG \subset QG$, то база окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

4. Так как для любого множества $G \subset X$ имеет место включение $PG \subset PG \cup P(X \setminus G)$, то база окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

5. Так как $QG \cap Q(X \setminus G \cap X = \emptyset$ для любого множества $G \subset X$, то база окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

6. Повторяя рассуждения вариантов 3 и 4 приходим к выводу, что база окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

7. Повторяя рассуждения вариантов 3 и 5 приходим к выводу, что база окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

8. Повторяя рассуждения вариантов 3, 4 и 5 приходим к выводу, что база окрестностей точки $x \in X$ состоит из множеств PG для для всех $G \in \tau$, содержащих эту точку.

Таким образом локализация каждой из категорных P-топологий *имеет в качестве базы окрестностей каждой точки* x либо PG для всех G содержащих x (варианты 1,3,4,6,7 и 8) либо QG (варианты 2 и 5).

§2. P-топологические пространства

1. Категория PTop. Когда рассматривается какое-нибудь пространство подмножеств, то есть некоторая совокупность PX подмножеств какого-то множества X (не обязательно всех), на которой фиксирована какая-нибудь топологическая структура ζ, обычно помнят, что его точки являются подмножествами исходного множества X. Например большое количество работ посвящено изучению связи между различными свойствами топологических пространств (X, τ) и свойствами пространств замкнутых множеств $(PX, P\tau)$ в топологии Виеториса. В понятие P-топологического пространства структурность PX входит органически.

Определение. *Пусть X – некоторое множество и PX – множество всех его непустых подмножеств или какая-нибудь его непустая часть. Пусть, далее, ζ – какая-то топологическая структура заданная на PX. Эта топологическая структура на PX, рассматриваемая как структура на X, называется P-топологической структурой, а пара (X, ζ) называется P-топологическим пространством.*

Замечание. Тот факт, что можно (а иногда необходимо) рассматривать в качестве PX не совокупность всех непустых подмножеств множества X, а ее некоторую непустую часть, несколько усложняет соответствующие определения.

Определение. *Пусть (X, ζ) и (X', ζ') – некоторые P-топологические пространства, PX и PX' – множества, на которых определены структуры ζ и ζ'. Пусть $f : X \longrightarrow X'$ – отображение, причем*

$f(M) \in PX'$ для каждого $M \in PX$. Тогда определено отображение $Pf : PX \longrightarrow PX'$, $Pf(M) = f(M)$, и отображение f называется P-непрерывным или просто непрерывным отображением (X, ζ) в (X', ζ'), если Pf – непрерывное отображение.

Нетрудно доказать, что P-топологические пространства и их P-непрерывные отображения образуют категорию. Эту категорию мы будем обозначать через **PTop** или **PT**.

Пока мы рассматриваем отдельные пространства (X, ζ) и (PX, ζ) сами по себе, нам безразлично какое из них является основным объектом. Но когда мы переходим к изучению соответствующих классов пространств, на первый план выходят P-топологические пространства, которые, в отличие от пространств подмножеств, образуют категорию.

Если каждое одноточечное множество $\{x\}$ входит в PX, то определенная на PX топологическая структура ζ индуцирует на X топологическую структуру $\zeta|X$ посредством вложения $j : X \longrightarrow PX$, $j(x) = \{x\}$. Такая ситуация имеет место, когда для каждого X в качестве PX рассматривается множество *всех* его непустых подмножеств. *В дальнейшем будет рассматриваться именно такая ситуация, если не оговорено противное, и именно так будет пониматься категория* **PTop**.

Замечание. Если топологическая структура некоторого пространства X каким-то способом определяет на множестве всех его непустых замкнутых множеств топологическую структуру ζ, то *она естественно продолжается на множество всех непустых подмножеств множества X*. Для этого достаточно расширить все $U \in \zeta$, присоединив к каждому из них все множества, замыкания которых в X принадлежат U. Если, например, рассматриваются категорные P-топологизации, определенные в предыдущем пункте для произвольного топологического пространства X с топологической структурой τ на множестве всех его замкнутых множеств комбинациями множеств $PG = \{F | CF \in \tau, F \subset G\}$ и $QG = \{F | CF \in \tau, F \cap G \neq \emptyset\}$ для всех $G \in \tau$, то достаточно положить $PG = \{M | M \subset G\}$, $QG = \{M | M \cap G =\neq \emptyset\}$.

Мы не будем излагать здесь детальную теорию P-топологических пространств – будут приведены только некоторые ее элементы, дающие представление об этой интересной теории и ее возможностях.

2. $P\,\mathrm{Top}$**, как детализация категории** Top. Пусть (X,ζ) – произвольное P-топологическое пространство, то есть (PX,ζ) – топологическое пространство. Так как $j : X \longrightarrow PX$, $j(x) = \{x\}$, является вложением, то мы можем отождествлять x с $\{x\}$ и считать, что $X \subset PX$, а ζ индуцирует на X топологическую структуру $\zeta|X$. Это позволяет сопоставить каждому P-топологическому пространству (X,ζ) топологическое пространство (X,τ), где $\tau = \zeta|X$. При этом каждое топологическое пространство (X,τ) сопоставляется какому-нибудь P-топологическому пространству (X,ζ), например при $\zeta = \tau \cup \{PX\}$. Если, теперь, $f : (X,\zeta) \longrightarrow (X',\zeta')$ является P-непрерывным отображением, то $f(X) \subset X'$ и $f|X : (X,\zeta|X) \longrightarrow (X',\zeta'|X')$ является непрерывным отображением. Тем самым определен функтор $\mathcal{P} : P\,\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Top}$, категория $P\,\mathrm{Top}$ оказывается детализацией категории Top с функтором накрытия $\mathcal{P}$. Этот функтор сопоставляет P-топологическому пространству (X,ζ) топологическое пространство $\mathcal{P}(X,\zeta) = (X,\zeta|X)$ и P-непрерывному отображению $f : (X,\zeta) \longrightarrow (X',\zeta')$ непрерывное отображение $\mathcal{P}(f) = f|X : (X,\zeta|X) \longrightarrow (X',\zeta'|X')$.

Как обычно, детализация $\mathcal{P}$ определяет отношение порядка на множестве $\mathcal{P}^{-1}(X,\tau)$ для каждого топологического пространства (X,τ). Для $P\,\mathrm{Top}$ полагаем $(X,\zeta) \le (X,\zeta')$, если существует такое P-непрерывное отображение $i : (X,\zeta') \longrightarrow (X,\zeta)$, что $\mathcal{P}(i)$ – тождественное отображение. Как обычно определяется и отношение порядка на каждом множестве P-непрерывных отображений, накрывающих некоторое непрерывное отображение топологических пространств.

Что касается вложения $\mathcal{I}$ категории Top в категорию $P\,\mathrm{Top}$, удовлетворяющего условию $\mathcal{P}\mathcal{I} = 1_{\mathrm{Top}}$ – тождественный функтор на Top, то оно определено не однозначно. Среди них можно выделить $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_0$, естественно определяемые следующим образом.

$\mathcal{I}_1(X,\tau) = (X, \tau \vee P_0(PX \setminus X))$, где $P_0(PX \setminus X)$ – совокупность *всех* подмножеств множества $PX \setminus X$.

$\mathcal{I}_0(X,\tau) = (X, \tau \cup \{PX\})$. Мы увидим далее, что между этими двумя вложениями имеется принципиальная разница.

Категория $P\,\mathrm{Top}$, как детализация категории Top, удовлетворяет некоторым (не всем) аксиомам детализаций. При доказательстве этого утверждения удобно пользоваться принятым ранее отождествлением x и $\{x\}$ для всех $x \in X$ и, таким образом считать, что $X \subset PX$, а если (X,ζ) накрывает (X,τ) то

$\tau = X \wedge \zeta = \{X \cap U | U \in \zeta\}$.

I. Категория $P\,\mathrm{Top}$, как детализация категории Top, удовлетворяет аксиоме существования точной верхней границы накрывающих объектов. Действительно, если $\tau = X \wedge \zeta_\xi | \xi \in \Xi$ и $\zeta = \sup(\zeta_\xi | \xi \in \Xi)$, то $\tau = X \wedge \zeta$, так как пересечения с X произвольных объединений и конечных пересечений элементов из всех ζ_ξ не выходят из τ.

Замечание. Соответствие $\mathcal{I}_1$ сопоставляет каждому топологическому пространству (X, τ) наибольшее P-топологическое пространство среди всех P-топологических пространств накрывающих (X, τ). Действительно, если (X, ζ) накрывает (X, τ), то пересечение любого элемента структуры ζ с X содержится в τ, а $\tau \vee P_0(PX \setminus X)$ содержит *все такие множества*. Это соответствие мы будем обозначать в дальнейшем через $\mathcal{I}_{\max}$. Нетрудно понять, что любому отображению $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ соответствует при этом отображение $\mathcal{I}_{\max} f : \mathcal{I}_{\max}(X, \tau) \longrightarrow \mathcal{I}_{\max}(X', \tau')$, накрывающее отображение f. Тем самым определен функтор вложения $\mathcal{I}_{\max}$.

I$'$. Простой пример показывает, что аксиома I$'$ для детализации $\mathcal{P} : P\,\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Top}$ не имеет места.

Рассмотрим для этого правое колмогоровское двоеточие (D, δ_r) и накрывающие его P-топологические пространства (D, ζ) и (D, ζ'), где $\zeta = \{\emptyset, D, \{0\}\}$, а $\zeta' = \{\emptyset, D, \{0, 1\}\}$. Тогда $\min(\zeta, \zeta') = \{\emptyset, D\}$ и потому $\min\{(D, \zeta), (D, \zeta')\}$ не накрывает (D, δ_r).

Замечание. Хотя $\mathcal{I}_0(X, \tau)$ не является, в общем случае, наименьшим среди P-топологических пространств накрывающих (X, τ), тем не менее каждому отображению $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ соответствует отображение $\mathcal{I}_0 f : \mathcal{I}_0(X, \tau) \longrightarrow \mathcal{I}_0(X', \tau')$, накрывающее отображение f. Это отображение P-непрерывно, так как оно непрерывно на (X, τ), а вне X и X' топологические структуры тривиальны (открытыми являются только множества PX и PX'). Тем самым определен функтор $\mathcal{I}_0$ вложения категории Top в категорию $P\,\mathrm{Top}$, не являющийся минимальным функтором.

II. Категория $P\,\mathrm{Top}$ удовлетворяет аксиоме существования точной верхней границы накрывающих морфизмов. Действительно, пусть P-непрерывные отображения $f_\xi | \xi \in \Xi$ накрывают отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ и $f_\xi : (X, \zeta_\xi) \longrightarrow (X, \zeta'_\xi)$. Тогда определены P-топологические пространства $(X, \zeta) = (X, \sup\{\zeta_\xi\})$

и $(X',\zeta') = (X', \sup\{\zeta'_\xi\})$. Отображение $Pf : (PX,\zeta) \longrightarrow (PX',\zeta')$, являющееся продолжением отображения f, как нетрудно заметить, непрерывно. Таким образом $f : (X,\zeta) \longrightarrow (X',\zeta')$ будет P-непрерывным и накрывает $f : (X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$.

II$'$. Эта аксиома не имеет места в $P\,$Top, хотя бы потому, что не имеет места аксиома I$'$.

III. Категория $P\,$Top удовлетворяет аксиоме существования левых накрытий. Действительно, пусть $f : (X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$ и (X',ζ') накрывает (X',τ'), то есть $X' \subset PX'$ и $\tau' = \zeta'|X'$. Рассмотрим на PX топологическую структуру $\zeta = (Pf)^{-1}(\zeta')$. Так как $Pf(X) \subset X'$ и $Pf = f$ на X, то $(Pf)^{-1}(V') \cap X = (Pf)^{-1}(V') \cap (Pf)^{-1}(X') \cap X = (Pf)^{-1}(V' \cap X') \cap X = f^{-1}(V' \cap X') \in \tau$. Таким образом (X,ζ) накрывает $X\tau$ и P-непрерывное отображение $f : (X,\zeta) \longrightarrow (X',\zeta')$ накрывает отображение $f : (X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$.

III$'$. Эта аксиома не имеет места в $P\,$Top, как показывает следующий простой пример. Пусть $X = (0,1]$, $X' = \{0,1\}$, $f : X \longrightarrow X'$, f отображает интервал $(0,1)$ в 0, $f(1) = 1$, τ – обычная топология полуинтервала, $\tau' = \{\emptyset, X', \{0\}\}$. Таким образом $(X',\tau') = (D,\delta_r)$ – правое колмогоровское двоеточие. В этой ситуации f оказывается непрерывным отображением. Пусть $\zeta = \{\emptyset, \tau, PX\}$ (здесь мы опять отождествляем точки $x \in X$ с одноточечными множествами $\{x\} \in PX$). В этой ситуации P-топологическое пространство (X,ζ) накрывает топологическое пространство (X,τ). Докажем, теперь, что каково бы ни было P-топологическое пространство (X',ζ') накрывающее топологическое пространство (X',τ'), отображение $f : (X,\zeta) \longrightarrow (X',\zeta')$ не будет P-непрерывным отображением. Рассматривая категорные P-топологизации мы обозначали точки множества PD через $a = \{0\}$, $b = \{1\}$, $c = \{0,1\}$ и выяснили, что есть только четыре нетривиальных множества, которые могут входить в ζ', а именно $\{a\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$. Но Pf-прообразы этих множеств в PX не принадлежат ζ, поэтому какой бы ни была структура ζ' отображение $f : (X,\zeta) \longrightarrow (X',\zeta')$ не может быть P-непрерывным.

IV. Аксиома поднятия композиции не имеет места для $P\,$Top. Это утверждение доказывается следующим примером. В диаграмме

$$(X,\tau) \xrightarrow{\ f\ } (X',\tau') \xrightarrow{\ g\ } (X'',\tau'')$$

рассматриваются следующие топологические пространства:

(X, τ), (X', τ') – пространства примера из III', (X'', τ'') – двоеточие с тривиальной (кодискретной) топологией, f отображает интервал $(0,1)$ в 0, $f(1) = 1$, как в примере III$'$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, f и g – непрерывные отображения. В качестве (X, ζ) берется P-топологическое пространство примера из III$'$, в качестве (X'', ζ'') берется тривиальное P-топологическое пространство.

Остается заметить, что отображение $gf : (X, \zeta) \longrightarrow (X'', \zeta'')$ будет P-непрерывным отображением, но накрывающего g отображения P-топологического пространства (X, ζ), как показано в примере из III$'$, не существует.

V. Аксиома V для $P\,$Top, как детализации категории Top выполняется, так как все отображения P-топологических и топологических пространств однозначно определяются отображениями множеств их точек.

Мы доказали, что категория $P\,$Top является довольно грубой детализацией категории Top – половина аксиом детализации не выполняется. С другой стороны нетрудно заметить, что $P\,$Top, как детализация категории Set множеств и их отображений, удовлетворяет всем аксиомам детализации.

3. P-топологические подпространства и факторпространства. С понятием подпространства P-топологического пространства у нас не возникает никаких сложностей. При переходе же к факторпространствам P-топологических пространств мы сталкиваемся с совершенно другой ситуацией, возникающей в связи с тем, что категория $P\,$Top, как детализация категории Top, не удовлетворяет условию существования правых накрытий.

Определение. *Пусть (X, ζ) – произвольное P-топологическое пространство и $X' \subset X$. Тогда $PX' \subset PX$ и поэтому топологическая структура ζ, определенная на PX индуцирует на PX' топологическую структуру $\zeta' = \zeta | PX'$. P-топологическое пространство (X', τ') называется подпространством P-топологического пространства (X, ζ).*

Замечание. Такое определение подпространства P-топологического пространства соответствует категорному определению подобъекта. Напомним, что подобъектом объекта X в категории $\mathcal{K}$

называют такую пару X', i, что любая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle i}\big\downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

где p – эпиморфизм, может быть дополнена отображением $Y \xrightarrow{h} X'$ (стрелкой) до коммутативной диаграммы. В категории $P\,\mathrm{Top}$ подобъектами являются только что определенные подпространства. Действительно, в категории $P\,\mathrm{Top}$ диаграммное условие означает, что отображения i и f являются отображениями на одно и то же множество, причем i взаимно однозначное отображение. Тем самым определено отображение h дополняющее диаграмму так, что дополненная диаграмма оказывается коммутативной. Остается заметить, что h является P-непрерывным отображением.

Определение. *Пусть (X, ζ) – некоторое P-топологическое пространство и $p : X \longrightarrow X'$ – отображение множества X на множество X'. Если на X' существует такая P-топологическая структура ζ', что (PX', ζ') – факторпространство топологического пространства (PX, ζ), то (X', ζ') называется факторпространством P-топологического пространства (X, ζ).*

Замечание. Это определение факторпространства соответствует категорному определению факторобъекта. Соответствующее диаграммное условие двойственно приведенному выше диаграммному условию для подобъекта. Оно имеет следующий вид: Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xleftarrow[f']{} & X' \\ {\scriptstyle i}\big\uparrow & & {\scriptstyle p}\big\uparrow \\ Y & \xleftarrow[f]{} & X, \end{array}$$

где i – мономорфизм, может быть дополнена отображением $X' \xrightarrow{h} Y$ (стрелкой) до коммутативной диаграммы.

Следующий пример показывает, что в некоторых случаях факторпространство может не существовать. Пусть $X = (0,1]$ – полуинтервал с обычной топологией τ, $X' = \{0,1\}$, $\zeta = \{\emptyset, PX, \tau\}$ (мы считаем, что $X \subset PX$), $p : X \longrightarrow X'$, p отображает $(0,1]$ в 0, $p(1) = 1$. Отображение p индуцирует на X' факторструктуру δ правого колмогоровского двоеточия, однако отображение Pf не может быть непрерывным ни при какой согласованной с δ топологической структурой на PX'.

4. Прямые произведения и свободные объединения P-топологических пространств. С понятием прямого произведения P-топологических пространств у нас не возникает никаких сложностей. При переходе же к их свободному объединению мы опять столкнемся с трудностями, возникающими в связи с тем, что категория $P\,\mathrm{Top}$, как детализация категории Top, не удовлетворяет условию существования правых накрытий.

Определение. *Пусть P-топологические пространства (X_ξ, ζ_ξ) заданы для всех $\xi \in \Xi$ и $X = \prod X_\xi | \xi \in \Xi$, то есть каждая точка множества X является системой $(x_\xi | \xi \in \Xi)$. Проекции $p_\mu : X \longrightarrow X_\mu$ определены соотношениями $p_\mu(x_\xi | \xi \in \Xi) = x_\mu$ для всех $\mu \in \Xi$. Тем самым на X определены P-топологические структуры $p_\mu^{-1}(\zeta_\mu)$. Точная верхняя граница ζ этих структур является P-топологической структурой прямого произведения, а (X, ζ) – прямым произведением пространств (X_ξ, ζ_ξ), $\xi \in \Xi$.*

Замечание. Это определение прямого произведения сответствует его категорному определению. Действительно, если для некоторого P-топологического пространства (X', ζ') заданы P-непрерывные отображения $f_\xi : (X', \zeta') \longrightarrow (X_\xi, \zeta_\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$, то мы можем определить отображение $f : (X', \zeta') \longrightarrow (X, \zeta)$, положив $f(x') = (f_\xi(x') | \xi \in \Xi)$. Так как $p_\mu(f(x')) = f_\mu(x')$ для каждого $\mu \in \Xi$, то имеет место соотношение $f_\xi = p_\xi f$ для всех $\xi \in \Xi$. Осталось только доказать P-непрерывность отображения f, то есть непрерывность отображения $Pf : (PX', \zeta') \longrightarrow (PX, \zeta)$. Но структура ζ состоит из конечных пересечений и произвольных объединений множеств вида $(Pp_\xi)^{-1}(U)$, где $U \in \zeta_\xi$, поэтому Pf-прообраз любого открытого в топологическом пространстве (PX, ζ) множества является каким-то объединением и конечным пересечением Pf-прообразов множеств вида $(Pp_\xi)^{-1}(U)$, то есть каким-то объединением и конечным пересечением множеств вида

$(Pf_\xi)^{-1}(U)$ и, в силу непрерывности всех Pf_ξ, является открытым в (X',ζ') множеством.

Определение. *Пусть P-топологические пространства (X_ξ,ζ_ξ) заданы для всех $\xi\in\Xi$, причем множества X_ξ попарно не пересекаются, и $X=\cup X_\xi|\xi\in\Xi$, то есть каждая точка множества X является точкой одного из множеств X_ξ. Тем самым определены вложения $i_\xi: X_\xi\longrightarrow X$ для всех $\xi\in\Xi$. Каждое из этих вложений индуцирует на X некоторую P-топологическую структуру $i_\xi(\zeta_\xi)$, их точная нижняя граница ζ, если она существует, рассматривается как P-топологическая структура свободного объединения (X,ζ) пространств (X_ξ,ζ_ξ).*

Замечание. Это определение свободного объединения сответствует его категорному определению. Действительно, если для некоторого P-топологического пространства (X',ζ') заданы P-непрерывные отображения $f_\xi:(X_\xi,\zeta_\xi)\longrightarrow(X',\zeta')$ для всех $\xi\in\Xi$, то мы можем определить отображение $f:(X,\zeta)\longrightarrow(X',\zeta')$, положив $f(x)=f_\xi(x)$, если $x=i_\xi(x_\xi)$, где x_ξ – некоторый элемент множества X_ξ.

5. P-топологии и близости. Термин “близость” используется при формулировке двух принципиально различных понятий. С одной стороны он используется при введении одной из структур непрерывности, как близость точки к множеству, с другой стороны он используется при введении одной из структур расширений, как близость двух множеств. Напомним (в несколько уточненном варианте), что отношение δ для пар A,B подмножеств множества X называется *отношением близости*, если оно обладает следующими свойствами:

Б1. $\delta(\emptyset,B)$ и $\delta(A,\emptyset)$ не имеют места.

Б2. Если $A\cap B\neq\emptyset$, то $\delta(A,B)$ имеет место.

Б3. Если $A\subset A'$ и $B\subset B'$ и $\delta(A,B)$ имеет место, то $\delta(A',B')$ имеет место.

Б4. Если $\delta(A,B\cup C)$ имеет место, то $\delta(A,B)$ или $\delta(A,C)$ имеет место. Если $\delta(A\cup B,C)$ имеет место, то $\delta(A,C)$ или $\delta(B,C)$ имеет место.

Замечание. Из этих условий симметричность отношений близости не следует.

Условимся писать $\delta(x, A)$ вместо $\delta(\{x\}, A)$, отождествляя x и $\{x\}$. Будем также писать $A\delta B$, если $\delta(A, B)$ имеет место.

Каждое отношение близости δ на множестве X определяет на этом множестве структуру τ, для которой $x \in \mathrm{cl}_\tau A \iff \delta(\{x\}, A)$ имеет место. Это слабо топологическая структура, так как

T1. $\mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset$ в силу условия Б1.

T2. $A \subset \mathrm{cl}\, A$ в силу условия Б2.

Действительно, если $x \in A$, то $\delta(x, A)$ в силу Б2 имеет место и поэтому $x \in \mathrm{cl}\, A$.

T3. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B$ в силу условий Б3 и Б4.

Действительно, $\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$ и $\mathrm{cl}\, B \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$ в силу Б3, поэтому $(\mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B) \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$. С другой стороны, если $x \in \mathrm{cl}(A \cup B)$ то есть $\delta(x, A \cup B)$ имеет место, то $\delta(x, A)$ или $\delta(x, B)$ имеет место и поэтому $x \in \mathrm{cl}\, A$ или $x \in \mathrm{cl}\, B$.

Условие идемпотентности операции замыкания

T4. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$

в общем случае не имеет места.

Действительно, рассмотрим на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел отношение близости δ, для которого $\delta(A, B)$ имеет место тогда и только тогда, когда найдутся целые числа $p \in A$ и $q \in B$ такие что $|p - q| \leq 1$. Условия Б1–Б4 очевидно вылолняются, а условие T4 для соответствующей структуры τ не выполняется. Например $\mathrm{cl}\{0\} = \{-1, 0, 1\}$, а $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\{0\}) = \mathrm{cl}\{-1, 0, 1\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \neq \mathrm{cl}\{0\}$.

Мы сопоставили каждой структуре близости δ слабо топологическую структуру τ. С другой стороны, каждой слабо топологической структуре τ можно сопоставить различные структуры близости δ. Например можно считать, что $\delta(A, B)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $clA \cap \mathrm{cl}\, B \neq \emptyset$. Условия Б1–Б4 очевидно выполняются.

Можно сузить класс отношений близости, добавив еще одно условие

Б5. Если $\delta(y, A)$ имеет место для каждого $y \in B$, то $\delta(x, A)$ имеет место когда имеет место $\delta(x, B)$.

Если отношение близости δ удовлетворяет условиям Б1 – Б5, то соответствующая ему структура τ *является топологической структурой.*

Действительно, достаточно доказать, что структура τ удовлетворяет условию T4: $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$. Заметим, прежде всего, что в силу Б2 и определения структуры τ имеет место соотношение $A \subset \operatorname{cl} A$ для каждого множества A. Отсюда следует, что $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$. С другой стороны, пусть $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$, то есть $\delta(x, \operatorname{cl} A)$ имеет место. Положим $B = \operatorname{cl} A$. Заметим теперь, что если $y \in B$, то имеет место $\delta(y, A)$, поэтому в силу условия Б5 имеет место $\delta(x, A)$ и, тем самым, доказано обратное включение $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} A$.

Определение. *Отношения (структуры) близости, удовлетворяющие условиям Б1 – Б4, будем называть слабо топологическими близостями, отношения близости, удовлетворяющие условиям Б1 – Б5, будем называть топологическими близостями.*

Замечание. Пусть δ – некоторое топологическое отношение близости определенное на множестве X и τ – соответствующая ему топологическая структура на X. Тогда $\delta(x, A)$ и $\delta(x, \operatorname{cl} A)$ имеют или не имеют место одновременно для любого $A \subset X$. Действительно, если имеет место $\delta(x, A)$, то тем более (в силу Б3) имеет место $\delta(x, \operatorname{cl} A)$. С другой стороны, если имеет место $\delta(x, \operatorname{cl} A)$, то (в силу Б5) имеет место $\delta(x, A)$.

Отсюда еще не следует, что $\delta(A, B) \iff \delta(\operatorname{cl} A, \operatorname{cl} B)$, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{0, 1\}$, $\delta(1, 0)$ имеет место, $\delta(0, 1)$ не имеет места. Положим $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1\}$. Эта близость определяет на X топологическую структуру τ_r правого колмогоровского двоеточия. В этой топологии $B = \operatorname{cl} A$, $\operatorname{cl} C = C$, $\delta(C, A)$ не имеет места, а $\delta(\operatorname{cl} C, \operatorname{cl} A)$ имеет место.

Представляют интерес близости, для которых выполняется более сильное чем Б5 условие

Б5$'$. Если $\delta(y, A)$ имеет место для каждого $y \in B$, то $\delta(C, A)$ имеет место когда имеет место $\delta(C, B)$. *Для таких близостей множества близки тогда и только тогда, когда близки их замыкания*, то есть $\delta(A, B) \iff \delta(\operatorname{cl} A, \operatorname{cl} B)$. В этом случае *рассматривая топологические близости можно ограничиться близостями для пар замкнутых множеств* в (X, τ), где τ – соответствующая этой близости топологическая структура на X. Поэтому, изучая в первой части книги главные расширения топологических пространств, мы ограничивались рассмотрением близостей для пар замкнутых множеств.

Каждое топологическое отношение близости на множестве X определяет некоторую топологическую структуру на PX.

Определение. *Пусть δ – топологическое отношение близости на множестве X и τ – топологическая структура на X, соответствующая δ. Для каждого τ- замкнутого множества F определены множества PF и $Q_\delta F = \{A|A\delta F\}$. Эти множества образованные для всех τ-замкнутых множеств F в X порождают топологическую структуру ζ на PX (P-топологическую структуру на X), соответствующую δ.*

Замечание. Если при образовании множеств PF и $Q_\delta F$ мы будем рассматривать только τ-замкнутые множества, то получим некоторое пространство замкнутых подмножеств топологического пространства (X, τ). В частном случае, когда δ – отношение близости по пересечениям, мы получим P-топологическую структуру Виеториса.

Структура ζ, построенная по топологической близости δ имеет некоторые специальные свойства.

$P1$. Если для $\alpha \subset PX$ из $A \in \alpha$ и $A \subset A'$ следует $A' \in \alpha$, то из $A \in \operatorname{cl}\alpha$ следует $A' \in \operatorname{cl}\alpha$.

$P2$. Если для $\alpha \subset PX$ из $(A \cup B) \in \alpha$ следует $A \in \alpha$ или $B \in \alpha$, то из $(A \cup B) \in \operatorname{cl}\alpha$ следует $A \in \operatorname{cl}\alpha$ или $B \in \operatorname{cl}\alpha$.

Можно рассмотреть и обратный переход от P-топологических структур на X к отношениям близости.

Определение. *Пусть ζ – топологическая структура на PX. Этой структуре соответствует отношение близости δ для которого $\delta(A, B)$ имеет место тогда и только тогда, когда $A \in \operatorname{cl}(QB)$ и $B \in \operatorname{cl}(QA)$ в (PX, ζ).*

Это отношение близости δ удовлетворяет условиям Б1 и Б2, однако выполнение условий Б3 и Б4 мы можем доказать при выполнении для ζ некоторых дополнительных условий.

Мы можем, таким образом, рассматривать при тех или иных ограничениях отображения некоторого класса P-топологических пространств на соответствующий класс пространств близости и вложение этого класса в класс $P\,\mathrm{Top}$. Можно определить также соответствия между P-непрерывными отображениями и близостными отображениями.

Определение. *Пусть (X, ζ) и (X', ζ') – P-топологические пространства, (X, δ) и (X', δ') – соответствующие им пространства близости, $f : (X, \zeta) \longrightarrow (X', \zeta')$ – P-непрерывное отображение, то* *есть $Pf : (PX,\zeta) \longrightarrow (PX',\zeta')$ – непрерывное отображение, тогда $f : (X,\delta) \longrightarrow (X',\delta')$ – соответствующее ему отображение. Это отображение является близостным отображением, так как из $\delta(A,B)$, то есть $A \in \mathrm{cl}_\zeta(QB)$ и $B \in \mathrm{cl}_\zeta(QA)$, следует $f(A) \in f(\mathrm{cl}_\zeta(QB)) \subset \mathrm{cl}_{\zeta'}(Q'(f(B)))$ и $f(B) \in f(\mathrm{cl}_\zeta(QA)) \subset \mathrm{cl}_{\zeta'}(Q'(f(A)))$, и поэтому $\delta'(f(A),f(B))$ имеет место.*

6. P-топологии и смежности. Напомним (в несколько уточненном варианте), что отношение σ для конечных систем α непустых подмножеств множества X называется *отношением смежности*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

C1. Если пересечение всех элементов системы α не пусто, то $\sigma(\alpha)$ имеет место.

C2. Если каждый элемент системы α' содержит какой-нибудь элемент системы α и $\sigma(\alpha)$ имеет место, то $\sigma(\alpha')$ имеет место.

C3. Если $\sigma(\alpha)$ и $\sigma(\beta)$ имеют место, то $\sigma(\alpha \vee \beta)$ имеет место. Здесь $\alpha \vee \beta = \{A \cup B | A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Если $\sigma\alpha$ имеет место, то будем говорить, что α является системой σ смежности.

Замечание. Из условия C2 следует симметричность отношений смежности, то есть $\sigma\alpha$ и $\sigma\alpha'$, где система α' получается из системы α перестановкой входящих в нее множеств, имеют или не имеют место одновременно.

Каждое отношение смежности σ на каком-нибудь множестве X естественно определяет некоторое отношение близости δ на X, являющееся ограничением σ на пары A, B множеств в X. Но так может быть определено не любое отношение близости на X – оно должно быть симметричным, то есть $\delta(A,B)$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $\delta(B,A)$. *Не вдаваясь в тонкости, мы будем считать, что на X задано не только отношение смежности σ, но и такая топологическая структура τ, что отношение σ для конечной системы множеств имеет место тогда и только тогда, когда оно имеет место для системы их τ-замыканий.* Будем говорить в этой ситуации, что σ и τ согласованы.

Определение. *Пусть σ – отношение смежности на множестве X и τ – согласованная с σ топологическая структура. Для каждого τ-замкнутого множества F определено множество PF и для каждой конечной системы τ-замкнутых множеств $\alpha = F_1, F_2, \ldots, F_n$ определено множество $Q_\sigma(\alpha) = \{A | \sigma(A, F_1,$*

$F_2, \ldots, F_n)$ имеет место$\}$. Эти множества образованные для всех τ-замкнутых множеств F и всех конечных систем α порождают топологическую структуру ζ на PX (P-топологическую структуру на X), соответствующую σ.

Замечание. Заметим, что для отношения близости δ и согласованного с ним отношения смежности σ соответствующие им P-топологические структуры могут и не совпадать. Дело в том, что одно и то же отношение близости может быть согласовано с различными отношениями смежности. Однако, если при этом отношение смежности σ *бинарно редуктивно* (понятия типа редуктивности были введены в первой части книги), то совпадение P-топологических структур имеет место.

Понятие бинарной редуктивности отношений смежности можно ввести следующим образом.

Определение. *Пусть σ – некоторое отношение смежности на (X,τ), введем отношение $\underset{\sigma}{\leq}$ для пар конечных систем τ-замкнутых множеств, положив*

$$(F_1, F_2, \ldots, F_m) \underset{\sigma}{\leq} (F_1', F_2', \ldots, F_n')$$

если для любого τ-замкнутого множества F

$$\sigma(F, F_1', F_2', \ldots, F_n') \text{ имеет место, если имеет место } \sigma(F, F_1, F_2, \ldots, F_m).$$

Будем говорить, что σ бинарно редуктивно, если для любой системы $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$, не являющейся системой σ-смежности, найдется такое τ-замкнутое множество H, что $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \underset{\sigma}{\leq} H$ и $\sigma(F, H)$ не имеет места.

Теорема. *Пусть отношение близости δ и бинарно редуктивное отношение σ на (X,τ) согласованы. Тогда определяемые ими P-топологические структуры совпадают.*

Доказательство. Топологическая структура на PX, соответствующая отношению близости δ, определяется системой множеств PF, $Q_\delta F$ рассматриваемых для всех τ-замкнутых множеств F; топологическая структура на PX, соответствующая отношению смежности σ, определяется системой множеств PF,

$Q_\sigma(\alpha)$ рассматриваемых для всех τ-замкнутых множеств F и систем α таких множеств, в частности одноэлементных систем $\alpha = F$, для которых $Q_\sigma(\alpha) = Q_\delta F$. Поэтому нам достаточно доказать, что каждое множество $Q_\sigma(\alpha)$ является каким-то пересечением множеств вида $Q_\delta F$. Заметим, прежде всего, что если $\alpha = (F_1, F_2, \ldots, F_n) \underset{\sigma}{\leq} H$, то $Q_\sigma\alpha \subset Q_\delta H$. Пусть $F \notin Q_\sigma\alpha$ для некоторой системы $\alpha = F_1, F_2, \ldots, F_n$, то есть $\sigma(F, F_1, \ldots, F_n)$ не имеет места. Тогда, в силу бинарной редуктивности σ, $\delta(F, H)$ не имеет места, то есть $F \notin Q_\delta H$ и потому $Q_\sigma\alpha$ является пересечением таких множеств $Q_\delta H$.

7. P-топологии и равномерные структуры покрытий. Напомним, что *равномерной структурой покрытий, определенной на топологическом пространстве* (X, τ) называют непустую систему ρ *открытых* покрытий s этого пространства, удовлетворяющую следующим условиям:

P1. Если $s_1 \in \rho$ и $s_2 \in \rho$, то $s_1 \wedge s_2 = \{G_1 \cap G_2 | G_1 \in s_1, G_2 \in s_2\} \in \rho$.

P2. Если покрытие s вписано в покрытие s', то есть каждый элемент покрыия s содержится в каком-нибудь элементе покрытия s', и $s \in \rho$, то $s' \in \rho$.

Пару (X, ρ) *называют равномерным пространством (покрытий).*

Каждой равномерной структуре ρ взаимно однозначно соответствует *структура соседства* ν, состоящая из необязательно конечных систем α замкнутых множеств, дополнения которых образуют системы $C\alpha = (X \setminus F | F \in \alpha)$ открытых множеств, не принадлежащие ρ. Таким образом $\alpha \in \nu \iff C\alpha \notin \rho$.

Определение. *Пусть ν – отношение соседства на топологическом пространстве (X, τ). Для каждого τ – замкнутого множества F определено множество PF и для каждой системы τ-замкнутых множеств α определено множество $Q_\nu(\alpha) = \{A | \nu(A, \alpha)$ имеет место$\}$. Эти множества образованные для всех τ-замкнутых множеств F и всех систем α порождают топологическую структуру ζ на PX (P-топологическую структуру на X), соответствующую ν.*

Замечание. Заметим, что для отношения близости δ и согласованного с ним отношения соседства ν соответствующие им P-топологические структуры могут и не совпадать. Дело в том, что одно и то же отношение близости может быть согласовано с различными отношениями соседства. Однако, если при этом отношение соседства ν *бинарно редуктивно* (понятия типа редуктивности были введены в первой части книги), то совпадение P-топологических структур имеет место.

Понятие бинарной редуктивности отношений соседства можно ввести следующим образом.

Определение. *Пусть ν – некоторое отношение соседства на (X,τ), введем отношение $\underset{\nu}{\leq}$ для пар систем τ-замкнутых множеств, положив*

$$\alpha \underset{\nu}{\leq} \alpha'$$

если для любого τ-замкнутого множества F

$$\nu(F,\alpha) \text{ имеет место, если имеет место } \nu(F,\alpha').$$

Будем говорить, что ν бинарно редуктивно, если для любой системы (F,α), не являющейся системой ν-соседства, найдется такое τ-замкнутое множество H, что $\alpha \underset{\nu}{\leq} H$ и $\nu(F,H)$ не имеет места.

Теорема. *Пусть отношение близости δ и бинарно редуктивное отношение соседства ν на (X,τ) согласованы. Тогда определяемые ими P-топологические структуры совпадают.*

Доказательство. Топологическая структура на PX, соответствующая отношению близости δ, определяется системой множеств $PF, Q_\delta F$ рассматриваемых для всех τ-замкнутых множеств F; топологическая структура на PX, соответствующая отношению соседства ν, определяется системой множеств PF, $Q_\nu(\alpha)$ рассматриваемых для всех τ-замкнутых множеств F и систем α таких множеств, в частности одноэлементных систем $\alpha = F$, для которых $Q_\nu(\alpha) = Q_\delta F$. Поэтому нам достаточно доказать, что каждое множество $Q_\nu(\alpha)$ является каким-то пересечением множеств вида $Q_\delta F$. Заметим, прежде всего, что если $\alpha \underset{\nu}{\leq} H$, то $Q_\nu(\alpha) \subset Q_\delta H$. Пусть $F \notin Q_\nu \alpha$ для некоторой системы α, то есть $\nu(\alpha)$ не имеет места. Тогда, в силу бинарной редуктивности ν, $\delta(F,H)$ не имеет места, то есть $F \notin Q_\delta H$ и потому $Q_\nu(\alpha)$ является пересечением таких множеств $Q_\delta H$.

8. P-топологии и кусочно линейные структуры. Между P-топологическими и кусочно линейными структурами существуют определенные связи. Общее понятие кусочно линейной структуры формулируется довольно сложно, поэтому мы ограничимся здесь стандартной структурой евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ любой размерности n с обычной метрикой и кусочно линейными отображениями евклидовых пространств прежде всего числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определение. *Мы будем рассматривать такие разбиения вещественной прямой $\mathbb{R}$ на отрезки, что любой сколь угодно большой отрезок этой прямой имеет непустое пересечение только с конечным числом отрезков данного разбиения. Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ кусочно линейно, если оно линейно на каждом отрезке некоторого разбиения.*

Теорема. *На вещественной прямой $\mathbb{R}$ можно задать такую P-топологическую структуру ζ, что множество всех P-непрерывных отображений $(\mathbb{R}, \zeta)$ в себя совпадает с множеством всех кусочно линейных отображений $\mathbb{R}$ в себя.*

Доказательство. Существуют, вообще говоря, различные P-топологические структуры ζ с указанным в теореме свойством. Мы выберем одну из них, возможно не самую естественную, среди структур индуцирующих на $\mathbb{R}$ обычную топологию числовой прямой.

Будем рассматривать множества A (мы будем называть их *исходными*), удовлетворяющие следующим условиям:

1. A состоит из непересекающихся отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$,
2. $b_{n+1} < a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$,
3. $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Отрезки $[a_n, b_n]$ можно выбирать произвольно, но во всяком случае a_n должно быть больше, чем $b_n - a_n$, чтобы осталось достаточно места для последующих отрезков, составляющих множество A.

По каждому исходному множеству A образуется *стандартная последовательность* $(A_n | n \in \mathbb{N})$, *где* $A_n = [0, \frac{1}{n}] \cap A$, *сходящаяся к* $\{0\}$. Мы будем рассматривать в качестве *стандартных* также последовательности, полученные из $(A_n | n \in \mathbb{N})$ произвольным сдвигом вдоль прямой на величину a и отображением симметрии. Такие последовательности считаются сходящимися к множеству

$\{a\}$. Совокупность всех сходимостей стандартных последовательностей порождает на $\mathbb{R}$ некоторую P-топологическую структуру ζ. Докажем, что ζ - искомая P-топологическая структура на $\mathbb{R}$, то есть $f : (\mathbb{R}, \zeta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \zeta)$ является P-непрерывным отображением тогда и только тогда, когда f – кусочно линейное отображение $\mathbb{R}$ в себя. Заметим, прежде всего, что если некоторое отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – кусочно линейно, то оно и P- непрерывно относительно ζ. Осталось доказать обратное утверждение. Пусть $f : (\mathbb{R}, \zeta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \zeta)$ является P-непрерывным отображением. Докажем, что оно является тогда кусочно линейным отображением. Наше рассуждение мы проведем, не нарушая общности в силу однородности ζ, для $a = 0$, $f(0) = 0$ и положительных точек x (правее нуля). Если $f(x) = 0$ для некоторого $h > 0$ и всех положительных $x < h$, то f – линейно немного правее 0. Остается случай, в котором $f(x) \neq 0$ для некоторых сколь угодно близких к нулю точек. В этом случае можно даже доказать, что $f(x) \neq 0$ для некоторого $h > 0$ и всех $0 < x < h$. Допустим, что это не так, то есть существует монотонно сходящаяся к нулю последовательность точек c_k, для которых все $f(c_k) = 0$. При этом можно считать, что для каждого k найдется такая сколь угодно близкая к c_k точка c'_k, что $f(c'_k) \neq 0$. Так как отрезки $[a_n.b_n]$ можно сдвигать вдоль $\mathbb{R}$, то для каждого k найдется отрезок содержащий c_k и c'_k и поэтому его f-образ является нетривиальным отрезком содержащим 0. Таким образом f-образ некоторой стандартной последовательности оказывается нестационарной нестандартной последовательностью, что противоречит P-непрерывности отображения f.

Докажем теперь, что в некотором отрезке $[0, h]$ отображение f монотонно. Допустим, что это не так, то есть существует для f некоторая сходящаяся к нулю последовательность точек локального экстремума. Без нарушения общности можно предположить также, что $f(x) > 0$ в $(0, h]$ и существовует монотонно сходящаяся к нулю последовательность точек локального максимума. Пусть c_1 - одна из этих точек. Мы можем тогда указать в $[0, h]$ такие отрезки $[0, h_1]$, $[p_1, q_1]$, $[r_1, s_1]$, что $c_1 \in [r_1, s_1]$, $a + h_1 < p_1 < q_1 < r_1 < s_1$, $q_1 - p_1 > r_1 - s_1$, причем f-образы этих отрезков попарно не пересекаются. Пусть $\mu = minf(x)$ на отрезке $[r_1, s_1]$, d – ближайшая к c_1 точка, для которой $f(d) = \mu$. Можно считать, взяв r_1 достаточно близко к c_1, что $d > c_1$. Пусть m_1

– такое натуральное число, что $2^{-(m_1+1)} < d - c_1 \leq 2^{-m_1}$, причем уменьшив длину отрезка $[r_1, s_1]$, мы можем сделать $d - c_1$ сколь угодно малым и, следовательно, сделать m_1 сколь угодно большим, в частности таким, что $2^{-m_1} < r_1$. Рассмотрим отрезки $[c_1, c_1 + 2^{-m_1}]$ и $[c_1 - 2^{-(m_1+1)}, c_1 + 2^{-(m_1+1)}]$. Эти отрезки имеют одинаковую длину равную 2^{-m_1}, но длины их f-образов различны. Действительно, первый f-образ имеет длину $l_1 \geq \mu$, второй же имеет длину $l_2 < \mu$.

Так как $(c_n) \longrightarrow 0$, существует такое $h_1 > 0$ и такое c_k, что $c_k \in [0, h_1]$ и $r_1 - h_1 > 2^{-m_1}$. Повторив предыдущую конструкцию для c_k и $[0, h_1]$, мы укажем отрезки $[c_k, c_1 + 2^{-m_k}]$ и $[c_k - 2^{-(m_k+1)}, c_k + 2^{-(m_k+1)}]$. Эти отрезки будут опять иметь одинаковую длину, а длины их f-образов различны. Заметим теперь, что в силу выбора m_1, между отрезками $[c_k, c_1 + 2^{-m_2}]$ и $[c_1 - 2^{-(m_1+1)}, c_1 + 2^{-(m_1+1)}]$ можно разместить без пересечений промежуточные отрезки длины $2^{-(m_1+1)}, \ldots, 2^{-(m_k-1)}$.

Неограниченное продолжение указанной выше конструкции *дает нам стандартную последовательность, причем при соответствующем выборе отрезков, имеющих одинаковую длину но разные длины их f-образов*, f-образ этой последовательности будет нестандартным, что противоречит P-непрерывности отображения f. Тем самым доказано, что f – монотонная функция.

Докажем теперь, что f – строго монотонная, например возрастающая функция. Заметим, прежде всего, что если $f(x_1) = f(x_2)$, то f – постоянна на $[x_1, x_2]$. Отсюда следует, что если f не строго монотонна на отрезке $[0, h]$, то на нем существуют отрезки ее постоянства. Нас будут интересовать максимальные отрезки постоянства и особенно их правые концы. Если f не строго монотонна в каждом отрезке $[0, h]$, то существуют правые концы c_n максимальных отрезков постоянства f монотонно сходящиеся к 0. Но для каждой точки c_k найдутся содержащие ее сколь угодно малые отрезки $[a_n, b_n]$ и $[a'_n, b'_n]$, длины которых равны 2^{-m}, а длины их f-образов различны. Это позволяет построить, как в предыдущем случае, стандартную последовательность с нестандартным ее f-образом.

Докажем, наконец, что f – линейная функция на некотором отрезке $[0, h], h > 0$. Допустим, что это не так, то есть для каждого сколь угодно малого $h > 0$ в отрезке $[0, h]$ найдется отрезок $[a, b]$, $a > 0$, на котором f не линейна. При этом длина такого отрезка может быть взята произвольно малой, например равной 2^{-m} для произвольно большого натурального числа m. Разобьем этот отрезок на 2^k равных отрезков длины $2^{-(m+k)}$. Так как f строго монотонна, то длина f-образа каждого такого (частичного) отрезка равна абсолютной величине разности значений функции f на его правом и левом концах. Но так как по предположению функция f не линейна на исходном отрезке, то для достаточно большого k найдутся частичные отрезки с разными длинами их f-образов. Это позволяет построить, как в предыдущих случаях, стандартную последовательность с нестандартным f-образом.

9. P-топологии и дифференциальные структуры. Между P-топологическими и дифференциальными структурами существуют определенные связи. Мы ограничимся здесь только одним, относящимся к этой теме сюжетом.

Теорема. *На вещественной прямой $\mathbb{R}$ можно задать такую P-топологическую структуру ζ, что множество всех P-непрерывных отображений $(\mathbb{R}, \zeta)$ в себя совпадает с множеством всех непрерывно дифференцируемых функций с положительной производной или постоянных функций.*

Доказательство. Существуют, вообще говоря, различные P-топологические структуры ζ с указанным в теореме свойством. Мы выберем одну из них, возможно не самую естественную, среди структур индуцирующих на $\mathbb{R}$ обычную топологию числовой прямой.

На структуру ζ накладываются следующие условия:

1. Если последовательность $(a_n | n \in \mathbb{N})$ – строго монотонно сходится к x слева и последовательность $(b_n | n \in \mathbb{N})$ – строго монотонно сходится к x справа, то последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ сходится к $\{x\}$, но никакая последовательность $[y_n, x]$, где все $y_n \neq x$ не сходится к $\{x\}$.

2. Пусть $A_n = \{x_n, x_n^{(p)} | p \in \mathbb{N}\}$, $A = \{x, x^{(p)}\}$, последовательности $(x_n^{(p)})$ и $(x^{(p)})$ строго монотонно по p сходятся справа к x_n и x, соответственно. Последовательность (A_n) сходится к A если последовательность (x_n) сходится к x справа или слева, числа $\alpha(A_n) = \lim 2^p(x_n^{(p)} - x_n)$ и $\alpha(A) = \lim 2^p(x^{(p)} - x)$ существуют и отличны от нуля, причем $\alpha(A_n)$ сходится к $\alpha(A)$. Более того, для любого $\epsilon > 0$ должны найтись такие натуральные числа n_0 и p_0,

что

$$(*) \quad |\alpha(A) - 2^p(x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)})| < \epsilon \quad \text{для всех } n \geq n_0 \text{ и } p \geq p_0.$$

Замечание. Из неравенств вида (*) следует более сложное неравенство

$$|\alpha(A) - \frac{2^{p+q}}{2^q - 2^q}(x_n^{(p)} - x_n^{(q)})| < \epsilon$$

для всех $n \geq n_0$ и $q \geq p \geq p_0$.

Действительно, перепишем (*) в следующем виде

$$*p \qquad : |2^{-p}\alpha(A) - (x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)})| < 2^{-p}\epsilon$$

и сложим неравенства $*p, *(p+1), \ldots, *(q-1)$. Тогда

$$\begin{gathered}|(2^{-p} + 2^{-(p+1)} + \cdots + 2^{-(q-1)})\alpha(A) - (x_n^{(p)} - x_n^{(q)})| \\ < (2^{-p} + 2^{-(p+1)} + \cdots + 2^{-(q-1)})\epsilon,\end{gathered}$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Нетрудно заметить, что если отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – постоянная или непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной, то отображение $f : (\mathbb{R}, \zeta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \zeta)$ является P-непрерывным отображением.

Действительно, пусть $(A_n | n \in \mathbb{N}) \longrightarrow A$, то есть выполняется условие 2, и $B = f(A)$, $B_n = f(A_n)$, $y = f(x)$, $y_n = f(x_n)$, $y_n^{(p)} = f(x_n^{(p)})$. Нам надо доказать, что $(B_n | n \in \mathbb{N}) \longrightarrow B$. Так как f строго возрастающая функция, последовательности $(y_n^{(p)})$ и $(y^{(p)})$ – строго монотонно по p сходятся справа к y_n и y, соответственно, а последовательность (y_n) строго монотонно сходится к y справа или слева. В силу непрерывности f', для любого $\delta > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что в любой точке интервала $(x - \delta_1, x + \delta_1)$ производная функции f отличается от $f'(x)$ не больше чем на δ. В силу условия 2, числа $\alpha(A_n) = \lim 2^p(x_n^{(p)} - x_n)$ и $\alpha(A) = \lim 2^p(x^{(p)} - x)$ существуют и отличны от нуля, причем $(\alpha(A_n))$ сходится к $\alpha(A)$. Для достаточно больших n и p точки $x_n^{(p)}$, x_n, $x^{(p)}$, принадлежат интервалу $(x - \delta_1, x + \delta_1)$ поэтому для таких n и p

$$2^p(y_n^{(p)} - y_n) = \frac{y_n^{(p)} - y_n}{x_n^{(p)} - x_n} 2^p(x_n^{(p)} - x_n)$$

но

$$\frac{y_n^{(p)} - y_n}{x_n^{(p)} - x_n} = f'(\xi_n)$$

где $x_n \geq \xi_n \geq x_n^{(p)}$, поэтому предел при $p \longrightarrow \infty$

$$\alpha(B_n) = \lim 2^p(y_n^{(p)} - y_n) = f'(x)\alpha(A_n)$$

Аналогично доказывается, что

$$\alpha(B) = \lim 2^p(y^{(p)} - y) = f'(x)\alpha(A)$$

и, следовательно, $(\alpha(B_n)) \longrightarrow \alpha(B)$.

Рассмотрим теперь те же n и p, для которых $x_n^{(p)}$, x_n, $x^{(p)}$, принадлежат интервалу $(x - \delta_1, x + \delta_1)$ и рассмотрим число $2^p(y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)})$, которое опять же можно представить в виде

$$\frac{y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)}}{x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)}} 2^p(x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)}) = f'(\xi_n^{(p)}) 2^p(x_n^{(p)} - x_n^{(n+1)})$$

где $x_n^{(p+1)} \leq \xi_n^{(p)} \leq x_n^{(p)}$. Тогда $\alpha(B_n) - 2^{p+1}(y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)}) = f'(x)\alpha(A_n) - 2^{n+1}(y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)}) = f'(x)\alpha(A_n) - (f'(\xi_n^{(p)}) + \theta(n,p)\delta)(x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)}) = f'(x)(\alpha(A_n) - (x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)}) + \theta_1(n,p)\delta_1 = \theta_3(n,p)\delta$, где все $|\theta(n,p)|$ не превосходят единицу. Так как $|\theta_3(n,p)\delta| < \epsilon$ для всех достаточно больших n и p,

$$|\alpha(B_n) - 2^{p+1}(y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)})| < \epsilon.$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть отображение $f : (\mathbb{R}, \zeta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \zeta)$ является P-непрерывным отображением. Тогда, в силу условия 1, f – постоянное или строго монотонное отображение. Докажем его дифференцируемость. Произвольно фиксируем некоторую точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и для каждой точки x из фиксированной δ-окрестности точки x_0 определим множество A_x, а именно

$$A_x = \{x, x + 2^{-p} | p \in \mathbb{N}\}$$

и, соответственно, множество $B_x = f(A_x)$.

Пусть (x_n) сходится к x. Положим

$$x_n^{(p)} = x_n + 2^{-p}, \;\; x^{(p)} = x + 2^{-p},$$

$$A_n = \{x_n, x_n^{(p)} | p \in \mathbb{N}\}, \;\; A = \{x, x^{(p)} | p \in \mathbb{N}\},$$

Здесь $\alpha(A) = \alpha(A_n) = 1$, то есть $\alpha(A_n)$ сходится к $\alpha(A)$. Более того, здесь $2^{p+1}(x_n^{(p)} - x_n^{(p+1)}) = 2^{p+1}(x_n + 2^{-p} - x_n - 2^{-(p+1)}) = 1 = \alpha(A)$. Таким образом для последовательности (A_n) условие 2 сходимости (A_n) к A выполняется. Пусть

$$B_n = f(A_n) = \{y_n, y_n^{(p)} | p \in \mathbb{N}\}, B = f(A) = \{y, y^{(p)}\}.$$

Тогда $(B_n) \longrightarrow B$, в силу P-непрерывности f. Отсюда следует, опять же в силу условия 2 и строгой монотонности f, что $\alpha(B)$ и $\alpha(B_n)$ существуют, отличны от нуля и $\alpha(B_n)$ сходится к $\alpha(B)$. Более того, для любого $\epsilon > 0$ должны найтись такие натуральные числа n_0 и p_0, что $|\alpha(B) - 2^{p+1}(y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)})| < \epsilon$ для всех $n \geq n_0$ и $p \geq p_0$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{y - y_0}{x - x_0},$$

где x – сколь угодно близко к x_0. Нам надо доказать, что при $x \longrightarrow x_0$ предел $f'(x_0)$ этого отношения существует, положителен и непрерывно зависит от x_0. Оценим разность $y - y_0$, используя неравенства $|2^{-(p+1)}\alpha(B) - (y_n^{(p)} - y_n^{(p+1)})| < 2^{-(p+1)}\epsilon$ и $|2^{-p}\alpha(B) - (y_n - y_n^{(p)})| < 2^{-p}\epsilon$ для сколь угодно малого ϵ и соответствующих сколь угодно больших n и p. Заметим, что числа n_0 и p_0, о которых шла речь выше могут зависить от точки x.

Нам придется рассмотреть отдельно случаи $x > x_0$ и $x < x_0$.

Случай $x > x_0$.

Фиксируем некоторое число $\epsilon > 0$ и такие натуральные числа n_0 и p_0, что для любых $n \geq n_0$ и $p \geq p_0$ имеют место указанные выше неравенства для $(x_n) \longrightarrow x_0$. Пусть $x_0 + 2^{-(p_0+1)} \geq x < x_0 + 2^{-p_0}$. Тогда $|2^{-p_0+1}\alpha(B) - (y_n^{(p_0+1)} - y_0)| < 2^{-p}\epsilon$. Повторив это рассуждение уже для точки $y_n^{(p_0+1)}$ мы еще больше приблизимся к точке y. продолжая приближение к этой точке мы в конечном счете придем к неравенству

$$|(x - x_0)\alpha(B) - (y - y_0)| < (x - x_0)\epsilon$$

или

$$|\alpha(B) - \frac{y - y_0}{x - x_0}| < \epsilon$$

и, таким образом, будет доказано, что $f' = \alpha(B)$, то есть будет доказано существование $f'(x_0)$, ее непрерывность и положительность.

Случай $x < x_0$.

В этом случае мы будем начинать не с точки x_0, приближаясь к точке x, а наоборот начнем с точки x, приближаясь к точке x_0, в остальном же рассуждения аналогичны.

10. Другие P-структуры. Можно рассматривать более сложные пространственные структуры. Они будут детально изучаться в третьей части книги сейчас же мы только хотим отметить естественность их появления, как объектов изучения. Сюда относятся, прежде всего, топологические структуры на $P^2X = P(PX)$, на $P^2(X \times Y)$ и P^3X. Следующими по сложности после пространств подмножеств являются пространства систем подмножеств.

Определение. *Пусть X – некоторое множество. Топологическая структура ϑ, определенная на множестве P^2X или на некоторой его части, называется P^2-топологической структурой на X. Пара (X, ϑ) называется P^2-топологическим пространством.*

Замечание. Заметим, что системы множеств встречаются в математических конструкциях довольно часто. Сюда относятся, например, системы открытых множеств, системы замкнутых множеств, фильтры, кофильтры, покрытия. Соответственно, P^2-топологической структурой на X является топологическая структура на множестве всех топологических структур, рассматриваемых на X, топологическая структура на множестве всех его покрытий, топологическая структура на некотором множестве фильтров, ...

Подобно тому, как само множество X, рассматриваемое как подмножество множества PX, играет особую роль в теории P-топологических пространств, множество PX, рассматриваемое как подмножество множества P^2X, играет особую роль в теории P^2-топологических пространств. Это совокупность одноэлементных систем непустых подмножеств. Она фигурирует в определении локальных P^2-топологий.

Рассматривая множество TX всех топологий определенных на X, мы можем не учитывать в соответствующих системах множеств само множество X и пустое множество (они входят в каждую топологическую структуру на X). Поэтому в качестве PX мы можем рассматривать здесь множество *всех простейших топологических структур* на X, а именно $\{\emptyset, G, X\}$, $G \neq \emptyset$.

Рассматривая множество ΩX всех фильтров в X мы можем выделить среди них фильтры $\omega(A)$, состоящие из множеств содержащих A. Поэтому в качестве PX мы можем рассматривать здесь множество *всех фильтров, определяемых непустыми подмножествами множества* X.

Рассматривая множество ΣX всех покрытий множества X, мы можем выделить среди них двухэлементные покрытия $\{A, X\}$, естественно определяемые входящими в них непустыми множествами A. Поэтому в качестве PX мы можем рассматривать множество *всех таких двухэлементных покрытий.*

Задание P^2-топологической структуры на каком-то множестве X можно осуществить в три этапа. Сначала ввести на X какую-нибудь топологическую структуру τ, затем ввести на PX топологическую структуру ζ используя τ и, наконец, ввести на P^2X топологическую структуру ϑ, используя ζ.

Пусть (X, τ) – произвольное топологическое пространство. Можно рассмотреть, например, топологическую структуру ζ, как топологию Виеториса на PX, определенную структурой τ и затем для топологического пространства (PX, ζ) структуру ϑ, как топологию Виеториса, определенную структурой ζ на P^2X.

Пример. Пусть $(X, \tau) = D_r$ – правое колмогоровское двоеточие ($\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$). Тогда для ζ на $PD = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ имеется восемь вариантов, описанных в разделе 1.2. Для упрощения записи точек в PD были введены обозначения $\{0\} = a, \{1\} = b, \{0,1\} = c$, и поэтому $PD = \{a, b, c\}$. Пусть ζ – топология Виеториса. Она определяется множествами PG и QG, где $G = \{0\}$, то есть множествами $\{a\}$ и $\{a, c\}$. Если и для P^2D выбрать вариант Виеториса, то ϑ будет иметь базис состоящий из $P\{a\}$, $Q\{a\}$, $P\{a, c\}$ и $Q\{a, c\}$. Опять же для упрощения записи введем следующие обозначения точек множества P^2D:

$1 = \{a\}$,
$2 = \{b\}$,
$3 = \{c\}$,
$4 = \{b, c\}$,
$5 = \{a, c\}$,
$6 = \{a, b\}$,

$7 = \{a, b, c\}$,

Все эти структуры кроме $\{a, b\}$ являются топологическими структурами на PD. В этих обозначениях указанный выше базис ζ имеет следующий вид:

$P\{a\} = \{1\}$,
$Q\{a\} = \{1, 5, 6, 7\}$,
$P\{a, c\} = \{1, 3, 5\}$,
$Q\{a, c\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Рассмотрим теперь множество $P^2(X \times Y)$. Его точкам, то есть системам подмножеств множества $X \times Y$ можно дать различные интерпретации. Мы уже отмечали, что подмножества Γ множества $X \times Y$, то есть точки множества $P(X \times Y)$, можно рассматривать как графики Γ_f отображений $f : X \longrightarrow Y$, в общем случае возможно частичных и возможно многозначных. Следовательно точки множества $P^2(X \times Y)$ можно рассматривать как системы отображений множества X в множество Y. Если $X = Y$, то точками множества $P^2(X \times X)$ являются, например, равномерные структуры, как системы окрестностей диагонали $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$.

Перейдя к множеству P^3X мы заметим, что некоторые его точки, как совокупности систем подмножеств, имеют интересную интерпретацию. Так, например, равномерные структуры покрытий являются точками этого множества, его точками являются также структуры окрестностей.

Глава II

Структуры произведений и пространств отображений

Введение

В этой главе будут рассмотрены структуры на произведениях $X \times Y$ пространств, структуры на множествах $C(Y, Z)$ отображений пространств и связи между ними. Частным случаем структур на произведениях являются при $Y = X$ битопологические структуры, частным случаем структур на множествах отображений являются топологические структуры на $C(X, X)$ (об этом упоминалось в предыдущей главе) и на $C(Y, D)$, где $D = \{0, 1\}$ – правое или левое колмогоровское двоеточие. последние структуры канонически соответствуют топологическим структурам на множестве PY всех замкнутых подмножеств пространства Y.

По аналогии с топологическими структурами на множествах $X \times X$, которые мы называли битопологическими структурами на множествах X, мы можем рассматривать структуры на произведениях $X \times Y$ и структуры на множествах $C(Y, Z)$ отображений, как некоторые структуры на парах множеств.

Мы будем рассматривать различные множества $X, Y, Z, \ldots$, снабженные какими-нибудь структурами, обозначая соответствующие пространства теми же буквами $X, Y, Z, \ldots$. Если мы хотим подчеркнуть тот факт, что на некотором множестве (топологическом пространстве), например на X, фиксирована какая-то (новая) структура τ, то мы будем писать X_τ.

Все дальнейшее изложение будет вестись, как правило, для топологических пространств и их непрерывных отображений, лишь иногда оно будет в случае необходимости дополняться соответствующими обобщениями на пространства сходимости. Переход от исследований топологической ситуации к исследованию соответствующих пространств сходимости обычно не вызывает осложнений.

Итак мы будем рассматривать отображения

$$E : C(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z, \ E(f, y) = f(y),$$

$$F : X \times Y \longrightarrow Z,$$

$$G : X \longrightarrow C(Y, Z),$$

$$F(x,y) = G(x)(y),\ F = E(G \times 1_Y),$$

для всех $x \in X,\ y \in Y$. Будем говорить, что отображения F и G *соответствуют* друг другу, и будем рассматривать только пары соответствующих друг другу отображений.

Мы можем перейти теперь к основным определениям главы. В зтих определениях будут фигурировать следующие топологические пространства:

$$X,\ Y,\ Z,\ X \times Y,\ (X \times Y)_\tau,\ C(Y,Z),\ C(Y,Z)_\tau.$$

Здесь только $X,\ Y,\ Z$ – произвольно фиксированные топологические пространства.

Заметим прежде всего, что $X \times Y$ может и не быть обычным произведением топологических пространств, но каждое отображение $j_x : Y \longrightarrow X \times Y,\ j_x(y) = (x,y)$, должно быть вложением. Мы будем рассматривать в дальнейшем различные топологические структуры на произведениях $X \times Y$, но только те, которые удовлетворяют указанному выше требованию. Заметим, что топологическая структура прямого произведения $X \times Y$ этому условию удовлетворяет, но ему удовлетворяют и многие другие топологические структуры на $X \times Y$, например произведение дискретной структуры на X и топологической структуры пространства Y. Что касается топологических пространств $(X \times Y)_\tau$ и $C(Y,Z)_\tau$, то здесь топологическая структура τ вообще не фиксирована. Она играет роль переменной, значение которой определяется, в конечном счете соответствующими условиями.

Фиксируем топологические пространства $X,\ Y,\ Z,\ X \times Y$, $C(Y,Z)$.

Определение. Топологическая структура τ на $C(Y,Z)$ называется X-*расщепляющей*, если непрерывность отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$ влечет непрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow (C(Y,Z)_\tau$.

Определение. Топологическая структура τ на $C(Y,Z)$ называется X-*совместно непрерывной*, если непрерывность отображения $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_\tau$ влечет непрерывность соответствующего отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$.

Определение. Топологическая структура τ на $X \times Y$ называется Z-*расщепляющей*, если непрерывность отображения $F : (X \times$

$Y)_\tau \longrightarrow Z$ влечет непрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow C(Y, Z)$.

Определение. Топологическая структура τ на $X \times Y$ называется *Z-совместно непрерывной*, если непрерывность отображения $G : X \longrightarrow C(Y, Z)$ влечет непрерывность соответствующего отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z$.

Понятия расщепляющих топологических структур и совместно непрерывных топологических структур как для произведений, так и для множеств непрерывных отображений топологических пространств, являются основой теории, элементы которой излагаются в настоящей главе.

Замечание. Соответствующие определения для пространств сходимости направленностей получаются простой заменой терминов.

§1. Топологические структуры на множествах отображений

1. Отображение вычисления. В первой части книги (глава III, параграф 3) мы рассмотрели множество $C(Y, Z)$ всех непрерывных отображений топологического пространства Y в топологическое пространство Z, отображение вычисления

$$E : C(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z,\ E(f, y) = f(y),\ f \in C(Y, Z),\ y \in Y,$$

допустимые топологические структуры на множестве $C(Y, Z)$, для которых отображение E непрерывно, и проблему существования минимальной допустимой топологической структуры на $C(Y, Z)$. Там же был отмечен известный факт, что в топологических структурах эта проблема не решается. Оказалось, что эта проблема разрешима в структурах сходимости.

Условие допустимости отображения вычисления E формулируется в сходимостях следующим образом:
если направленность $((f_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ сходится к (f, y), то $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ сходится к $f(y)$. Так как в прямом произведении $C(Y, Z) \times Y$ сходимость

$$((f_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow (f, y)$$

эквивалентна паре сходимостей

$$(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f,\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow y,$$

то рассматриваемое нами условие допустимости можно сформулировать через сходимости в $C(Y,Z)$, Y, Z, а именно,
если $(f_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f$ и $(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow y$, то $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f(y)$.

Определение. Будем говорить, что сходимость $(f_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f$ допустима в $C(Y,Z)$, если для любой сходимости $(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow y$ в Y имеет место сходимость $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f(y)$ в Z.

Минимальная допустимая структура сходимости на $C(Y,Z)$ определяется некоторой совокупностью допустимых сходимостей. В действительности она определяется *совокупностью всех допустимых сходимостей.* Наша ближайшая цель – доказать, что *минимальная допустимая структура сходимости на $C(Y,Z)$ всегда существует.*

Определение. Пусть X – некоторое множество. *Квазитопологической в узком смысле* сходимостью направленностей в X называется структура сходимости, удовлетворяющая следующим условиям:
1. Если направленность $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ стационарна и $x_\lambda=x$ для всех $\lambda\geq\lambda_0$ и некоторого $\lambda_0\in\Lambda$, то она сходится x (аксиома стационарности).
2. Если $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda')$ – конфинальная часть направленности $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)$, сходящейся к x, то $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda')\longrightarrow x$ (аксиома конфинальности).
3. Если $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ конфинальна по носителям сходящейся к x ее конфинальной части, то она также сходится к x (аксиома особой конфинальности по носителям).

Теорема. *Для любых конфинальных в особом смысле структур сходимости на Y и на Z существует на $C(Y,Z)$ минимальная допустимая конфинальная в особом смысле структура сходимости.*

Доказательство. Рассмотрим на $C(Y,Z)$ совокупность сходимостей $(f_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f$, для которых выполняется следующее условие:
для любой сходимости $(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow y$ в Y имеет место сходимость $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f(y)$ в Z.

Выполнение аксиомы стационарности для так определенной сходимости следует из непрерывности всех отображений $f:Y\longrightarrow Z$. Действительно, если $f_\lambda=f$ для всех λ больших чем некоторое $\lambda_0\in\Lambda$ и $(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow y$, то $f_\lambda(y_\lambda)=f(y_\lambda)$ для

$\lambda > \lambda_0$, откуда и следует доказываемая сходимость. Проверим теперь выполнение аксиомы конфинальности и аксиомы простой конфинальности по носителям.

Пусть Λ' является конфинальной частью направленного упорядоченного множества Λ и направленность $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям направленности $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda')$. Нам надо доказать, что тогда из сходимости $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f$ следует сходимость $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow f$ и из сходимости $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow f$ следует сходимость $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f$. Для этого мы сначала вложим каждую направленность $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ точек множества Y в некоторую направленность $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ так, что она будет конфинальна по носителям к исходной направленности. Это вложение можно осуществить следующим образом.

Так как Λ' конфинальна Λ, то каждому $\lambda \in \Lambda$ можно сопоставить такое $\lambda'(\lambda) \in \Lambda'$, что $\lambda'(\lambda) \geq \lambda$. При этом каждому индексу из λ' сопоставляется он сам. Мы можем теперь *продолжить направленность* $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ до направленности $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ положив $y_\lambda = y_{\lambda'(\lambda)}$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. По построению направленность $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям направленности $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ и поэтому обе направленности одновременно сходятся в Y к некоторой точке y или одновременно не сходятся.

Докажем, что из сходимости
$(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f$ следует сходимость
$(f_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow f$.

Для этого нам надо доказать, что в рассматриваемой ситуации для любой сходимости $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow y$ имеет место сходимость $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow f(y)$.

Пусть $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ – некоторое продолжение направленности $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda')$. Так как $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow y$, то и $(f(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y)$, а поэтому и $(f(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y)$. Тем самым доказано, что $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow f$.

Докажем теперь, что из сходимости
$(f_\lambda|\lambda \in \Lambda') \longrightarrow f$ следует сходимость
$(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f$.

Для этого нам надо доказать, что в рассматриваемой ситуации для любой сходимости $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow y$ имеет место сходимость $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y)$. Заметим, что по условию теоремы, направленность $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям направленности $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda')$. Отсюда еще не следует, что направленность $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям направленности $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda')$. Дело в том, что направленность $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ произвольна, она не обязательно конфинальна по носителям направленности $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda')$. Поэтому приходится использовать другое рассуждение.

Пользуясь тем, что $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям направленности $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ мы заменить индексы из Λ на индексы из некоторой конфинальной направленного множества Λ', как для f_λ так и для y_λ и таким образом доказать требуемую сходимость $(f(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y)$.

Замечание. Если квазитопологии на Y и Z определены некоторыми топологическими структурами, то минимальная допустимая квазитопология на $C(Y, Z)$ существует в более широком классе структур. Достаточно, например, выполнения в этом классе следующего ослабления аксиомы 2:
(аксиома конфинальности) если направленность $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ является конфинальной частью направленности $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, сходящейся к f, то она также сходится к f.

2. Две специальные топологии пространств отображений. Широко используются две специальные топологии пространств отображений, а именно топология поточечной сходимости и компактно открытая топология. Первая из них обычно определяется в терминах сходимости, а вторая – заданием соответствующей базы открытых множеств.

Определение. Сходимость $(f_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow f$ на множестве $C(Y, Z)$ непрерывных отображений топологического пространства Y в топологическое пространство Z называется *поточечной сходимостью*, если

$$(f_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow f \iff (f_\xi(y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow f(y)$$

для каждой точки $y \in Y$.

Совокупность всех поточечных сходимостей удовлетворяет, как нетрудно доказать, всем аксиомам сходимости и потому определяет на $C(Y, Z)$ *топологическую структуру поточечной сходимости.*

Определение. Топологическая структура на множестве $C(Y, Z)$, определенная базой открытых множеств, состоящей из множеств

$U(C, G) = \{f | f(C) \subset G\}$, образуемых по всем компактным множествам C из Y и всем открытым множествам G пространства Z, называется компактно открытой топологией на $C(Y, Z)$.

Нам понадобится еще одна топологизация, совпадающая с компактно открытой, для "достаточно хороших" топологических пространств Y.

Определение. Будем говорить, что на $C(Y, Z)$ определена сходимость по направленностям, если для этой сходимости $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f$ тогда и только тогда, когда $(f_\lambda(y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y)$ для любой сходимости $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow y$.

Теорема. *Компактно открытая топология на $C(Y, Z)$ является топологической структурой сходимости по направленностям, если Y – локально компактное пространство.*

Доказательство. Пусть $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f)$ в компактно открытой топологии, y – произвольная точка пространства Y, W – произвольная окрестность точки $f(y)$. В силу непрерывности отображения f, найдется такая окрестность V точки y, что $f(V) \subset W$, а в силу локальной компактности пространства Y, найдется окрестность точки y, компактное замыкание которой V_c содержится в V. Тогда множество $U(V_c, W)$ будет окрестностью отображения f, поэтому найдется такое λ_0, что $f_\lambda \in U(V_c, W)$ для всех $\lambda > \lambda_0$. Рассмотрим произвольную сходимость $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow y$. Без нарушения общности можно считать, что $y_\lambda \in V_c$ для всех $\lambda > \lambda_0$ и поэтому $f_\lambda(y_\lambda) \in W$ для всех $\lambda > \lambda_0$. Так как W произвольная окрестность точки $f(y)$ в Z, то тем самым доказано, что $(f_\lambda(y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y))$. С другой стороны, так как сходимость $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow y$ при фиксированном y произвольна, то тем самым доказана сходимость $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f)$ по направленностям.

Нам придется несколько расширить понятие допустимости топологической структуры на $C(Y.Z)$.

Определение. Топологическую структуру на $C(Y, Z)$ будем называть *слабо допустимой*, если отображение вычисления $E(f, y) = f(y)$ непрерывно по f для любого фиксированного $y \in Y$.

Теорема. *Топология поточечной сходимости является слабо допустимой на $C(Y, Z)$ топологической структурой.*

Доказательство. Пусть y – произвольная точка топологического пространства Y и $p_y : C(Y, Z) \longrightarrow Z$, $p_y(f) = f(y)$. Нам надо доказать, что p_y является непрерывным отображением. Рассмотрим произвольную направленную систему $(f_\xi|\xi \in \Xi)$ в $C(Y, Z)$, сходящуюся к некоторой точке f. По определению отображения p_y, мы имеем $p_y(f_\xi) = f_\xi(y)$ и $p_y(f) = f(y)$. Но $(f_\xi(y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow f(y) \in Z$ в силу поточечной сходимости в $C(Y, Z)$, и поэтому $(p_y(f_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow p_y(f)$. Мы доказали, тем самым, непрерывность отображения p_y. Теорема доказана.

Теорема. *Компактно открытая топология является слабо допустимой в $C(Y, Z)$ топологической структурой.*

Доказательство. Пусть y – произвольная точка топологического пространства Y и $p_y : C(Y, Z) \longrightarrow Z$, $p_y(f) = f(y)$. Нам надо доказать, что p_y является непрерывным отображением. Рассмотрим произвольное открытое множество U топологического пространства Y. Так как $p_y^{-1}(U) = \{f|p_y(f) = f(y) \in U\} = \mathcal{U}(\{y\}, U)$ – базисное открытое множество в компактно открытой топологии на $C(Y, Z)$, а U – произвольное открытое в Z множество, то p_y – непрерывное отображение.

3. Классические свойства. В классической теории (Георгиу, Илиадис, Пападопулос, 1993) расщепляющих и совместно непрерывных топологических структур на $C(Y, Z)$ рассматриваются не фиксированные пространства X, а те или иные их классы $\mathcal{A}$, а на множестве $X \times Y$ рассматривается только структура прямого произведения. При этом, вместо понятия X-расщепляющих топологических структур рассматривались $\mathcal{A}$-расщепляющие топологические структуры и $\mathcal{A}$-совместно непрерывные топологические структуры. Приведем некоторые свойства понятия $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структуры и понятия $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структуры на $C(Y, Z)$.

Теорема. *Пусть τ_1, τ_2 – топологические структуры на $C(Y, Z)$ и $\tau_1 \subset \tau_2$. Если τ_2 является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой, то τ_1 также будет $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой, если же τ_1 является $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой, то и τ_2 будет $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой.*

Доказательство. Если $\tau_1 \subset \tau_2$ и отображение $G : X \longrightarrow C(Y, Z)_{\tau_2}$ непрерывно, то тем более непрерывно отображение $G : X \longrightarrow$

$C(Y,Z)_{\tau_1}$. С другой стороны с расширением топологической структуры τ на множестве $C(Y,Z)$ система топологических пространств X, для которых отображение $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_\tau$ непрерывно, сужается и поэтому, если из непрерывности отображения $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_{\tau_1}$ следует непрерывность соответствующего G отображения $F : X \times Y \longrightarrow C(Y,Z)$, то тем более из непрерывности отображения $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_{\tau_2}$ следует непрерывность соответствующего G отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ – системы топологических пространств и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Если τ является $\mathcal{A}_2$-расщепляющей топологической структурой на $C(Y,Z)$ или $\mathcal{A}_2$-совместно непрерывной топологической структурой на $C(Y,Z)$, то τ также будет $\mathcal{A}_1$-расщепляющей топологической структурой на $C(Y,Z)$ или, соответственно, $\mathcal{A}_1$-совместно непрерывной топологической структурой на $C(Y,Z)$.*

Доказательство. Аналогично предыдущему.

Рассмотрим теперь следующее важное свойство.

Теорема. *Для каждой системы $\mathcal{A}$ существует наибольшая $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $C(Y,Z)$.*

Доказательство. Следует из того, что объединение $\mathcal{A}$-расщепляющих топологических структур на $C(Y,Z)$ является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структуры.

Эту топологическую структуру мы будем обозначать через $\tau(\mathcal{A})$.

Замечание. Наименьшая $\mathcal{A}$-совместно непрерывная топологическая структура на $C(Y,Z)$ не всегда существует. Дело в том, что случае предыдущей теоремы, мы ищем наибольшую топологическую структуру τ на $C(Y,Z)$ для которой каждое отображение

$$G : X \longrightarrow C(Y,Z))_\tau$$

из некоторой системы отображений непрерывно. Во втором же случае мы ищем наименьшую топологическую структуру τ на $C(Y,Z)$, для которой каждое отображение

$$G : X \longrightarrow C(Y,Z)_\tau$$

из некоторой системы отображений не является непрерывным отображением. Такая топологическая структура не обязательно существует.

Наибольшая $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $C(Y,Z)$ обладает важным свойством, которое мы назовем *почти мультипликативностью по второму аргументу.* Это свойство состоит в следующем:

Пусть $Z = \prod Z_\xi|\xi \in \Xi$, $\tau(\mathcal{A})$ – наибольшая $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $C(Y,Z)$, $\tau_\xi(\mathcal{A})$ – наибольшая $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $C(Y,Z_\xi)$ для каждого $\xi \in \Xi$, $\tau = \prod \tau_\xi(\mathcal{A})|\xi \in \Xi$ – топологическая структура на множестве $C(Y,Z) = \prod C(Y,Z_\xi)|\xi \in \Xi$. Тогда $\tau \subset \tau(\mathcal{A})$.

Теорема. *Топологическая структура $\tau(\mathcal{A})$ на $C(Y,Z)$ почти мультипликативна по второму аргументу.*

Доказательство. Пусть $Z = \prod Z_\xi|\xi \in \Xi$, $F_\xi : X \times Y \longrightarrow Z_\xi$, $G_\xi : X \longrightarrow C(Y,Z_\xi)$ – соответствующие друг другу непрерывные отображения для каждого $\xi \in \Xi$, то есть $F_\xi(x,y) = G_\xi(x)(y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, $X \in \mathcal{A}$. Тогда отображения $F = (F_\xi|\xi \in \Xi)$ и $G = (G_\xi|\xi \in \Xi)$ также соответствуют друг другу, так как $F(x,y) = (F_\xi(x,y)|\xi \in \Xi) = (G_\xi(x)(y)|\xi \in \Xi) = G(x)(y)$. Пусть $\tau = \prod \tau_\xi(\mathcal{A})|\xi \in \Xi$ – топологическая структура на множестве $C(Y,Z) = \prod C(Y,Z_\xi)|\xi \in \Xi$. Тогда, если $F : X \times Y \longrightarrow Z$ – непрерывно, то все $F_\xi : X \times Y \longrightarrow Z_\xi$ непрерывны и потому все $G_\xi : X \longrightarrow C(Y,Z_\xi)$ непрерывны, то есть $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_\tau$ непрерывно. Но это и означает, что $\tau \subset \tau(\mathcal{A})$. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно привести пример, показывающий, что включение $\tau \subset \tau(\mathcal{A})$ может быть строгим включением.

Пример. Пусть X, $X \times Y$ и Y – связные топологические пространства, а Z_n – дискретные двоеточия, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $Z = \prod Z_n|n \in \mathbb{N}$ – вполне несвязное пространство, поэтому каждое непрерывное отображение $F : X \times Y \longrightarrow Z$ является постоянным отображением, следовательно соответствующее ему отображение $G : X \longrightarrow C(Y,Z)$ также является постоянным отображением и потому $\tau(X)$ – дискретная топологическая структура. С другой стороны, $\prod C(Y,Z_n)$ не является дискретным топологическим пространством, и поэтому его топологическая структура строго содержится в $\tau(X)$.

4. Теорема эквивалентности.

Определение. Системы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называют эквивалентными ($\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$), если любая топологическая структура τ на $C(Y,Z)$ является $\mathcal{A}_1$-расщепляющей ($\mathcal{A}_1$-совместно непрерывной) тогда и только тогда, когда τ является $\mathcal{A}_2$- расщепляющей ($\mathcal{A}_2$-совместно непрерывной) топологической структурой, соответственно.

Теорема. *Для каждой системы $\mathcal{A}$ топологических пространств X существует топологическое пространство $X(\mathcal{A})$, не обязательно принадлежащее $\mathcal{A}$, такое, что $\mathcal{A} \sim \{X(\mathcal{A})\}$.*

Доказательство. Пусть T^{sp} – множество всех топологических структур на $C(Y,Z)$, не являющихся $\mathcal{A}$-расщепляющими структурами, T^{jc} – множество всех топологических структур на $C(Y,Z)$, не явлющихся $\mathcal{A}$-совместно непрерывными структурами, A^{sp}_τ – элемент из $\mathcal{A}$ определенный для каждого $\tau \in T^{sp}$ такой, что τ не является A^{sp}_τ-расщепляющей структурой, A^{jc}_τ – элемент из $\mathcal{A}$ определенный для каждого $\tau \in T^{jc}$ такой, что τ не является A^{jc}_τ-совместно непрерывной структурой. Пусть далее

$$\mathcal{A}_0 = \{A^{sp}_\tau | \tau \in T^{sp}\} \cup \{A^{jc}_\tau | \tau \in T^{jc}\}$$

Мы можем, конечно, считать, что все топологические пространства фигурирующие в $\mathcal{A}_0$ не имеют общих точек.

Пусть $A(\mathcal{A})$ – свободное объединение всех $A \in \mathcal{A}_0$, то есть пара X, $X \times Y$, где X – свободное объединение всех X_A и $X \times Y$ – свободное объединение всех $(X \times Y)_A$, $A \in \mathcal{A}_0$, $F : X \times Y \longrightarrow Z$, F_A – ограничение F на $(X \times Y)_A$. Нетрудно заметить, что отображение $G_A : X_A \longrightarrow C(Y,Z)$, соответствующее F_A, будет ограничением отображения G, соответствующего отображению F. Докажем теперь, что $\mathcal{A} \sim \{A(\mathcal{A})\}$.

Пусть τ является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $C(Y,Z)$ и $F : X \times Y \longrightarrow Z$ – непрерывное отображение. Тогда F_A также непрерывное отображение, и так как τ является $\mathcal{A}$-расщепляющим отображением, отображение G_A будет непрерывным отображением для каждого $A \in \mathcal{A}_0$, следовательно G будет непрерывным отображением. Но это означает, что τ является $A(\mathcal{A}_0)$-расщепляющей топологической структурой.

Пусть теперь τ не является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $C(Y,Z)$, то есть $\tau \in T^{sp}$. Это означает, что τ не является A^{sp}_τ-расщепляющей топологической структурой, то есть существует непрерывное отображение $F_{A_\tau^{sp}}$ для которого $G_{A_\tau^{sp}}$ не является непрерывным отображением. Мы можем продолжить $F_{A_\tau^{sp}}$ на $X \times Y$ произвольно, получив отображение $F : X \times Y \longrightarrow Z$. Нетрудно заметить теперь, что соответствующее отображение $G : X \longrightarrow C(Y, Z)$ не будет непрерывным. Это означает, что τ не является $A(\mathcal{A})$-расщепляющей топологической структурой.

Аналогичным рассуждением можно доказать, что каждая топологическая структура τ на $C(Y, Z)$ является $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой тогда и только тогда, когда τ является $A(\mathcal{A})$-совместно непрерывной топологической структурой.

Только что доказанная теорема имеет большое значение. Она позволяет свести проблему исследования всех $\mathcal{A}$-расщепляющих и $\mathcal{A}$-совместно непрерывных топологических структур к проблеме исследования X-расщепляющих и X-совместно непрерывных топологических структур. Таким образом в классической теории достаточно рассматривать X-расщепляющие и X-совместно непрерывные топологические структуры на $C(Y, Z)$ для произвольно фиксированных X, Y, Z.

§2. Топологические структуры на произведениях

В классической теории расщепляющие и совместно непрерывные топологических структуры определялись только для $C(Y, Z)$, причем на $X \times Y$ для всех $X \in \mathcal{A}$ фиксировалась топологическая структура прямого произведения. Мы привели классическую теорему эквивалентности, позволяющую ограничиться одноэлементными классами $\mathcal{A}$, то есть строить эту теорию только для троек X, Y, Z. Мы докажем в этом параграфе, что аналогичная теория может быть построена и для $X \times Y$ с той разницей, что на $C(Y, Z)$ рассматривается не некоторая стандартная, а различные топологические структуры.

1. Основные понятия. При изучении расщепляющих и совместно непрерывных топологических структур на произведениях $X \times Y$ мы должны будем рассматривать различные допустимые топологические структуры на $C(Y, Z)$. Таким образом, недостаточно фиксировать тройку X, Y, Z, надо еще фиксировать топологическую структуру на $C(Y, Z)$. В общем случае, следует рассматривать системы $\mathcal{A}$ пар $C(Y, Z)$, Z топологических пространств.

Здесь для каждого $A \in \mathcal{A}$ определено топологическое пространство $C(Y,Z)_A$ и топологическое пространство Z_A.

Определение. Топологическая структура τ на $X \times Y$ называется $\mathcal{A}$-расщепляющей, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ непрерывность отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z_A$ влечет непрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_A$.

Определение. Топологическая структура τ на $X \times Y$ называется $\mathcal{A}$-совместно непрерывной, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ непрерывность отображения $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_A$ влечет непрерывность соответствующего отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z_A$.

2. Две специальные топологии произведений. Широко используются две специальные топологии произведений, а именно топология сходимости направленных систем, стационарных по одной из координат, и топология обычного произведения. Первая из них обычно определяется базовыми сходимостями, а вторая – заданием соответствующей базы открытых множеств.

Определение. Пусть X и Y – топологические пространства. Будем говорить, что направленная система $((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi)$ стабилизируется по одной из координат, например, по координате x, если $x_\xi = x_{\xi_0}$, начиная с некоторого $\xi_0 \in \Xi$. Сходимость $((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x,y)$ будем называть сходимостью стационарной по одной из координат, если $((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi)$ стабилизируется по одной из координат. Топологическую структуру на $X \times Y$, определяемую такой сходимостью, будем называть покоординатным произведением.

3. Основные свойства. Рассмотрим теперь некоторые свойства $\mathcal{A}$-расщепляющих топологических структур и $\mathcal{A}$-совместно непрерывных топологических структур на множестве $X \times Y$. Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств структур на множестве $C(Y,Z)$.

Пусть τ_1, τ_2 – топологические структуры на множестве $X \times Y$ и $\tau_1 \subset \tau_2$. Если τ_2 является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$, то τ_1 также будет $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$, если же τ_1 является $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$, то τ_2 будет $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$.

Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ – семейства пар топологических пространств $C(Y, Z)$, Z при фиксированном топологическом пространстве Y и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Если τ является $\mathcal{A}_2$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$ или $\mathcal{A}_2$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$, то τ будет $\mathcal{A}_1$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$ или $\mathcal{A}_1$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$, соответственно. Рассмотрим теперь следующее важное свойство.

Для каждой системы $\mathcal{A}$ пар $C(Y, Z)$, Z топологических пространств существует наименьшая $\mathcal{A}$-совместно непрерывная топологическая структура на $X \times Y$, обозначаемая через $\tau(\mathcal{A})$.

Наибольшая $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $X \times Y$ не обязательно существует.

Имеет место здесь и двойственный аналог понятия почти мультипликативности и связанной с этим понятием аналог теоремы предыдущего параграфа, но они оказываются совершенно тривиальными. Дело в том, что любая допустимая топологогическая структура на $X \times Y$ содержится в допустимой свободно аддитивной по первому аргументу топологической структуре на $X \times Y$. Эта свободно аддитивная топологическая структура получается присоединением к исходной топологической структуре множеств $U \times Y$, взятых по всем открыто замкнутым в X множествам U.

4. Теорема эквивалентности. Мы назовем системы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ эквивалентными ($\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$) если любая топологическая структура τ на $X \times Y$ является $\mathcal{A}_1$-расщепляющей или $\mathcal{A}_1$-совместно непрерывной тогда и только тогда, когда τ является $\mathcal{A}_2$-расщепляющей или $\mathcal{A}_2$-совместно непрерывной топологической структурой, соответственно.

Теорема. *Для каждой системы $\mathcal{A}$ пар $C(Y, Z)$, Z топологических пространств существует пара $A(\mathcal{A})$, не обязательно принадлежащая $\mathcal{A}$, такая, что $\mathcal{A} \sim \{A(\mathcal{A})\}$.*

Доказательство. Пусть T^{sp} – множество всех топологических структур на множестве $X \times Y$, не являющихся $\mathcal{A}$-расщепляющими топологическими структурами и T^{jc} – множество всех топологических структур на $X \times Y$, не являющихся $\mathcal{A}$-совместно непрерывными топологическими структурами, A_τ^{sp} – элемент из $\mathcal{A}$ определенный для каждого $\tau \in T^{sp}$ такой, что τ не является A_τ^{sp}-

расщепляющей топологической структурой, A_τ^{jc} – элемент из $\mathcal{A}$ определенный для каждого $\tau \in T^{jc}$ такой, что τ не является A_τ^{jc}-совместно непрерывной топологической структурой,

$$\mathcal{A}_0 = \{A_\tau^{sp} | \tau \in T^{sp}\} \cup \{A_\tau^{jc} | \tau \in T^{jc}\}$$

Пусть $A(\mathcal{A})$ – прямое произведение всех элементов из $\mathcal{A}_0$, то есть пара $C(Y,Z)$, Z, где $C(Y,Z)$ – произведение всех $C(Y,Z)_A$ и Z – произведение всех Z_A, $A \in \mathcal{A}_0$, $F : X \times Y \longrightarrow Z$, F_A – проекция F на Z_A. Нетрудно заметить, что отображение $G_A : X \longrightarrow C(Y,Z)_A$ является проекцией на $C(Y,Z)_A$ отображения G, соответствующего отображению F. Докажем, что $\mathcal{A} \sim \{A(\mathcal{A})\}$.

Пусть τ является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$ и $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z$ – непрерывное отображение. Тогда F_A будет непрерывным отображеним. Так как τ является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой, то G_A – непрерывное отображение для каждого $A \in \mathcal{A}_0$, следовательно, $G = (G_A | A \in \mathcal{A}_0)$ будет также непрерывным отображением. Но это означает, что τ является $A(\mathcal{A}_0)$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$.

Пусть, теперь, τ не является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$, то есть $\tau \in T^{sp}$. Тогда τ не является Z_τ^{sp}-расщепляющей топологической структурой, то есть существует непрерывное отображение $F_{Z_\tau^{sp}}$, для которого $G_{Z_\tau^{sp}}$ не непрерывно. Мы можем провести $F_{Z_\tau^{sp}}$ через Z и получить отображение $F : X \times Y \longrightarrow Z$. Нетрудно заметить, что соответствующее отображение $G : X \longrightarrow C(Y,Z)$ не будет непрерывным отображением. Но это означает, что τ не является $A(\mathcal{A})$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$.

Таким же образом мы можем доказать, что каждая топологическая структура τ на $X \times Y$ является $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой тогда и только тогда, когда она является $A(\mathcal{A})$-совместно непрерывной топологической структурой.

Только что доказанная теорема имеет большое значение. Она сводит проблему изучения всех $\mathcal{A}$-расщепляющих и всех $\mathcal{A}$-совместно непрерывных топологических структур на $X \times Y$ к частной проблеме изучения A-расщепляющих и A-совместно непрерывных топологических структур, то есть к специальной проблеме исследования троек X, Y, Z.

§3. Топологические структуры на произведениях и на пространствах отображений

1. Двойственные топологические структуры. До сих пор мы рассматривали отдельно топологические структуры на пространствах отображений и топологические структуры на произведениях. Теперь мы будем рассматривать эти структуры совместно, в рамках единой теории. В предыдущих параграфах мы рассматривали максимально общую ситуацию, в частности системы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$, состоящие из пар X, $X \times Y$ и, соответственно, пар $C(Y,Z)$, Z. Вместе с тем было доказано там, что общий случай сводится к предельно частному случаю, в котором системы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$ одноэлементны, то есть к рассмотрению троек X, Y, Z. В соответствии с этим мы будем рассматривать в дальнейшем тройки X, Y, Z топологических пространств, топологические структуры на произведениях $X \times Y$, топологические структуры на $C(Y,Z)$ и взаимную связь между ними в рамках единой теории. Для произвольно фиксированной тройки X, Y, Z топологических пространств мы будем рассматривать Z-совместно непрерывные топологические структуры на произведении $X \times Y$ и X-расщепляющие топологические структуры на $C(Y,Z)$. Если τ является топологической структурой на $C(Y,Z)$, то τ^* *будет обозначать наименьшую Z-совместно непрерывную структуру на $X \times Y$*. С другой стороны, если τ является топологической структурой на $X \times Y$, то τ_* *будет обозначать наибольшую X-расщепляющую топологическую структуру на $C(Y,Z)$*. Топологические структуры τ и τ_* и, аналогично, топологические структуры τ и τ^* будем называть *сопряженными*. Заметим, что *отношение сопряженности в общем случае не симметрично, двойственность есть взаимная сопряженность.*

Отношение сопряженности обладает следующим важным свойством:

Если τ, τ' – топологические структуры на $X \times Y$ и $\tau \subset \tau'$, то $\tau'_* \subset \tau_*$, аналогично если τ, τ' – топологические структуры на $C(Y,Z)$ и $\tau \subset \tau'$, то $\tau'^* \subset \tau^*$.

Это следует из того, что при расширении топологической структуры на $X \times Y$ множество непрерывных отображений $F : X \times Y \longrightarrow Z$ и соответствующих им отображений $G : X \longrightarrow C(Y,Z)$ расширяются и потому сужается максимальная топологическая структура на $C(Y,Z)$, при которой все эти отображения G непрерывны. С другой стороны, при расширении топологической структуры на $C(Y,Z)$ множество непрерывных отображений $G : X \longrightarrow C(Y,Z)$ и соответствующих им отображений $F : X\times Y \longrightarrow Z$ сужаются и потому сужается минимальная топологическая структура на $X\times Y$, при которой все эти отображения F непрерывны.

2. Теорема существования. Мы можем начать с некоторой топологической структуры τ на $C(Y,Z)$, затем перейти к наименьшей $(C(Y,Z))_\tau$-совместно непрерывной топологической структуре τ^* на $X\times Y$ и после этого к наибольшей $(X\times Y)_{\tau^*}$-расщепляющей топологической структуре $(\tau^*)_*$ на $C(Y,Z)$. Нетрудно заметить, что имеет место следующее соотношение:

$$(\tau^*)_* \subset \tau.$$

Действительно, τ^* является наименьшей топологической структурой на $X\times Y$, для которой некоторая система отображений $F : (X\times Y)_{\tau^*} \longrightarrow Z$ состоит из непрерывных отображений. Это как раз те отображения, которые соответствуют непрерывным отображениям $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_\tau$. Но вполне возможно, что эта система не исчерпывает множество всех непрерывных отображений $F : (X\times Y)_{\tau^*} \longrightarrow Z$, следовательно множество непрерывных отображений $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_{(\tau^*)_*}$ содержит множество всех непрерывных отображений $G : X \longrightarrow C(Y,Z)_\tau$. Итак $(\tau^*)_* \subset \tau$. Точно так же доказывается соотношение

$$\tau \subset (\tau_*)^*.$$

В частности может оказаться, что $(\tau^*)_* = \tau$. Обозначим в этом случае τ^* через $\overline{\tau}$ и τ через $\underline{\tau}$. Тогда исходное равенство переходит в равенство

$$\overline{\tau}_* = \underline{\tau}$$

С другой стороны, в этих обозначениях мы имеем соотношения $\overline{\tau} = \tau^* = \underline{\tau}^*$,

$$\underline{\tau}^* = \overline{\tau}.$$

Рассмотрим теперь случай $\tau = (\tau_*)^*$. Обозначим в этом случае τ_* через $\underline{\tau}$ и τ через $\overline{\tau}$. Тогда исходное неравенство примет следующий вид

$$\underline{\tau}^* = \overline{\tau}.$$

С другой стороны, в этих обозначениях мы имеем соотношения $\underline{\tau} = \tau_* = \overline{\tau}_*$, то есть

$$\overline{\tau}_* = \underline{\tau}.$$

Таким образом в обоих случаях мы приходим к идентичным соотношениям

$$\underline{\tau}^* = \overline{\tau}, \ \overline{\tau}_* = \underline{\tau}.$$

Топологическую структуру $\overline{\tau}$ на $X \times Y$ и топологическую структуру $\underline{\tau}$ на $C(Y, Z)$, для которых эти соотношения имеют место мы будем называть *двойственными друг другу*. Оказывается верным следующее утверждение.

Теорема. *Для любой тройки X, Y, Z топологических пространств существуют двойственные друг другу топологические структуры $\overline{\tau}$ на $X \times Y$ и $\underline{\tau}$ на $C(Y, Z)$.*

Доказательство. Пусть τ – произвольная топологическая структура на $C(Y, Z)$, тогда $(\tau^*)_* \subset \tau$. Если при этом $(\tau^*)_* = \tau$ то мы уже нашли двойственные топологические структуры τ^* и τ, если же включение строгое, то мы можем рассмотреть включение $(((\tau^*)_*)^*)_* \subset (\tau^*)_* \subset \tau$ или в других обозначениях $(\tau_1^*)_* \subset \tau_1 \subset \tau$. Если последнее включение не строгое, то есть $(\tau_1^*)_* = \tau_1$, то мы нашли двойственные друг другу топологические структуры $(\tau_1^*)_*$ и τ_1, если же включение строгое, то мы продолжим этот процесс, последовательно строя топологические структуры $\tau, \ \tau_1, \ \ldots, \ \tau_n, \ \ldots$. Если такая последовательность оказывается конечной, то есть $(\tau_n^*)_* = \tau_n$, то мы опять нашли двойственные топологические структуры $(\tau_n^*)_*$ и τ_n. Если же такая последовательность бесконечна, то мы можем образовать топологическую структуру $\tau_\omega = inf\{\tau_n | n \in \mathbb{N}\}$ и так далее по трансфинитной индукции. Такой процесс трансфинитного построения строго убывающих топологических структур на фиксированном множестве не может иметь слишком большую мощность и должен закончиться некоторой топологической структурой $\underline{\tau}$.В конечном счете, мы получим двойственные топологические структуры $\overline{\tau} = (\underline{\tau})^*$ и $\underline{\tau}$. Теорема доказана.

Замечание. Доказательство этой теоремы может быть сделано тривиальным, если мы начнем с тривиальной топологической структуры τ на $C(Y, Z)$. Тогда каждое отображение $G : X \longrightarrow$

$C(Y,Z)_\tau$ непрерывно, и следовательно, τ^* – наименьшая топологическая структура на $X \times Y$, для которой все отображения $F : (X \times Y)_{\tau^*} \longrightarrow Z$ непрерывны. Нетрудно доказать, что $\tau = (\tau^*)_*$, то есть τ и τ^* – –двойственные топологические структуры. Приведенное доказательство позволяет начинать с любой топологической структуры на $C(Y,Z)$.

Отношения сопряженности и тем более отношение двойственности между топологическими структурами на $X \times Y$ и топологическими структурами на $C(Y,Z)$ позволяют переходить от проблем касающихся топологических структур на $X \times Y$ к соответствующим проблемам, относящимся к топологическим структурам на $C(Y,Z)$ и обратно. Оба перехода (от топологических структур на $X \times Y$ к топологическим структурам на $C(Y,Z)$ и обратно) монотонно убывающие, то есть если $\tau_1 \subset \tau_2$, то $(\tau_2)^* \subset (\tau_1)^*$ или $(\tau_2)_* \subset (\tau_1)_*$.
Рассмотрим три примера двойственности топологических структур на $X \times Y$ и топологических структур на $C(Y,Z)$, где X, Y, Z - произвольные топологические пространства.

Пример 1. Определим на $X \times Y$ структуру произведения дискретной топологической структуры на X и исходной топологической структуры на Y, на $C(Y,Z)$ определим кодискретную топологическую структуру. Тогда эти структуры двойственны друг другу. Действительно, если F – непрерывное отображение, то и соответствующее ему отображение G – непрерывное отображение, в силу кодискретности топологической структуры на $C(Y,Z)$. С другой стороны, если G – непрерывное отображение, то для каждого $x \in X$ отображение $G(x) : Y \longrightarrow Z$ – непрерывное отображение и потому, по определению топологической структуры на $X \times Y$, соответствующее отображение F также непрерывно.

Пример 2. Введем на $X \times Y$, топологическую структуру, определенную сходимостями на горизонтальных и вертикальных множествах обычного произведения топологических пространств X и Y (в этой топологической структуре открыты все множества, пересечения которых со всеми горизонтальными и вертикальными множествами обычного произведения открыты). На $C(X,Y)$ введем структуру поточечной сходимости отображений (направленность (f_λ) сходится к f, если $(f_\lambda(y)) \longrightarrow f(y)$ для каждого $y \in Y$). Тогда эти структуры (мы обозначим их через $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$) двойственны друг другу. Действительно, отображение $F : (X \times Y)_{\overline{\mathcal{T}}} \longrightarrow Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любых сходимостей в X и Y $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ и $(y_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow y$ и, следовательно, сходимостей $((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow (x, y)$, $((x, y\xi)|\lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y)$ в $(X \times Y)_{\overline{\mathcal{T}}}$, имеют место сходимости $(F(x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda \longrightarrow F(x, y)$ и $(F(x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow F(x, y)$. Но эти условия эквивалентны условиям $(G(x_\lambda)(y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow G(x)(y)$ и $(G(x)(y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow G(x)(y)$ в Z, что дает нам непрерывность G и F в рассматриваемой ситуации.

Пример 3. Введем на $X \times Y$ структуру обычного произведения топологических пространств X и Y, на $C(Y, Z)$ введем *структуру равномерной сходимости*, определяемую сходимостями $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f \iff f_\lambda(y_\xi) \longrightarrow f(y)$, для любой сходимости $(y_\xi) \longrightarrow y$. Эти структуры двойственны друг другу. Действительно, отображение $F : (X \times Y)_{\overline{\mathcal{T}}} \longrightarrow Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любых сходимостей в X и Y $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ и $(y_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow y$ и, следовательно, сходимости $((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y)$, $((x_\lambda, y\xi)|\lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y)$ в $(X \times Y)_{\overline{\mathcal{T}}}$, имеют место сходимости $(F(x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda, \xi \in Xi) \longrightarrow F(x, y)$. Но это условие эквивалентно условию $(G(x_\lambda)(y_\xi))|\lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi) \longrightarrow G(x)(y)$ в $C(Y, Z)_{\underline{\mathcal{T}}}$, что означает непрерывность G и F в рассматриваемой ситуации.

Замечание. *Топологическая структура равномерной сходимости и компактно открытая топология на $C(Y, Z)$ тесно связаны друг с другом, как показывают следующие утверждения.*

Теорема. *Для произвольных топологических пространств Y и Z топологическая структура равномерной сходимости на $C(Y, Z)$ тоньше компактно открытой структуры.*

Доказательство. Допустим, что некоторая направленность $f_\lambda|\lambda \in \Lambda$ непрерывных отображений Y в Z не сходится к отображению $f : Y \longrightarrow Z$, то есть найдется такое компактное в Y множество K и открытое в Z множество V, что $f_\lambda(K) \not\subset V$ для сколь угодно больших λ. Без нарушения общности можно считать, что это имеет место для всех λ, то есть для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется такое $y_\lambda \in K$, что $f(y_\lambda)$ не содержится в V. Так как множество K компактно, то содержащееся в нем множество $K_0 = \mathrm{cl}\{y_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ также компактно, причем $f(K_0) \cap V = \emptyset$. Пусть y – произвольная точка множества K_0 и W – произвольная окрестность точки y в пространстве Y. Нас интересует упорядоченное множество $\Lambda(W) = (\lambda|\lambda \in \Lambda, y_\lambda \in W)$, порядок на котором индуцирован направленной системой Λ. Это упорядоченное множество может оказаться конфинальной частью системы Λ (будем говорить, что это первый случай), а может и не быть таковым (второй случай). Докажем, что найдется в K_0 такая точка y, что для любой ее окрестности имеет место первый случай. Действительно, допустим, что это не так, то есть для каждой точки $y \in K_0$ найдется ее окрестность W_y, для которой имеет место второй случай. Можно считать при этом, что все W_y являются открытыми в Y множествами. Тогда система $(W_y|y \in K_0)$ будет открытым покрытием множества K_0 и, в силу компактности K_0, она содержит его конечное покрытие $W_1, W_2, \dots, W_n$. Но тогда $\Lambda = \cup\Lambda(W_i)|i = 1, 2, \dots, n$, что невозможно, так как конечное объединение множеств, не являющихся конфинальными частями направленного множества, не является его конфинальной частью. Итак, мы можем считать, что для каждой окрестности некоторой точки $y_0 \in K_0$ имеет место первый случай. Образуем новое упорядоченное множество Ξ, состоящее из пар $\xi = (W, \lambda)$, где W – произвольная окрестность точки y_0, а $\lambda \in \Lambda(W)$. Положим $(W', \lambda') \leq (W, \lambda) \iff W' \subset W, \lambda' \leq \lambda$. Тогда Ξ будет, очевидно, направленным упорядоченным множеством. Образуем, теперь, направленность $(y_\xi|\xi = (W, \lambda), \lambda \in \Lambda(W), y_\xi = y_\lambda)$. Эта направленность сходится к y_0, так как любая окрестность W_0 точки y_0 содержит все точки y_ξ этой направленности для $\xi \leq \xi_0$, где $\xi_0 = (W_0, \lambda_0)$ для произвольно фиксированного $\lambda_0 \in \Lambda(W_0)$. Действительно, если $(W, \lambda) \leq (W_0, \lambda_0)$, то $W \subset W_0$ и $\lambda(W) \subset \lambda(W_0)$, поэтому из того, что $y_\xi \in W$, а $W \subset W_0$ следует $y_\xi \in W_0$.

Мы доказали, таким образом, что направленность $(y_\xi|\xi \in \Xi)$ сходится к y_0 и мы можем рассмотреть направленность $f_\lambda(y_\xi)|\lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi)$. Так как для каждого $\xi \in \Xi$, $\xi = (W, \lambda), y_\lambda \in W$, то $y_\xi \in K_0$ для каждого $\lambda \in \Lambda(W)$ и в этом случае $f(\lambda(y_\xi)) \notin V$. Но это означает, что $f_\lambda \not\longrightarrow f$. Мы доказали, таким образом, что в компактно открытой топологии имеется не меньше сходящихся направленностей, чем в топологии равномерной сходимости, следовательно топологическая структура равномерной сходимости содержит (тоньше) компактно открытую топологическую структуру.

Можно доказать при определенных условиях и обратное включение.

Теорема. *Для любого хаусдорфова локально компактного топологического пространства Y и произвольного топологического про-*

странства Z компактно отрытая структура на $C(Y,Z)$ тоньше, чем структура равномерной сходимости.

Доказательство. Пусть $(f_\lambda|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow f$ в компактно открытой топологии на $C(Y,Z)$, докажем, что эта направленность сходится и в топологии равномерной сходимости, то есть для любой сходимости $(y_\xi|\xi\in\Xi)\longrightarrow y$ в Y имеет место сходимость $(f_\lambda(y_\xi)|\lambda\in\Lambda,\xi\in\Xi)\longrightarrow f(y)$ в Z. Пусть $y\in Y$ и V – произвольная окрестность точки $f(y)$ в Z. В силу непрерывности отображения f найдется такая окрестность W точки y, что $f(W)\subset V$. Так как Y является хаусдорфовым локально компактным пространством, в окрестности W точки содержится ее компактная окрестность, поэтому, без нарушения общности, можно считать, что W является компактной окрестностью точки y. Так как $(y_\xi|\xi\in\Xi)\longrightarrow y$ в Y, найдется такое ξ_0, что $y_\xi\in W$ для всех $\xi\geq\xi_0$. С другой стороны, $f\in U(W,V)$, поэтому найдется такое λ_0, что $f_\lambda\in U(W,V)$ для всех $\lambda\geq\lambda_0$, то есть $f_\lambda(W)\subset V$ для всех $\lambda\geq\lambda_0$. Отсюда следует, что $f_\lambda(y_\xi)\in V$ для всех $\lambda\geq\lambda_0$ и одновременно $\xi\geq\xi_0$. Так как V – произвольно фиксированная окрестность, то это означает сходимость $f_\lambda(y_\xi)\longrightarrow f(y)$.

Из двух только что доказанных теорем вытекает следуэщее утверждение.

Теорема. *Если Y – хаусдорфово локально компактное а Z – произвольное топологическое пространство, то компактно открытая топология на $C(Y,Z)$ совпадает с топологической структурой равномерной сходимости.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущих теорем.

Мы уже упоминали о возможности применения сопряженности топологических структур на $X\times Y$ и на $C(Y,Z)$ (на множестве непрерывных отображений). Отметим теперь такую же возможность применения к пространствам $P_{\mathrm{cl}}Y$ замкнутых подмножеств.

Рассмотрим произвольную тройку $X,\ Y,\ Z$, где $Z=D$ – двухточечное множество $\{0,1\}$ с топологической структурой $\tau_r=\{\emptyset,\ D,\ \{0\}\}$. Нетрудно заметить, что точкам множества $C(Y,D)$ взаимно однозначно соответствуют точки множества $P_{\mathrm{cl}}Y$ всех замкнутых подмножеств множества Y. Каждому непрерывному отображению $f:Y\longrightarrow D$ соответствует при этом замкнутое в

Y множество $f^{-1}(1)$. Это позволяет нам использовать соотношения между топологическими структурами на $X \times Y$ и на $C(Y, D)$ для изучения соотношений между топологическими структурами на $X \times Y$ и на $P_{\mathrm{cl}}Y$. В конечном счете, это позволяет изучать различные пространства замкнутых множеств.

3. Общий подход и частные случаи. Понятия сопряженности и двойственности топологических структур на произведениях и множествах отображений были основаны на рассмотрении отображений

$$F : X \times Y \longrightarrow Z,$$

$$G : X \longrightarrow C(Y, Z),$$

соответствующих друг другу в том смысле, что $F(x.y) = G(x)(y)$. Перейдя от этих отображений и отображений принадлежащих к $C(Y, Z)$ к их графикам мы получим соотношения между множествами

$$\{(x, y, z)|((x, y), z) \in \Gamma_F\} = \{(x, y, z)|(x, (y, z)) \in \Gamma_{G'}\}$$

где $G'(x) = (y, G(x)(y)) \in \Gamma_{G(x)}$. Переход от отображений к их графикам позволяет заменять пары соответствующих друг другу отображений F, G подмножествами произведения $X \times Y \times Z$. Такой подход имеет преимущество наглядности и общности. Мы можем начать с произвольной системы подмножеств множества $X \times Y \times Z$, соответствующих парам F, G отображений, затем найти минимальную топологическую структуру на $X \times Y$ и максимальную топологическую структуру на $C(Y, Z)$, при которой все эти отображения F и G непрерывны. На этом, как мы увидим дальше, отыскание двойственных структур не кончается, так как появятся новые отображения F и G, непрерывные относительно этих топологических структур и необходимы будут новые изменения топологических структур на $X \times X$ и на $C(Y, Z)$ и так далее. Например всегда допустимы постоянные отображения $G : X \longrightarrow C(Y, Z)$. Им соответствуют отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$, для которых $z = F(x, y)$ не зависит от x, поэтому F-прообразы открытых в Z множеств являются произведениеми X на некоторые (не обязательно все!) открытые в Y множества.

Возможен еще более общий подход при котором допускаются и частичные многозначные отображения. Тогда исходная система подмножеств множества $X \times Y \times Z$ совершенно произвольна, но возникает проблема определения понятия непрерывности многозначного отображения. Эту проблему можно обойти, рассматривая произвольные, не обязательно непрерывные, отображения Y в Z, подобно тому как P-топологические структуры определяются на множестве произвольных, не обязательно замкнутых, подмножеств топологического пространства X.

Обычно Мы рассмотрим в дальнейшем некоторые частные случаи общей ситуации, а именно:
случай $Z = D$ – колмогоровское двоеточие,
случай $X = Y$,
случай $X = Y$, $Z = D$,
случай $X = Y = Z$,
случай $X = Y = Z = \mathbb{R}$,
случай $X = Y = Z = D$.
Каждый из этих случаев имеет свои особенности и свои возможности. Так в случае $Z = D$ появляется возможность изучения пространств (замкнутых) подмножеств, в случае $X = Y$ – возможность изучения битопологических пространств, в случае $X = Y$, $Z = D$ – возможность изучения связи между битопологическими пространствами и пространствами подмножеств, в случае $X = Y = Z = \mathbb{R}$ мы можем совместно изучать различные пространства вещественных функций и топологизации числовой плоскости. Каждое из этих направлений исследования выглядит перспективным и достойно особого исследования. Любой из последующих параграфов следует рассматривать лишь как введение в соответствующую теорию, не претендующее на систематичность изложения.

§4. Случай $Z = D$

1. Канонический гомеоморфизм между $C(Y,D)$ и $P_{\rm cl}Y$. Рассмотрим случай $Z = D$. Точками множества $C(Y,D)$ являются непрерывные отображения $f : Y \longrightarrow D$. Каждое такое отображение однозначно определяет замкнутое в Y множество $C = f^{-1}(1)$. Точками $P_{\rm cl}Y$ являются замкнутые в Y множества. Каждое такое множество C однозначно определяет непрерывное отображение $f : Y \longrightarrow D$, для которого $f^{-1}(1) = C$. Таким образом имеется каноническое взаимно однозначное соответствие между точками $f \in C(Y,D)$ и точками $C \in P_{\rm cl}Y$. Это соответствие позволяет канонически переносить топологические структуры с $C(Y,D)$

на $P_{\rm cl}Y$ и обратно. Рассматривая топологические пространства $C(Y,D)$ и $P_{\rm cl}Y$, мы всегда будем считать, что их топологические структуры канонически соответствуют друг другу.

Мы можем рассматривать теперь такие отображения F и G, что

$$F : X \times Y \longrightarrow D,$$
$$G : X \longrightarrow P_{\rm cl}Y,$$

где

$$F(x,y) = 1 \iff y \in G(x),$$

и строить на их основе, как теорию сопряженности соответствующих топологических структур, так и теорию их двойственности.

Можно заметить, что отображения F и G канонически определяются множеством $\mathcal{F} = F^{-1}(1) \subset X \times Y$, $G(x) = \{y|(x,y) \in \mathcal{F}\}$ для всех $x \in X$. С другой стороны $\mathcal{F} = \cup \mathcal{F}_x$ где $\mathcal{F}_x = \{x\} \times G(x)$, $x \in X$.

2. Некоторые специальные топологии на $P_{\rm cl}Y$. Мы уже рассматривали специальные топологии пространств отображений, а именно топологию поточечной сходимости и компактно открытую топологию.

Сходимость $(f_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow f$ на множестве $C(Y,Z)$ непрерывных отображений топологического пространства Y в топологическое пространство Z называлась *поточечной сходимостью*, если

$$(f_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow f \iff (f_\xi(y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow f(y)$$
$$\text{для каждой точки } y \in Y.$$

При каноническом переходе от $C(Y,D)$ к $P_{\rm cl}Y$ поточечные сходимости отображений переходят в поточечные сходимости замкнутых в Y множеств, а именно:

$$(f_\xi^{-1}(1)|\xi \in \Xi) \longrightarrow f^{-1}(1) \iff (f_\xi(y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow f(y)$$
$$\text{для каждой точки } y \in Y.$$

Если при этом $f(y) = 1$, то сходимость $(f_\xi(y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow f(y)$ вообще не является условием, так как в D любая направленная система точек сходится к точке 1, если же $f(y) = 0$, то

$$(f_\xi(y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow 0 \iff$$
$$\text{существует такое } \xi_0, \text{ что } f_\xi(y) = 0 \text{ для каждого } \xi \geqslant \xi_0.$$

Таким образом поточечная сходимость в $P_{\text{cl}}Y$ имеет следующий вид;

$$(C_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow C \iff$$
$$\text{для каждого } y \notin C \text{ существует такое } \xi_0, \text{ что } y \notin C_\xi$$
$$\text{для каждого } \xi \geqslant \xi_0.$$

Перейдем к компактно открытой топологии на $P_{\text{cl}}Y$.

Компактно открытая топология на множестве Y/Z непрерывных отображений топологического пространства Y в топологическое пространство Z определялась базой открытых множеств, состоящей из множеств $\mathcal{U}(C_c, U) = \{f|f(C_c) \subset U\}$, образованных по всем компактным множествам $C_c \subset Y$ и всем открытым множествам U пространства Z. В случае $Z = D$ единственным нетривиальным открытым в D множеством является множество $\{0\}$, поэтому сответствующая база открытых множеств будет состоять из множеств $\mathcal{U}(C_c, \{0\}) = \{f|f(C_c) = \{0\}\} = \{C|C = f^{-1}(1),\ C \cap C_c = \emptyset\} = \{C|C \subset U\}$, где $U = Y \setminus C_c$ – дополнение в Y до компактного множества, не обязательно открытое в Y множество.

Выше было доказано, что топология поточечной сходимости и компактно открытая топология являются допустимыми на $C(Y, Z)$ топологическими структурами. Сформулируем понятие допустимости для пространства $P_{\text{cl}}Y$.

Условие допустимости топологической структуры на $C(Y, Z)$ является условием непрерывности отображений $p_y : C(Y, Z) \longrightarrow Z$ для всех $y \in Y$, $p_y(f) = f(y)$. Этому условию соответствует условие непрерывности отображения $p_y : P_{\text{cl}}Y \longrightarrow D$,

$$p_y(C) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in C \\ 0, & \text{если } y \notin C. \end{cases}$$

Отображение $p_y : P_{\text{cl}}Y \longrightarrow D$ непрерывно, если $p_y^{-1}(\{0\})$ – открытое в $P_{\text{cl}}Y$ множество. Но $p_y^{-1}(\{0\}) = \{C|y \notin C\} = \{C|C \subset Y \setminus \{y\}\}$.

Рассматривают на множестве $P_{\text{cl}}Y$ и другие топологизации, не связанные с представлением его через $C(Y, D)$, например, структуру, имеющую псевдобазис, состоящий из множеств $\mathcal{U}_1(V) = \{C|C \subset V\}$ и $\mathcal{U}_2(V) = \{C|C \cap V \neq \emptyset\}$, рассматриваемых для всех открытых в Y множеств V. Из сказанного выше следует, что эта топологическая структура на $P_{\text{cl}}Y$ допустима, если все одноточечные множества замкнуты в пространстве Y.

3. Сопряженные и двойственные структуры. Рассмотрим топологическое пространство $(X \times Y)_\tau$, все замкнутые множества $\mathcal{F}$ в $(X \times Y)_\tau$ и соответствующие подмножества $\{G(x)|x \in X\}$ в $P_{\mathrm{cl}}Y$. Топологическая структура τ_* будет наибольшей топологической структурой на $P_{\mathrm{cl}}Y$, для которой все отображения $G : X \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_{\tau_*}$ непрерывны. Будем говорить, что τ_* – *топологическая структура на $P_{\mathrm{cl}}Y$, сопряженная τ.*

Рассмотрим теперь топологическое пространство $(P_{\mathrm{cl}}Y)_\tau$, все непрерывные отображения $G : X \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_\tau$ и множества $\mathcal{F} = \cup(\{x\} \times G(x))|x \in X$. Топологическая структура τ^* будет наименьшей топологической структурой на $X \times Y$, содержащей все $\mathcal{F}$. Будем говорить,что τ^* – *топологическая структура на $X \times Y$, сопряженная τ.*

Ситуация, когда мы имеем топологические структуры $\overline{\tau}$ на $X \times Y$ и $\underline{\tau}$ на $P_{\mathrm{cl}}Y$ такие что

$$(\overline{\tau})_* = \underline{\tau},$$

$$(\underline{\tau})^* = \overline{\tau},$$

особенно интересна. В этом случае мы будем говорить, что $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$ *двойственны друг другу.*

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть X – связное топологическое пространство, $\overline{\tau}$ состоит из всех множеств $\mathcal{G} = X \times O$, где O – любое открытое в Y множество, $\underline{\tau}$ – дискретная топологическая структура на $P_{\mathrm{cl}}Y$, тогда $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$ двойственные друг другу топологические структуры.

Доказательство. Если $F : (X \times Y)_{\overline{\tau}} \longrightarrow D$ является непрерывным отображением, тогда $F^{-1}(1) = X \times C$, где C – замкнутое в Y множество, и поэтому $G(x) = C$ для всех $x \in X$. Это означает, что $G : Y \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_{\underline{\tau}}$ – постоянное и поэтому непрерывное отображение. С другой стороны, если $G : X \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_{\underline{\tau}}$ – непрерывное отображение, то G – постоянное отображение, так как $\underline{\tau}$ – дискретная топологическая структура, а X – связное топологическое пространство. Но тогда $G(x) = C$ для некоторого C и всех $x \in X$, $F^{-1}(C) = X \times C$ и потому $F : (X \times Y)_{\overline{\tau}} \longrightarrow D$ – непрерывное отображение.

Следующее замечание показывает, что рассмотренный пример представляет крайний, в некотором смысле, случай.

Замечание. Пусть τ – топологическая структура на $P_{\mathrm{cl}}Y$, тогда топологическая структура τ^* на $X \times Y$, сопряженная τ, содержит все множества $X \times O$, где O – произвольное открытое в Y множество.

Доказательство. Действительно, любое постоянное отображение $G : X \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_\tau$ является непрерывным отображением. Так как $G(x) = C$ для всех $x \in X$ и некоторого замкнутого в Y множества C, то соответствующее множество $\mathcal{F} = F^{-1}(1) = X \times C$ и поэтому $X \times O \in \tau^*$, $O = Y \setminus C$.

Следующий пример дает нам другой крайний случай.

Пример. Пусть $\overline{\tau}$ – топологическая структура на $X \times Y$ с предбазой, состоящей из всех множеств $A \times O$, где $A \subset X$ и O – произвольное открыое в Y множество. Эта топологическая структура является произведением дискретной топологической структуры на множестве X и структуры топологического пространства Y. Пусть $\underline{\tau}$ – тривиальная топологическая структура на $P_{\mathrm{cl}}Y$. Тогда $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$ – двойственные друг другу топологические структуры.

Доказательство. Так как $\underline{\tau}$ – тривиальная топологическая структура, то непрерывность отображения $F : (X \times Y)_{\overline{\tau}} \longrightarrow D$ влечет непрерывность отображения $G : X \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_{\underline{\tau}}$. С другой стороны, если $G : X \longrightarrow (P_{\mathrm{cl}}Y)_{\underline{\tau}}$ есть некоторое отображение, то для любого $x \in X$ множество $G(x) = C_x$ будет замкнутым в Y множеством. Тогда соответствующее множество $\mathcal{F} = \cup C_x | x \in Y$ будет замкнутым в $(X \times Y)_{\overline{\tau}}$ множеством и поэтому $F : (X \times Y)_{\overline{\tau}} \longrightarrow D$ – непрерывное отображение.

4. Двойственные топологические структуры. Мы уже знаем, что не любая топологическая структура на $X \times Y$ имеет двойственную ей топологическую структуру на $P_{\mathrm{cl}}Y$. С другой стороны, можно доказать, что не любая топологическая структура на $P_{\mathrm{cl}}Y$ имеет двойственную ей топологическую структуру на $X \times Y$. Рассмотрим в связи с этим следующий пример.

Пример. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, G_l и G_r такие отображения, что $G_l(x) = (-\infty,\ x]$, $G_r(x) = [-x,\ \infty)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, τ – максимальная топологическая структура на $P_{\mathrm{cl}}\mathbb{R}$, для которой отображения G_l и G_r непрерывны. Тогда τ не имеет двойственной топологической структуры на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что топологическая структура τ, введенная в этом примере на $P_{\mathrm{cl}}\mathbb{R}$, допустима. Действительно, пусть $y \in \mathbb{R}$, $U = \{C|C \in P_{\mathrm{cl}}\mathbb{R},\ y \notin C\}$. Тогда $G_l^{-1}(U) = \{x|y \notin (-\infty, x] = \{x|x < y\}$ и $G_r^{-1}(U) = \{x|y \notin [x, \infty)\} = \{x|y < x\}$ являются открытыми в $\mathbb{R}$ множествами, что и означает допустимость τ. Рассмотрим топологическую структуру τ^* на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, сопряженную τ. Структура τ^* содержит множества $\mathcal{G}_l = \cup G_l(x)|x \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{G}_r = \cup G_r(x)|x \in \mathbb{R}$ следовательно она содержит множество $\mathcal{G}_l \cap \mathcal{G}_r = \cup G_l(x) \cap G_r(x)|x \in \mathbb{R}$. Таким образом, отображение $G : \mathbb{R} \longrightarrow P_{\mathrm{cl}}\mathbb{R}$, для которого

$$G(x) = \begin{cases} [-x,\ x], & \text{для } x \geqslant 0 \\ \emptyset, & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

является $(\tau^*)_*$-непрерывным отображением, и следовательно, $(\tau^*)_* \neq \tau$ так как G не является τ-непрерывным отображением.

§5. Случай $X = Y$

1. Битопологические пространства и пространства отображений. Если $X = Y$, то любая топологическая структура на произведении $X \times Y$ является битопологической структурой на Y. В этом случае мы изучаем связи между битопологическими структурами на Y и топологическими структурами на $C(Y, Z)$. Так как при изучении сопряженных структур и двойственных структур, топологическое пространство Y считается произвольно фиксированным, то в случае $X = Y$ фиксированным будет и пространство X. Конечно, отсюда не следует, что фиксировано и топологическое пространство $Y \times Y$, наоборот, мы должны изучить все допустимые топологизации множества $Y \times Y$ и их связи с топологическими пространствами Z. Если нас интересуют все допустимые топологизации множества $Y \times Y$, сопряженные допустимым топологическим структурам пространств $C(Y, Z)$ для различных топологических пространств Z, то мы можем ограничиться топологизациями множества $Y \times Y$ и Z для некоторого универсального множества Z.

В ситуации $X = Y$ мы имеем дело с допустимыми топологическими структурами на $Y \times Y$, то есть с битопологическими структурами на Y частного вида (будем также называть их *допустимыми*). Допустимость битопологической структуры β на

Y означает, что отображение $j_x : Y \longrightarrow (Y \times Y)_\beta$, $j_x(y) = (x, y)$ является для каждого $x \in Y$ вложением.

2. Функтор $R_Y{}^*$. Фиксируем $X = Y$ и рассмотрим какой-нибудь ковариантный функтор R_Y, сопоставляющий каждому топологическому пространству Z некоторое топологическое пространство $C(Y, Z)$ так, что непрерывным отображениям $h : Z \longrightarrow Z'$ соответствуют непрерывные же отображения $R_Y h : C(Y, Z) \longrightarrow C(Y, Z')$, $((R_Y h)(f))(y) = h(f(y))$.

Фиксируем некоторый функтор R_Y. Пусть Z – произвольное топологическое пространство, τ – топологическая структура пространства $R_Y(Z)$, τ^* – топологическая структура на $Y \times Y$, сопряженная τ. В конечном счете мы получим соответствие R^*_Y между топологическими пространствами Z и топологическими пространствами $(Y \times Y)_{\tau^*}$.

Каждая пара соответствующих друг другу отображений

$$F : Y \times Y \longrightarrow Z,$$

$$G : Y \longrightarrow C(Y, Z),$$

где

$$F(x, y) = G(x)(y), \;\; x, y \in Y,$$

переходит в аналогичную пару F', G', причем, если F или же G непрерывно, то и F', соответственно G', непрерывно.

В качестве примеров таких функторов можно привести следующие:

Пример 1. Каждому топологическому пространству Z сопоставляем пространство $R_Y(Z) = C(Y, Z)$ с топологией поточечной сходимости. Если $h : Z \longrightarrow Z'$ – непрерывное отображение, то и $R_Y(h) : R_Y(Z) \longrightarrow R_Y(Z')$ – непрерывное отображение. Действительно, пусть $(f_\xi | \xi \in \Xi) \longrightarrow f$, то есть $(f_\xi(y) | \xi \in \Xi) \longrightarrow f(y)$ для каждой точки $y \in Y$. Тогда, в силу непрерывности отображения h, $(hf_\xi(y) | \xi \in \Xi) \longrightarrow hf(y)$ для каждой точки $y \in Y$, то есть $(hf_\xi | \xi \in \Xi) \longrightarrow hf$.

Пример 2. Каждому топологическому пространству Z сопоставляем пространство $R_Y(Z) = C(Y, Z)$ с компактно открытой топологией сходимости. Если $h : Z \longrightarrow Z'$ – непрерывное отображение, то и $R_Y(h) : R_Y(Z) \longrightarrow R_Y(Z')$ – непрерывное отображение. Действительно, пусть $\mathcal{U}(C, U')$ – базисное открытое множество компактно-открытой топологической структуры на $C(Y, Z')$.

Тогда $h^{-1}(\mathcal{U}(C,U')) = \{f | hf \in \mathcal{U}(C,U')\} = \{f | hf(C) \subset U'\} = \{f | f(C) \subset h^{-1}(U') = \mathcal{U}(C, h^{-1}(U'))$.

3. Случай $X = Y$ **и** $Z = D$**.** В этом случае мы изучаем связь между допустимыми топологическими структурами на $Y \times Y$, то есть допустимыми битопологическими структурами на Y, и топологическими структурами на $P_{\rm cl}Y$. В этом случае имеется единственный параметр теории – произвольно фиксированное топологическое пространство Y. Каждому топологическому пространству Y мы можем сопоставить топологическое пространство $BY = Y \times Y$ с допустимой но не однозначно определенной топологической структурой. С другой стороны топологическому пространству Y мы можем сопоставить пространство $P_{\rm cl}Y$, точками которого являются замкнутые в Y множества. Топологическая структура пространства $P_{\rm cl}Y$ также определена неоднозначно.

Для любого непрерывного отображения $f : Y \longrightarrow Y'$ однозначно определены отображения $f \times f : Y \times Y \longrightarrow Y' \times Y'$, $(f \times f)(x,y) = (f(x), f(y))$, и $Pf : P_{\rm cl}Y' \longrightarrow P_{\rm cl}Y$, $P_{\rm cl}(C') = f^{-1}(C)$. Каждая пара (F', G'),

$$F' : Y' \times Y' \longrightarrow D,$$

$$G' : Y' \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow P_{\rm cl}Y',$$

отображений переходит при этом в пару (F, G),

$$F : Y \times Y \longrightarrow D,$$

$$G : Y \longrightarrow P_{\rm cl}Y,$$

где $F = F'(f \times f)$, $G = (Pf)G'f$.

Заметим, что если F', G' соответствуют друг другу, то и F, G соответствуют друг другу. Действительно,

$$F(x,y) = 1 \iff F'f(x,y) = 1 \iff F'(f(x), f(y)) = 1 \iff$$

$$\iff f(y) \in G'(f(x)) \iff y \in f^{-1}(G'(f(x))) \iff y \in G(x).$$

Мы можем теперь рассматривать функторы B и P, определяемые следующим образом. Функтор B сопоставляет каждому топологическому пространству Y некоторое топологическое пространство $Y \times Y$ с допустимой топологической структурой и каждому непрерывному отображению $f : Y \longrightarrow Y'$ сопоставляет непрерывное отображение $Bf = (f \times f) : BY \longrightarrow BY'$. Функтор P

сопоставляет каждому топологическому пространству Y некоторое допустимое пространство $P_{\mathrm{cl}}Y$ замкнутых подмножеств пространства Y и каждому непрерывному отображению $f : Y \longrightarrow Y'$ сопоставляет непрерывное отображение $Pf : P_{\mathrm{cl}}Y' \longrightarrow P_{\mathrm{cl}}Y$, $(Pf)(C') = f^{-1}(C')$. Заметим, что функтор B ковариантен, а функтор P контравариантен. Заметим также, что при описанном выше переходе от пары (F', G') к паре (F, G), определенном непрерывным отображением $f : Y \longrightarrow Y'$, из непрерывности отображения F' следует непрерывность отображения F, а из непрерывности отображения G' следует непрерывность отображения G.

В рассматриваемом здесь случае мы имеем дело с топологическими структурами на множестве $Y \times Y$ и с топологическими структурами на множестве $C(Y, Y)$. Структуры первого типа мы называли битопологическими структурами на Y, структуры второго типа мы будем называть *структурами отношений на* Y. Таким образом, возникает проблема изучения связи между различными типами структур, определенных на произвольно фиксированном множестве Y.

4. Случай $X = Y = Z$**.** В этом случае рассматривается связь между топологическим пространством $(X \times X)_{\overline{\tau}}$ или, иначе говоря, битопологическим пространством $(X, \overline{\tau})$ и пространством отображений $C(X, X)_{\underline{\tau}}$ для произвольно фиксированного топологического пространства X и некоторых двойственных топологических структур $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$.

Для отображения $F : X \times X \longrightarrow X$ рассмотрим два простейших варианта, а именно $F_1(x, y) = y$ и $F_2(x, y) = x$. В первом варианте $G_1(x)$ – тождественное отображение для каждого $x \in X$, во втором варианте $G_2(x)(y) = x$ для каждого $y \in X$.

В первом варианте на $C(X, X)$ допустима дискретная топологическая структура, отображение $G_1 : X \longrightarrow C(X, X)$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно переводит каждую сходящуюся направленность в стационарную направленность. В частности, если X – связное топологическое пространство, то G непрерывно тогда и только тогда, когда оно постоянно и поэтому должны быть непрерывными все отображения F, для которых $F(x, y) = f(y)$ для всех x, где f – непрерывное отображение X в себя. Отсюда для связного X следует, что $\overline{\tau}$ – произведение кодискретной топологии на топологию пространства X, а $\underline{\tau}$ – дискретная топологическая структура.

Во втором варианте отображение G_2 вкладывает X в $C(X,X)$ и максимальной допустимой топологической структурой на $C(X,X)$ является структура, получаемая переносом структуры пространства X на множество $G_2(X)$ и дискретная вне $G_2(X)$. Для связного X непрерывными отображениями $G : X \longrightarrow C(X,X)$ относительно такой топологической структуры на $C(X,X)$ оказываются все постоянные отображения и непрерывные отображения X в $G_2(X)$. Им соответствуют отображения F, для которых $F(x,y) = f(y)$ для каждого $x \in X$, фигурирующие в первом варианте, и отображения F постоянные на вертикальных множествах, непрерывно зависящие от $x \in X$. Отсюда следует, что произведения X на открытые в X множества и, следовательно, минимальной топологической структурой на $X \times X$ является обычное произведение пространства X на себя.

5. Случай $X = Y = Z = \mathbb{R}$. Рассмотрим некоторые двойственности в случае, когда $X = Y = Z = \mathbb{R}$.

1. Пусть $\overline{\tau}$ – произведение дискретной топологической структуры на $\mathbb{R}$ и обычной топологической структуры числовой прямой, $\underline{\tau}$ – кодискретная топологическая структура на $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда эти топологические структуры двойственны друг другу. Это частный случай общего утверждения относительно произвольных топологических пространств X, Y, Z.

2. Пусть $\overline{\tau}$ определена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ сходимостями, стационарными по одной координате, $\underline{\tau}$ определена поточечной сходимостью на $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда эти топологические структуры двойственны друг другу. Это частный случай общего утверждения относительно произвольных топологических пространств X, Y, Z.

3. Пусть $\overline{\tau}$ – обычная топологическая структура вещественной плоскости, $\underline{\tau}$-компактно открытая топологическая структура на $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда эти топологические структуры двойственны друг другу. Это частный случай общего утверждения относительно произвольных топологических пространств X, Z и хаусдорфова локально компактного топологического пространства Y.

6. Случай $X = Y = Z = D$. Нетрудно доказать, что в этом случае топология прямого произведения на $D \times D$ и покоординатного произведения, совпадают.

В случае прямого произведения $D \times D$ замкнутыми являются следующие множества: $\emptyset$, $\{1\} \times D = \{(1,0),\ (1,1)\}$, $\{1\} \times \{1\} = \{(1,1)\}$, $D \times D$, $D \times \{1\} = \{(0,1),\ (1,1)\}$, $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

В случае покоординатного произведения, топологическая структура определяется сходимостями: $(0,0) \longrightarrow (0,1)$, $(0,0) \longrightarrow (1,0)$, $(0,1) \longrightarrow (1,1)$, $(1,0) \longrightarrow (1,1)$. Таким образом, замкнутыми множествами здесь будут множества C, для которых

$$(0,0) \in C \Longrightarrow (0,1) \in C,$$

$$(0,0) \in C \Longrightarrow (1,0) \in C,$$

$$(0,1) \in C \Longrightarrow (1,1) \in C,$$

$$(1,0) \in C \Longrightarrow (1,1) \in C.$$

Нетрудно, теперь, убедиться в том, что определяемые этими условиями замкнутые множества совпадают с замкнутыми множествами обычного произведения $D \times D$.

Рассмотрим теперь компактно открытую топологию на D/D. Нетрудно заметить, что D/D состоит из трех точек, а именно из $f_{0,0},\ f_{0,1},\ f_{1,1}$, где

$$f_{i,j} = \begin{cases} i, & \text{для } x = 0 \\ j, & \text{для } x = 1, \end{cases}$$

$i = 0,1,\ j = 0,1$.

Компактно открытая топология определяется множествами $U(C,O)$, где, в рассматриваемом ситуации, $C = \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ – компактные множества и $O = \{0\},\ \{0,1\}$ – открытые множества. Итак мы имеем шесть вариантов для $U(C,O)$:

$$U(\{0\},\{0\}) = \{f_{0,0},\ f_{0,1}\},$$

$$U(\{1\},\{0\}) = \{f_{0,0}\},$$

$$U(\{0,1\},\{0\}) = \{f_{0,0}\},$$

$$U(\{0\},\{0,1\}) = U(\{1\},\{0,1\}) = U(\{0,1\},\{0,1\}) = D/D.$$

Таким образом, компактно открытая топология на D/D состоит из четырех множеств: $\emptyset,\ D/D,\ \{f_{0,0}, f_{0,1}\},\ \{f_{0,0}\}$ и определяет три нетривиальные сходимости:

$$f_{0,0} \longrightarrow f_{0,1},$$

$$f_{0,0} \longrightarrow f_{1,1},$$

$$f_{0,1} \longrightarrow f_{1,1},$$

совпадающие с нетривиальными поточечными сходимостями.

7. Δ – контактные битопологии.

Пусть Y – произвольное метрическое пространство. Будем говорить, что последовательность $((x_n, y_n)|n \in \mathbb{N})$ *касается диагонали* $\Delta = \{(y, y)|y \in Y\}$ *в точке* (x, x), если последовательности $(x_n|n \in \mathbb{N})$, $(y_n|n \in \mathbb{N})$, сходятся в Y к x и $d(y_n, x_n) < \delta_n d(x, x_n)$, где $\delta_n \longrightarrow 0$, то есть $((d(x, x_n)|n \in \mathbb{N})$ и $(d(x, y_n)|n \in \mathbb{N})$ – эквивалентные бесконечно малые последовательности. Нетрудно заметить, что это условие эквивалентно условию

$$d(x_n, y_n) \leqslant \delta_n (d \times d)((x_n, y_n), (x, x)) \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \,,$$

$$(d \times d)((x_n, y_n), (x, x)) \longrightarrow 0, \;\; \delta_n \longrightarrow 0.$$

Определение. Топологическая структура (битопологическая структура) τ на $Y \times Y$ (на Y) называется Δ – *контактной*, если она определяется всеми сходимостями, стационарными по одной из координат, а также всеми сходимостями к точке касания, касающихся диагонали.

Топологическая структура τ_* на $C(Y, Y)$, сопряженная Δ – контактной топологической структуре τ на $Y \times Y$, определяется поточечными сходимостями, удовлетворяющими следующему дополнительному условию:
если $(f_n|n \in \mathbb{N}) \longrightarrow f$, *где* $f_n = G(x_n)$, $f = G(x)$, $(x_n|n \in \mathbb{N}) \longrightarrow x$, G *соответствует непрерывному отображению* $F : Y \times Y \longrightarrow Y$, *то* $(f_n(y_n)|n \in \mathbb{N}) \longrightarrow f(x)$ *для* $(y_n|n \in \mathbb{N}) \longrightarrow x$ *при условии, что* $d(x_n, y_n) \leqslant \delta_n d(x_n, x)$, $\delta_n \longrightarrow 0$.

Глава III

Некоторые применения пространственных структур

В этой главе будут рассмотрены некоторые применения теории пространственных структур к многообразиям и группам.

§1. Битопологические многообразия

1. Постановка проблемы. Под битопологическим многообразием мы будем понимать здесь топологическое многообразие, рассматриваемое вместе с некоторой заданной на нем битопологической структурой. Так как топологическое многообразие характеризуется своим локальным строением, имея окрестности точек гомеоморфные некоторому евклидову пространству, естественно предполагать, что и битопологическое многообразие характеризуется заданием на этих евклидовых окрестностях соответствующих битопологических структур. Однако здесь возникает существенная трудность. Евклидовы окрестности U_ξ топологического многообразия X образуют покрытие $(U_\xi|\xi \in \Xi)$ этого топологического многообразия, что позволяет перейти от локальной топологической структуры к его топологической структуре в целом. Битопологические же окрестности U_ξ хотя и образуют покрытие множества X, но их битопологические структуры являются топологическими структурами на $U_\xi \times U_\xi$, а такие множества не образуют покрытия множества $X \times X$ – они накрывают только некоторую окрестность диагонали $\Delta = \{(x, x)|x \in X\}$. Следовательно, задание битопологических структур на евклидовых окрестностях не определяет в общем случае битопологическую структуру в целом. Однако в некоторых специальных случаях задание битопологической структуры на всем топологическом многообразии по битопологическим структурам на его евклидовых окрестностях оказывается возможным. В первой части книги было показано, что это возможно в классе *локальных битопологических структур* и в классе *транзитивных битопологических структур*. Напомним соответствующие определения.

Определение. Битопологическая структура β, определенная на множестве X, то есть топологическая структура на множестве $X \times X$, называется *локальной битопологической структурой*, если $(X \times X) \setminus \Delta$ является β-открытым множеством, на котором β индуцирует дискретную топологическую структуру.

Замечание В терминах сходимости локальность битопологической структуры означает, что сходятся только все стационарные направленные системы и некоторые системы, сходящиеся к точкам диагонали.

Определение. Битопологическая структура β, определенная на множестве X, то есть топологическая структура на множестве $X \times X$, называется *транзитивной битопологической структурой*, если из сходимостей

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$$

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z)$$

следует сходимость

$$(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, z)$$

Замечание Термин *транзитивность* представляется естественным, если ввести *отношение переноса* направленных систем.

Определение. Будем говорить, что направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ *переносима* на (X, β) в $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ из точки x в точку y, если $(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$. Это отношение переноса записывается следующим образом:

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$$

Транзитивность битопологической структуры означает просто транзитивность переносов, а именно из

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$$

и

$$(y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,z} (z_\lambda|\lambda \in \Lambda)$$

следует

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,z} (z_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

Определение. Пусть X – некоторое множество и $\{X_\xi | \xi \in \Xi\}$-некоторое его покрытие, на элементах которого определены какие-то битопологические структуры β_ξ. *Объединением битопологических структур* β_ξ называется такая битопологическая структура β на X, что $\beta_\xi = \beta | X_\xi \times X_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$ (ограничение β на каждое X_ξ совпадает с β_ξ).

Так как битопологические структуры на множествах являются топологическими структурами на их квадратах, проблема объединения битопологических структур может быть сформулирована как топологическая проблема. В этой формулировке рассматриваются *топологические структуры* β_ξ на множествах $X_\xi \times X_\xi$ и их объединение будет *топологической структурой* на $X \times X$.

Нетрудно понять, что такое объединение не всегда существует, а если и существует, то в общем случае определено неоднозначно. Для существования объединения необходимо, конечно, согласование топологических структур β_ξ друг с другом в том смысле, что любые β_ξ и β_η определяют на $(X_\xi \times X_\xi) \cap (X_\eta \times X_\eta)$ одну и ту же топологическую структуру. Если такое топологическое объединение существует, то наибольшее из них определено однозначно. Оно состоит из всех множеств $G \subset X \times X$, пересечение которых с каждым $X_\xi \times X_\xi$ принадлежит β_ξ. Если рассматриваются объединения локальных битопологических структур, согласованных друг с другом, то они всегда существуют и наибольшее из них является локальной битопологической структурой. Действительно, как было уже отмечено, наибольшее объединение состоит из всех множеств $G \subset X \times X$, пересечение которых с каждым $X_\xi \times X_\xi$ принадлежит β_ξ. Таковым является каждое одноточечное множество $\{(x,y)\}$ для $x \neq y$, так как если даже (x,y), $x \neq y$, принадлежит $X_\xi \times X_\xi$, то $\{(x,y)\} \in \beta_\xi$, в силу локальности β_ξ. Таким образом в классе локальных битопологических структур проблема объединения согласованных структур решается однозначно.

Другая ситуация возникает при объединении транзитивных битопологических структур. В первой главе книги проблема объединения в классе транзитивных битопологических структур рассмотрена довольно детально. Оказалось, что их согласованность оказывается здесь недостаточной. Потребовался целый ряд дополнительных условий, обеспечивающих положительное решение проблемы. Мы не будем повторять здесь довольно сложные построения и доказательства, относящиеся к этому, ограничившись лишь некоторыми ключевыми моментами.

Трудность построения транзитивной битопологической структуры β на всем X по битопологическим структурам β_ξ на X_ξ состоит в том, что в отличие от локальной ситуации требуется вводить не обязательно тривиальные сходимости к точкам (x,y), не принадлежащим ни к одному множеству $X_\xi \times X_\xi$. Это, в принципе, можно осуществить, перенося направленности из точки x последовательно в точки $x = x_1,\ x_2, \ldots, x_n = y$, где каждая пара x_i, x_{i+1} точек принадлежит какому то множеству X_ξ – *переносом вдоль цепи* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Но такой перенос возможен только тогда, когда любые две точки соединимы какой-нибудь цепью - *система* β_ξ *– цепно связна.* Далее необходимо, чтобы такой перенос не зависел от выбора цепи (а таких цепей может быть очень много) – эта независимость была сформулирована как предварительное условие, наложенное на систему β_ξ. Из этого условия следует, в частности, согласованность построенной так битопологической структуры β со всеми β_ξ. *В дальнейшем мы будем рассматривать битопологические многообразия, как топологические многообразия рассматриваемые с некоторой системой битопологических структур* β_ξ*, определенных на евклидовых окрестностях* X_ξ*, образующих локально конечное покрытие.*

2. Битопологические структуры на $\mathbb{R}$**.** Каждая битопологическая структура β, определенная на числовой прямой $\mathbb{R}$, индуцирует на ней соответствующую топологическую структуру $\tau = \beta|\mathbb{R}$. Мы остановимся на случае, когда $\beta|\mathbb{R}$ – обычная топологическая структура числовой прямой. Фиксируя такую битопологическую структуру β на $\mathbb{R}$, мы фиксируем, тем самым, множество непрерывных отображений $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau)$, для которых $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ являются бинепрерывными отображениями. Сама структура β будет в этом случае битопологическим представлением этого множества.

При построении структуры β мы можем исходить из обычной топологической структуры плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ослабляя ее или усиливая вне диагонали $\Delta = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}\}$.

Замечание Напомним, что ослаблением исходной топологической структуры τ топологического пространства X по некоторой системе $\mathcal{G}$ его подмножеств называется топологическая структура, состоящая из множеств, пересечения которых с каждым множеством $G \in \mathcal{G}$ принадлежит $\tau|G$. Таким же условием определяются замкнутые множества ослабления.

Теорема. *Пусть локальная битопологическая структура* β *на* $\mathbb{R}$ *(топологическая структура на* $\mathbb{R}^2$*) является ослаблением обычной локальной структуры посредством системы всех прямых* $y - a = \lambda(x - a)$ *в* $\mathbb{R}^2$ *для всех* $a \in \mathbb{R}$ *и всех* $\lambda > 0$. *Тогда отображение* $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ *бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.*

Доказательство. Пусть β – локальная топологическая структура на $\mathbb{R}^2$, полученная ослаблением обычной локальной топологической структуры посредством указанной системы прямых. Это значит, что последовательность $((x_i, y_i)|i \in \mathbb{N}) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff x = y,\ y_i - x = \lambda(x_i - x)$ для некоторого $\lambda > 0$, причем последовательности (x_i) и (y_i) сходятся к x. Сразу заметим, что β индуцирует дискретную топологию на каждой горизонтальной и на каждой вертикальной прямой.

Рассмотрим произвольное бинепрерывное отображение $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ и докажем, что оно является кусочно линейным отображением. Для этого достаточно доказать, что f линейно на отрезках $[x, x + \epsilon]$ и $[x - \epsilon, x]$ для каждого $x \in \mathbb{R}$, где $\epsilon > 0$ зависит от x. Заметим, что можно ограничиться только случаем $x = 0,\ f(0) = 0$, комбинируя f, в случае необходимости с параллельными переносами на $\mathbb{R}$. Более того мы можем ограничиться отрезками $[0, \epsilon], \epsilon > 0$, так как β и, одновременно, понятие кусочной линейности инвариантны относительно перехода от (x, y) к $(-x, -y)$. Наша ближайшая цель доказать, что f либо не обращается в ноль ни в одной точке внутри некоторого отрезка $[0, \epsilon]$ либо тождественно равно нулю на нем.

Допустим, что f *не тождественно равна нулю на всех отрезках* $[0, \epsilon]$, но существует такая сходящаяся к нулю последовательность $(x_n|n \in \mathbb{N})$, что $f(x_n) = 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через A множество всех точек $\mathbb{R}_+ = \{x|x > 0\}$, для которых $f(x) = 0$. Точка 0 будет тогда предельной точкой как множества A так и множества $CA = \mathbb{R}_+ \backslash A$ в обычной топологии на $\mathbb{R}$. Множество CA является открытым в $\mathbb{R}$ множеством и поэтому оно представимо в виде объединения интервалов с концами в A (будем называть их *специальными*) и, возможно, некоторого бесконечного интервала (c, ∞). Нас интересуют конечные специальные интервалы, неограниченно приближающиеся к нулю.

Пусть (y_i, y_{i+1}) – любой из таких интервалов, расположенный на вертикальном луче $x = 0, y \geq 0$, $y_i = \lambda x_i$, $y_{i+1} = \lambda x_{i+1}$, где $\lambda > 0$. Если в интервале (x_i, x_{i+1}) содержится какая-нибудь точка из A, например строго содержится какой-нибудь специальный интервал и, следовательно, какая-нибудь точка x_i' множества A, то точка $(f(x_i'), f(\lambda x_i'))$ находится на вертикальном луче $x = 0, y \geq 0$. Допустим, что на этом луче существуют сколь угодно близкие к нулю специальные интервалы с указанным выше свойством. Тогда последовательность точек $(x_i', \lambda x_i')$ на луче $L_\lambda = \{(x, \lambda x)$ сходится к точке $(0,0)$ и, следовательно, последовательность $(f(x_i'), f(\lambda x_i'))$ также должна сходиться к точке $(0,0)$. Но эта последовательность лежит на вертикальной прямой с дискретной на ней топологией и потому должна быть стационарной, то есть $f(\lambda x_i') = 0$ для всех достаточно больших i, что противоречит условию $y_i' = \lambda x_i' \notin A$.

Нам осталось рассмотреть случай когда в любом интервале (x_i, x_{i+1}) достаточно близком к нулю нет точек из A и поэтому он содержится (не обязательно строго содержится) в некотором специальном интервале (x_i', x_{i+1}'). В этой ситуации опять же возможны два случая, а именно:

1. $(\lambda x_i', \lambda x_{i+1}')$ строго содержит специальный интервал, что опять позволяет получить противоречие, пользуясь теперь дискретностью топологии на горизонтальной прямой $y = 0$.

2. Для каждого $\lambda > 0$ все достаточно близкие к нулю специальные интервалы переводятся преобразованием $x \mapsto \lambda x$ в специальные интервалы. Нетрудно доказать, что этот случай невозможен. Действительно, открытое в обычной топологии множество CA состоит из счетного количества непересекающихся специальных интервалов, поэтому найдется только счетное количество *специальных* чисел ϵ, для которых *специальное* множество $CA \cap (0, \epsilon)$ состоит из специальных интервалов. Отсюда следует, что существует только счетное количество пар ϵ_1, ϵ_2 специальных чисел и, следовательно, только счетное количество чисел λ, для которых соответствие $x \mapsto \lambda x$ переводит какое-нибудь специальное множество в специальное множество, что противоречит произвольности $\lambda > 0$.

Мы доказали, таким образом, что существует некоторый отрезок $[0, \epsilon]$, на котором функция f либо тождественно равна нулю либо в ноль не обращается. В первом случае f линейна на этом отрезке, докажем ее линейность во втором случае.

Без нарушения общности можно предполагать, что $f(x) > 0$ на $(0,1]$. Заметим, прежде всего, что для каждого $\lambda > 0$ существуют $\lambda' > 0$ и $\epsilon > 0$ такие, что $f(\lambda x) = \lambda' x$ для всех $x \in [0,\epsilon]$. Действительно, если это не так, то найдется сходящаяся к нулю последовательность (x_n), для которой $f(\lambda x_n) = \lambda'{}_n f(x_n)$, причем последовательность (λ'_n) не стабилизируется. Так как $\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$ является непрерывной функцией на $(0,\epsilon]$, то слегка изменив значения x_n мы сможем перейти к последовательности $(x_n) \longrightarrow 0$, для которой $f(\lambda x_n) = \lambda'{}_n f(x_n)$ и все $\lambda'{}_n$ различны. Но тогда $(x_n, \lambda x_n) \longrightarrow_\beta (0,0)$ и в то же время $(f(x_n), f(\lambda x_n)) \not\longrightarrow_\beta (0,0)$, что противоречит бинепрерывности f. Таким образом мы можем считать, что $f(\lambda x) = \lambda' f(x)$ для $x \in (0,\epsilon]$.

Исследуем теперь функцию $\lambda' = \lambda'(\lambda)$, то есть отмеченную только что зависимость λ' от λ. Фиксируем некоторое $\lambda > 0$, Пусть $\alpha \neq 0$ такое число, что $\lambda'^{\alpha} = \lambda$. Введем новую функцию $g(x)$, положив $g(x) = f^\alpha(x)$ для всех $x \in [0,\epsilon]$. Для этой функции $g(\lambda x) = (f(\lambda x))^\alpha = (\lambda')^\alpha f^\alpha(x) = \lambda g(x)$. Таким образом

$$g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Отсюда конечно не следует линейность функции $g(x)$, так как равенство $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ доказано только для некоторого фиксированного λ. Для другого числа λ_1 мы будем иметь, возможно, другую функцию g_1 и, соответственно, другое соотношение

$$g_1(\lambda_1 x) = \lambda_1 g_1(x).$$

Фиксируем два числа $\lambda < 1$, $\lambda_1 < 1$ и, соответственно, две функции $g(x)$ и $g_1(x)$. Без нарушения общности можно считать, что они заданы на $[0,\epsilon]$. Рассмотрим точки $\epsilon, \lambda\epsilon, \dots, \lambda^n\epsilon, \dots$ и отрезки $[\lambda^{n+1}\epsilon, \lambda^n\epsilon]$, $n = 0,1,\dots,k,\dots$. Эти отрезки переходят друг в друга при λ-сжатии. Точки $(\epsilon, g(\epsilon)), (\lambda\epsilon, \lambda g(\epsilon)), \dots, (\lambda^n\epsilon, \lambda^n g(\epsilon)), \dots$ находятся на графике функции $g(x)$ и также переходят друг в друга при λ-сжатии. Таким образом график функции $g(x)$ можно получить последовательным λ-сжатием ее графика над отрезком $[\lambda\epsilon, \epsilon]$. Отсюда следует, что график функции $g(x)$ лежит между прямыми $y = kx$ и $y = k'x$, $k > k'$. Аналогично, график функции $g_1(x)$ лежит между прямыми $y = k_1 x$ $y = k'{}_1 x$. Перейдя к функции

$f(x)$, мы получим неравенства

$$kx \leqslant f^{\alpha}(x) \leqslant k'x$$

$$k_1x \leqslant f_1^{\alpha}(x) \leqslant {k'}_1x$$

или, что то же самое,

$$(kx)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant f(x) \leqslant (k'x)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(k_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leqslant f(x) \leqslant (k'_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

Без нарушения общности можно считать, что $\alpha \leqslant \alpha_1$ или $\frac{1}{\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha_1}$. Если это неравенство строгое, то для достаточно малых x имеет место неравенство $(k'x)^{\frac{1}{\alpha}} < (k_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ и мы приходим к противоречию

$$f(x) \leqslant (k'x)^{\frac{1}{\alpha}} < (k_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leqslant f(x)$$

для достаточно малых x. Тем самым доказано, что $\alpha = \alpha'$. Таким образом функции $g(x)$ и $g_1(x)$ совпадают, соотношение $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ справедливо для всех $\lambda < 1$ и поэтому функция $g(x) = ax$ является линейной функцией а $f(x) = (ax)^{\frac{1}{\alpha}}$. Если мы теперь перейдем к другой точке x_0, то вместо функции $f(x)$ мы должны будем рассматривать функцию $f'(x') = f(x' + x_0) - f(x_0)$. По доказанному ранее должно иметь место следующее равенство: $f(x' + x_0) - f(x_0) = (cx')^{\frac{1}{\gamma}}$ для каких-то c и γ, что возможно только для $\alpha = 1$. Тем самым доказано, что $f(x) = ax$, то есть f – линейная функция на $[0, \epsilon]$.

Можно доказать, что отмена в предыдущей теореме условия $\lambda > 0$ (добавление всех горизонтальных прямых) не меняет ее результативную часть. С другой стороны, если мы еще более расширим систему прямых, присоединив и вертикальные прямые, то теорема окажется неверной. Если же условие $\lambda > 0$ заменить на условие $\lambda < 0$, то $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно и либо строго монотонно либо постоянно. Таким образом, меняя систему прямых, по которой осуществляется ослабление стандартной локальной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$, мы получаем битопологические представления различных множеств непрерывных вещественных функций.

3. Битопологические структуры на $\mathbb{R}^n$. Случай $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ в общем аналогичен случаю $\mathbb{R}$, рассмотренному в предыдущем разделе, только техника доказательства несколько сложнее.

Теорема. *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ топологическая структура β_n является ослаблением обычной локальной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ относительно диагонали $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}^n\}$ посредством системы n-мерных гиперплоскостей $y - a = \lambda(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$. Тогда отображение $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$ бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.*

Доказательство. Случай $p = q = 1$ уже рассмотрен в предыдущем разделе. Рассмотрим теперь случай $p = 1, q > 1$.

Пусть $f : (\mathbb{R}, \beta_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$ – бинепрерывное отображение. Тогда $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$, где каждое f_i отображает битопологическое пространство $(\mathbb{R}, \beta)$ в себя. В соответствии с заключительной частью соответствующей теоремы, все f_i являются кусочно линейными отображениями и поэтому f – кусочно линейное отображение. Дальнейшее рассуждение использует индукцию по p при произвольном q.

Рассмотрим произвольно фиксированное бинепрерывное отображение $f : (\mathbb{R}^{p+1}, \beta_{p+1}) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$. Наша цель доказать, что это отображение будет кусочно линейным в предположении кусочно линейности любого бинепрерывного отображения $g : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$. Для этого достаточно доказать, что f-кусочно линейно в некоторой окрестности любой точки $x \in \mathbb{R}^{p+1}$. Без нарушения общности можно ограничиться изучением отображения f в окрестности точки O, все координаты которой равны нулю, и считать при этом, что $f(O) = O$. По предположению f – кусочно линейно на каждом луче L с начальной точкой O и поэтому линейно на некотором отрезке $[O, l]$ этого луча. Будем считать при этом, что это максимальный отрезок линейности отображения f на луче L (в частности может оказаться, что f линейно на всем луче L). Будем называть его *первым отрезком линейности* на луче L. Мы докажем, прежде всего, что совокупность точек первых отрезков линейности, взятых по всем лучам из O, является окрестностью точки O в $\mathbb{R}^{p+1}$.

Действительно, допустим, что существуют первые отрезки линейности сколь угодно малой длины. Рассмотрим тогда последовательность $[O, l_k]$ таких отрезков на лучах L_k, для которых

$(l_k) \longrightarrow O$. Пусть $[l_k, l_k{}']$ – второй отрезок линейности отображения f на луче L_k. Фиксируем некоторое число λ, $0 < \lambda < 1$. На каждом луче L_k фиксируем затем такую точку $x_k \in [l_k, l_k{}']$, что $\lambda x_k \in [O, l_k]$. Ясно, что $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_{p+1}} (O,O)$. С другой стороны докажем, что эти точки $x_k, \lambda x_k$ можно выбрать так, что $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O,O)$. Для доказательства этого нам придется рассмотреть несколько случаев:

1) $f(l_k) = O$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае $f(l_k') \neq O$, так как $[O, l_k]$ – максимальный отрезок линейности отображения f на луче L_k. Тогда $f(x_k) \neq O$, но $f(\lambda x_k) = O$, поэтому $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O,O)$.

2) $f(l_k) \neq O$, точки $O, f(l_k), f(l_k')$ не лежат на одной прямой и поэтому не существует λ', для которого $f(\lambda x_k) = \lambda' f(x_k)$.

3) $f(l_k) \neq O$, точки $O, f(l_k), f(l_k')$ лежат на одной прямой. Без нарушения общности можно считать, что эти точки лежат на луче $L_k, f(l_k) = \mu_k l_k, \mu_k > 0, f(l_k') - f(l_k) = \mu'(l_k - l_k')$, причем $\mu_k' \neq \mu_k$, так как $[O, l_k]$ – максимальный отрезок линейности отображения f. Тогда

$$f(x_k) - f(l_k) = \mu_k'(x_k - l_k), f(\lambda x_k) = \mu \lambda x_k,$$

$$\frac{f(\lambda x_k)}{f(x_k)} = \lambda \mu_k \frac{x_k}{f(l_k) + \mu'(x_k - l_k)} = \lambda \mu_k \frac{x_k}{\mu_k l_k + \mu_k'(x_k - l_k)}.$$

Если x_k близко к l_k $(x_k \sim l_k)$, то $\lambda_k' = \frac{f(\lambda x_k)}{f(x_k)} \sim \frac{\lambda}{l_k} x_k$, поэтому мы можем варьировать величину λ_k' слегка меняя x_k. Таким образом и в этом случае мы найдем последовательность x_k такую, что $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_{p+1}} (O,O)$, но $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O,O)$.

Ясно, что для любой последовательности $(l_k) \longrightarrow O$ мы будем иметь один из этих трех случаев, переходя, если это необходимо, к ее подпоследовательности, поэтому существование такой последовательности приводит нас к противоречию. Тем самым доказано, что точки всех отрезков линейности $[O, l]$ образуют окрестность точки O. В этой окрестности можно взять $(p+1)$-мерный симплекс, содержащий внутри точку O. Тогда, по индуктивному предположению, отображение f кусочно линейно на границе этого симплекса, а на отрезках, соединяющих точку O с точками границы симплекса, это отображение, по доказанному выше, линейно. Отсюда следует, что f – кусочно линейно на всем симплексе, то есть кусочно линейно на некоторой окрестности точки O.

Мы доказали, что из бинепрерывности отображения $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}_q, \beta_q)$ следует кусочно линейность отображения $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ – кусочно линейное отображение докажем, что в этом случае отображение $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}_q, \beta_q)$ будет бинепрерывным отображением. Без нарушения общности можно предполагать, что $f(O) = O$. Пусть $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_p} (O, O)$, докажем, что $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$. Опять же без нарушения общности можно предполагать, что вся последовательность $(\lambda x_k, x_k)$ целиком содержится в некотором симплексе содержащемся в $\mathbb{R}^q$ и f отображает этот симплекс линейно на некоторый симплекс содержащийся в $\mathbb{R}^q$. Но тогда любая пара точек $\lambda x_k, x_k$ переходит при отображении f в пару точек $f(\lambda x_k) = \lambda f(x_k), f(x_k)$ и, таким образом, $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$, что и требовалось доказать.

4. Битопологические структуры на топологических многообразиях. Локальная структура любого топологического многообразия проста – это топологическая структура евклидова пространства соответствующей размерности. Глобальная же его структура (топологическая структура на всем многообразии) естественно определена локальными структурами, как их объединение. Точно такая же ситуация имеет место, как мы заметили в разделе 1, в классе локальных битопологических структур. Так как стандартные битопологические структуры β_n, определенные нами на евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$, являются локальными структурами, то в случае их согласованности будет определено их объединение, являющееся некоторой локальной битопологической структурой на всем многообразии.

Под кусочно линейной структурой, определенной на некотором n-мерном топологическом многообразии W^n без границы, мы будем понимать его локально конечное покрытие областями G_i снабженными взаимно однозначными и взаимно непрерывными отображеними φ_i области G_i *на* евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с стандартной линейной структурой. При этом требуется чтобы эти отображения были согласованы в том смысле, что для каждого $G_{ij} = G_i \cap G_j$ соответствие $\varphi_i(x) \mapsto \varphi_j(x)$ для всех $x \in G_{ij}$ было кусочно линейным отображением.

Теорема. *Каждое кусочно линейная структура на топологическом многообразии без границы может быть представлена некоторой локальной битопологической структурой (на этом много-*

образии).

Доказательство. Отображения $\varphi_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ позволяют перенести на все области G_i стандартную локальную битопологическую структуру β, определенную на $\mathbb{R}$. Эти локальные битопологические структуры β_i оказываются попарно согласованными. Действительно, пусть β_{ij} - битопологическая структура, индуцированная на G_{ij} битопологической структурой β_i. Нам надо доказать, что $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ для всех i, j. Заметим в связи с этим, что соответствие

$$x \mapsto \varphi_i(x) \mapsto \varphi_j(x)\varphi_j^{-1}(x) = x$$

является бинепрерывным отображением (G_{ij}, β_{ij}) на $(G_{ji}, \beta_{j,i})$, и обратное ему отображение. Отсюда следует совпадение β_{ij} с β_{ji}. Таким образом определено объединение всех β_i, представляющее заданную кусочно линейную структуру.

§2. Инфинитезимальные структуры на $\mathbb{R}^n$

1. Структура бесконечно малых. Мы видели, что кусочно линейные многообразия W могут быть представлены локальными битопологическими структурами, определенными соответствующими сходимостями последовательностей точек множества $W \times W$ к точкам диагонали этого квадрата. В свою очередь эти сходимости в $W \times W$ могут быть представлены некоторыми парами сходимостей в W. От сходимостей в W, в частности в $\mathbb{R}^n$, последовательностей $(x_k | k \in \mathbb{N}) \longrightarrow 0$ мы можем перейти к их росткам, то есть к классам сходимостей совпадающих на сколь угодно малых их носителях, но гораздо удобнее со многих точек зрения рассматривать не ростки таких последовательностей, а соответствующие им бесконечно близкие к нулю в $(\mathbb{R}^*)^n$ (бесконечно малые) точки нестандартного анализа. Такое соответствие может быть осуществлено следующим образом.

Фиксируем в $\mathbb{N}$ некоторый непустой исчезающий ультрафильтр γ. Такой ультрафильтр обладает следующими свойствами:

$$A \cup B \in \gamma \iff A \in \gamma \text{ или } B \in \gamma,$$

$$A \cap B \in \gamma \iff A \in \gamma \text{ и } B \in \gamma.$$

Фиксированный нами ультрафильтр γ позволяет ввести отношение эквивалентности для сходящихся к нулю в $\mathbb{R}^n$ последовательностей точек. Будем считать, что последовательности

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad (x'_k|k \in \mathbb{N})$$

γ-эквивалентны, если $x_k = x'_k$ для всех k принадлежащих некоторому множеству $A \in \gamma$. Введенное таким образом отношение *является отношением эквивалентности.* Его рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность же доказывается следующим рассуждением. Пусть γ-эквивалетны последовательности $(x_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x'_k|k \in \mathbb{N})$, а также последовательности $(x'_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x''_k|k \in \mathbb{N})$. Зто значит, что $x_k = x'_k$ для всех k принадлежащих некоторому множеству $A \in \gamma$, а также $x'_k = x''_k$ для всех k, принадлежащих некоторому множеству $B \in \gamma$. Но тогда $x_k = x''_k$ для всех k, принадлежащих множеству $A \cap B \in \gamma$, то есть последовательности $(x_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x''_k|k \in \mathbb{N})$ будут также γ-эквивалентны.

Замечание Мы говорили о классах γ-эквивалентности сходящихся к нулю последовательностей. Однако таким последовательностям могут оказаться γ-эквивалентными и последовательности вещественных чисел не сходящиеся к нулю. Например, если ультрафильтру γ принадлежит множество всех четных натуральных чисел, то ему не будет принадлежать множество всех нечетных натуральных чисел и поэтому последовательность $(x'_k|k \in \mathbb{N})$, совпадающая с последовательностью $(x_k = \frac{1}{k}|n \in \mathbb{N})$ для всех четных k и равная 1 для всех нечетных k не будет сходиться к нулю, но будет γ-эквивалентной сходящейся к нулю последовательности. Рассматривая бесконечно малые числа, как классы эквивалентности последовательностей, мы будем включать в них не только сходящиеся к нулю последовательности, но и γ-эквивалентные им не сходящиеся последовательности.

Каждый класс γ-эквивалентности рассматривается, как нестандартная точка из $(\mathbb{R}^*)^n$ бесконечно близкая к нулю. Так как любые последовательности $(x_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x'_k|k \in \mathbb{N})$, принадлежащие одному и тому же ростку, совпадают почти для всех $k \in \mathbb{N}$, то каждому ростку соответствует однозначно определяемая им бесконечно малая точка. Более того разным росткам может соответствовать одна и та же бесконечно малая точка. Таким образом структура бесконечно малых точек грубее структуры ростков. Множество всех бесконечно малых точек можно рассматривать, как линейное пространство, перенося на последовательности точек и затем на классы их γ-эквивалентности операции сложения точек линейного пространства $\mathbb{R}^n$ и умножения их на вещественные числа (точки линейного пространства $\mathbb{R}$).

Рассмотрим сначала бесконечно малые числа. Множество всех бесконечно малых чисел (классов γ-эквивалентности последовательностей вещественных чисел) обозначим через $\mathcal{I}^*$. Это множество можно превратить в упорядоченное кольцо, введя на нем соответствующим образом сложение, умножение и отношение порядка, согласованное с этими операциями.

Операции сложения бесконечно малых чисел определяются следующим образом. Пусть

$$(x_k|n \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad (x'_k|k \in \mathbb{N})$$

– произвольные представители двух бесконечно малых чисел, то есть классов γ-эквивалентности α и α'. Тогда в качестве суммы $\alpha+\alpha'$, берется класс γ-эквивалентности, содержащий последовательность $(x_k + x'_k|k \in \mathbb{N})$. Нетрудно доказать, что класс $\alpha+\alpha'$ не зависит от выбора представителей классов α и α'. Аналогично вводится умножение бесконечно малых чисел и их умножение на вещественные числа.

Рассмотрим теперь отношение порядка на $\mathcal{I}^*$, при котором любые два бесконечно малых числа оказываются сравнимыми. Пусть

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad (x'_k|k \in \mathbb{N})$$

– произвольные представители двух бесконечно малых чисел α и α'. Положим в $\mathcal{I}^*$

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) < (x'_k|k \in \mathbb{N}),$$

если $x_k < x'_k$ для всех k принадлежащих некоторому множеству $A \in \gamma$. Обозначим через $A_<$, $A_=$, $A_>$ – множества тех $k \in \mathbb{N}$, для которых мы имеем, соответственно, $x_k < x'_k$, $x_k = x'_k$, $x_k > x'_k$

Эти множества, очевидно, попарно не пересекаются и $A_< \cup A_= \cup A_> = \mathbb{N} \in \gamma$. Поэтому одно и только одно из этих множеств принадлежит γ и в соответствии с этим мы имеем один и только один из случаев:

$$(x_k|n \in \mathbb{N}) < (x'_k|k \in \mathbb{N}) \text{ то есть } \alpha < \alpha',$$

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) = (x'_k|k \in \mathbb{N}) \text{ то есть } \alpha = \alpha',$$

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) > (x'_k|k \in \mathbb{N}) \text{ то есть } \alpha > \alpha'.$$

Нетрудно доказать, что такое сравнение не зависит от выбора представителей классов эквивалентности.

Множество всех бесконечно малых точек можно рассматривать теперь, как $(\mathcal{I}^*)^n$, операции сложения его элементов и операция умножения на вещественные числа покомпонентны. Удобнее, однако, рассматривать непосредственно классы γ-эквивалентности последовательностей точек пространства $\mathbb{R}^n$ и оперировать с этими классами подобно тому, как мы оперировали с классами последовательностей вещественных чисел.

Битопологическая структура β_n на $\mathbb{R}^n$ определялась так, чтобы класс всех бинепрерывных отображений $(\mathbb{R}^n, \beta_n)$ в себя совпадал с классом всех кусочно линейных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя. Это совпадение обеспечивается сохранением при таких отображениях структуры сходимости, определяемой сходимостями $((x_k, \lambda x_k)|k \in \mathbb{N}) \longrightarrow (0,0)$. Изучение этой структуры сходимости представляет большие трудности даже после перехода от последовательностей к их росткам, поэтому переход к нестандартному анализу представляет значительный интерес.

2. Структура инфинитезимальныж лучей. Рассмотрим новую структуру, состоящую из так называемых инфинитезимальных лучей.

Определение. *Инфинитезимальным лучем* точки a будем называть любое множество $\{\lambda x + a | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$, где x – произвольно фиксированная ненулевая точка из $(\mathcal{I}^*)^n$, a – произвольная точка из $\mathbb{R}^n$.

В соответствии с этим определением каждое множество $\{x + a | x \in (\mathcal{I}^*)^n\} \setminus \{a\}$ разбивается на непересекающиеся инфинитезимальные лучи.

Определение. Совокупность всех инфинитезимальных лучей будем называть *стандартной инфинитезимальной структурой* на $\mathbb{R}^n$.

Определение. Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ сохраняет инфинитезимальную структуру, если его естественное продолжение $f^* : (\mathbb{R}^*)^n \longrightarrow (\mathbb{R}^*)^n$ переводит инфинитезимальные лучи в инфинитезимальные лучи.

Оказывается верным следующее утверждение.

Теорема. *Любое отображение $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является кусочно линейным отображением тогда и только тогда, когда оно сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру.*

Доказательство. Пусть f – кусочно линейное отображение. Докажем, что оно сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру. Достаточно доказать это только для случая когда a и $f(a)$ – нулевые точки, комбинируя f в случае необходимости с соответствующими линейными отображениями. Так как f – кусочно линейное отображение, то оно сохраняет β_n-сходимость в $\mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим $x \in (\mathcal{I}^*)^n, \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда x и λx принадлежат некоторому инфинитезимальному лучу. Точка x является классом последовательностей, пусть $(x_n|n \in \mathbb{N})$ – произвольная последовательность из этого класса. Тогда последовательность $(\lambda x_k|k \in \mathbb{N})$ является представителем класса λx. Так как отображение f кусочно линейно на каждом луче в $\mathbb{R}^n$, то $f^*(\lambda x) = \lambda f^*(x)$ и, тем самым, отображение f сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру. Пусть теперь известно, что f сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру. Докажем, что в этом случае f является кусочно линейным отображением, то есть сохраняет β_n-сходимость в $\mathbb{R}^{2n}$.

Допустим, что это не так и найдется последовательность $(x_k|k \in \mathbb{N})$, для которой

$$((x_k, \lambda x_k)|n \in \mathbb{N}) \longrightarrow_{\beta_n} O,$$

но

$$((f(x_k), f(\lambda x_k))|n \in \mathbb{N}) \not\longrightarrow_{\beta_n} O,$$

где O – нулевая точка в $\mathbb{R}^{2n}$ (мы опять можем свести общий случай сходимости в $\mathbb{R}^{2n}$ к случаю сходимости к нулевой точке). Рассмотрим тогда последовательности $(f(x_k)|k \in \mathbb{N})$ и $(f(\lambda x_k)|k \in \mathbb{N})$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ либо найдется такое $\mu_k > 0$, что $f(\lambda x_k) = \mu_k f(x_k)$, либо такого числа не найдется, то есть $f(\lambda x_k) \neq \mu f(x_k)$ для каждого $\mu \in \mathbb{R}$. Заметим теперь, что в силу нашего предположения относительно f-образа последовательности опять можем предположить, что f переводит нулевую точку в себя). Рассмотрим тогда последовательности $(f(x_k)|k \in \mathbb{N})$ и $(f(\lambda x_k)|k \in \mathbb{N})$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ либо найдется такое $\mu_k > 0$, что $f(\lambda x_k) = \mu_k f(x_k)$, либо такого числа не найдется, то есть $f(\lambda x_k) \neq \mu f(x_k)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$. Заметим, теперь, что в силу нашего предположения относительно f-образа последовательности $((x_k, \lambda x_k)|k \in \mathbb{N})$, либо множество $\{\mu_k | f(\lambda x_k) = \mu_k f(x_k)\}$ либо множество тех k, для которых $\{\mu | f(\lambda x_k) = \mu f(x_k)\} = \emptyset$, бесконечно. Действительно, если оба эти множества конечны, то последовательность $((f(x_k), f(\lambda x_k))|k \in \mathbb{N})$ будет объединением конечного числа, β_n-сходящихся к нулевой точке последовательностей и, следовательно, сама будет сходиться к нулевой точке.

Нам осталось рассмотреть отдельно два этих случая. В первом случае можно без нарушения общности считать, рассматривая, если надо, соответствующую подпоследовательность, что все μ_k различны. Переходя от последовательностей к соответствующим им классам γ-эквивалентности мы получаем бесконечно малые точки x, λx, $f(x)$, $f(\lambda x) = \lambda' x$, причем $\lambda' \notin \mathbb{R}$, что противоречит сохранению отображением f стандартной инфинитезимальной структуры. Во втором случае можно считать, что $f(\lambda x) = \lambda' x + y$, где λ' может, вообще говоря, принадлежать $\mathbb{R}^*$, но $y \neq \mu x$ ни для какого $\mu \in \mathbb{R}$, что опять противоречит сохранению отображением f стандартной инфинитезимальной структуры.

3. Кусочно линейные многообразия. Пусть $\mathbb{M}^n$ – некоторое n-мерное кусочно линейное многообразие. Это значит, что на соответствующем топологическом многообразии заданы карты атласов, определяющие это кусочно линейное многообразие. При этом, как нетрудно заметить, мы можем ограничиться атласами, карты которых являются областями гомеоморфными $\mathbb{R}^n$, с фиксированным на них гомеоморфизмами $g_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольно фиксированную точку a из $\mathbb{M}^n$, произвольную карту G, содержащую эту точку, и $g : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – фиксированный для этой карты гомеоморфизм. Этот гомеоморфизм переводит точку a в точку $g(a) \in \mathbb{R}^n$. Он переводит также классы γ-эквивалентности сходящихся к a последовательностей точек из G в классы γ-эквивалентности сходящихся к $g(a)$ последовательностей точек из $\mathbb{R}^n$. Обратное отображение g^{-1}, наоборот, переводит классы γ-эквивалентности сходящихся к $g(a)$ последовательностей точек из $\mathbb{R}^n$ в классы γ-эквивалентности сходящихся к a последовательностей точек из G. При этом отображение g^{-1} переводит инфинитезимальные лучи точки $g(a)$ в совокупности бесконечно близких к a точек, которые мы будем также называть инфинитезимальными лучами точки a. Можно доказать, что разбиение множества всех бесконечно близких к a точек на инфинитезимальные лучи не зависит от карты кусочно линейного многообразия. Действительно, пусть G' – другая карта рассматриваемого кусочно линейного многообразия, содержащая точку a, и g' – фиксированное для этой карты отображение на $\mathbb{R}^n$. Тогда частичное отображение $g'g^{-1}$, являющееся кусочно линейным отображением, переводит точку $g(a)$ в точку $g'(a)$ и каждый инфинитезимальный луч в точке $g(a)$ переводит в инфинитезимальный луч в точке $g'(a)$. Отсюда непосредственно следует независимость разбиения всего множества точек бесконечно близких к точке a на инфинитезимальные лучи.

Тем самым доказано, что на кусочно линейном многообразии $\mathbb{M}$ однозначно определена инфинитезимальная структура, определяющая, в свою очередь, его кусочно линейную структуру, как соответствующую совокупность всех ее атласов.

4. Представления инфинитезимальной структуры. Мы определили инфинитезимальную структуру кусочно линейного многообразия, как разбиение каждого множества точек бесконечно близких к точке из $\mathbb{M}$ на инфинитезимальные лучи. Сейчас мы уточним это понятие. Пусть M^n – множество точек кусочно линейного многообразия $\mathbb{M}^n$. Как нам известно, это кусочно линейное многообразие можно представить некоторым битопологическим пространством (M^n, β). Рассмотрим топологическое пространство (M^n, τ), являющееся топологическим многообразием (будем обозначать его просто через M^n) и произведение $M^n \times \mathcal{I}^{*n}$. Множество $M^n \times (\mathcal{I}^*)^n$, можно рассматривать как расслоенное пространство с базой $\mathbb{M}^n$ и слоями $\{a\} \times (\mathcal{I}^*)^n,\ a \in M^n$. На каждый такой слой $\{a\} \times (\mathcal{I}^*)^n$ можно перенести стандартную инфинитезимальную структуру. Для этого, как мы только что убедились, достаточно фиксировать некоторый кусочно линейный гомеоморфизм g пространства $\mathbb{R}^n$ на какую-нибудь окрестность точки a. Таким образом мы получаем интерпретацию кусочно линейной структуры на топологическом многообразии (M^n, τ) расслоенным пространством с базой M^n, слоями $\{a\}\times(\mathcal{I}^*)^n,\ a \in M^n$ и соответствующими инфинитезимальными структурами на слоях.

Возможна и другая интерпретация. В ней мы рассматриваем нестандартное n-мерное топологическое многообразие $(\mathbb{M}^*)^n$ и выделяем в нем конечную часть, состоящую из всех конечных точек этого пространство, то есть всех точек, каждая из которых бесконечно близка какой- нибудь точке из $\mathbb{M}^n$. Как множество, это ни что иное как $M^n \times (\mathcal{I}^*)^n$, но слои $\{a\} \times (\mathcal{I}^*)^n$ "повернуты" по другому.

§3. P-топологические многообразия

P-топологичесим пространством мы называли произвольное множество X, рассматриваемое вместе с фиксированной топологической структурой ζ, определенной на всем множестве PX его непустых подмножеств или же на некоторой его части. P-топологическим многообразием мы будем называть топологическое многообразие W, рассматриваемое вместе с фиксированной топологической структурой ζ на PW. Здесь, как и для битопологических многообразий, возникает проблема задания P-топологии на всем W посредством задания P-топологий на некоторых евклидовых областях $G_i \subset W$. И решается эта проблема в обоих случаях легче всего для локальных структур.

Как обычно *мы будем отождествлять точки с одноточечными множествами*, поэтому будем считать, что $X \subset PX$. При этом, P-топологическая структура ζ, заданная на X, индуцирует на X топологическую структуру $\tau = \zeta|X$, играющую существенную роль в определении локальной P-топологической структуры.

Определение. Будем говорить, что некоторая P-топологическая структура ζ локальна (является локальной P-топологической структурой), если множество $PX \setminus X$ и все его подмножества принадлежат ζ, а сходимости направленных систем множеств к точкам определяются их сходимостями в произвольных $\zeta|X$-окрестностях этих точек.

Замечание Для задания локальной P-топологической структуры на топологическом многообразии W, достаточно ввести попарно согласованные P-топологические структуры ζ_i на всех элементах G_i некоторого локально конечного покрытия W евклидовыми областями. Поэтому следует, прежде всего, рассмотреть различные P-топологические структуры на евклидовых пространствах.

1. P-топологические структуры на $\mathbb{R}^n$. В первой главе (раздел 8 и раздел 9) были определены и, до некоторой степени изучены, две локальные P-топологические структуры на $\mathbb{R}$. Сейчас мы рассмотрим некоторые сходимости в $P\mathbb{R}^n$.

1. Будем считать, что направленная система $(A_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $x \in \mathbb{R}^n$, если для любой окрестности U этой точки найдется такое λ_0, что для $\lambda \geq \lambda_0$ все $A_\lambda \subset U$.

2. Будем считать, что направленная система $(A_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $x \in \mathbb{R}^n$, если для любой окрестности U этой точки найдется такое λ_0, что для $\lambda \geq \lambda_0$ все $A_\lambda \subset U$ и все они попарно подобны.

3. Будем считать, что направленная система $(A_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $x \in \mathbb{R}^n$, если для любой окрестности U этой точки найдется такое λ_0, что для $\lambda \geq \lambda_0$ все $A_\lambda \subset U$ и все они подобны A_{λ_0} с центром подобия в точке x.

Все эти сходимости порождают структуры (квазитопологической, слабо топологической, топологической) сходимости в $\mathbb{R}^n$. При этом первые две определяют обычную топологическую структуру на $\mathbb{R}^n$, а третья – более тонкую топологическую структуру.

Действительно, в первом случае по определению сходимости для $A_\lambda = x_\lambda$ направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности U этой точки найдется такое λ_0, что для $\lambda \geq \lambda_0$ все $x_\lambda \subset U$. Но это и есть определение сходимости последовательностей точек в $\mathbb{R}^n$.

Во втором случае добавляется условие попарного подобия множеств A_λ, но все одноточечные множества попарно подобны, поэтому сходимости одноточечных множеств в первом случае и во втором случае совпадают.

В третьем случае в определение сходимости $(A_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ добавляется условие подобия множеств A_λ с центром подобия в точке x. Но это означает, что для одноточечных множеств $A_\lambda = x_\lambda$ сходимость имеет место, если для $\lambda \geq \lambda_0$ точки x_λ лежат на одном и том же луче, выходящем из точки x. Это существенное ограничение при $n > 1$ на сходимость последовательностей точек и поэтому такая сходимость определяет на $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ более тонкую топологичецкую структуру, чем стандартная. На $\mathbb{R}$ все три сходимости определяют одну и ту же стандартную топологическую структуру.

P-топологическая структура определенная в первом варианте (первого типа) может быть введена не только на $\mathbb{R}^n$, но вообще на любом топологическом пространстве (X,τ). Задание таких P-топологических структур на топологических пространствах не вводит ограничения на их непрерывные отображения. Действительно, пусть ζ и ζ' - P-топологические структуры на множествах X и X', а $\tau = \zeta|X$ и $\tau' = \zeta'|X'$ топологические структур на этих множествах. Пусть

$$f : (X.\tau) \longrightarrow (X', \tau')$$

непрерывное отображение и

$$(A_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow x,$$

то есть для любой τ-окрестности U точки x найдется такое λ_0, что $A_\lambda \subset U$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$. Пусть, далее, U' – произвольная τ'-окрестность точки $f(x)$. Так как f - непрерывное отображение, найдется такое U, что $f(U) \subset U'$ и поэтому $f(A_\lambda) \subset U'$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$. отсюда следует, что

$$(f(A_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(x).$$

и поэтому $Pf : (PX, \zeta) \longrightarrow (PX', \zeta')$ – непрерывное отображение.

P-топологическая структура определенная во втором варианте на произвольном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ конечно накладывает некоторые ограничения на непрерывные отображения $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, но характер этих ограничений пока не поддается описанию.

P-топологическая структура определенная в третьем варианте на произвольном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выделяет простой класс непрерывных отображений $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, а именно класс преобразований подобия.

§4. Битопологические группы

1. Постановка проблемы. История создания продвинутой теории битопологических групп, естественно обобщающей теорию топологических групп, была достаточно полно описана в книге "Битопологические пространства" (Записки научных семинаров ПОМИ, том 242, 1997г.) и здесь мы не будем к ней возвращаться, перейдя сразу к общему понятию битопологической группы. Дальнейшее изложение здесь теории битопологических групп в основном повторяет содержание этой книги с некоторыми сокращениями.

Определение. *Битопологической группой* будем называть пару (G,β), где G – некоторая группа, β – битопологическая структура на множестве G, такие, что отображения

$$p:(G,\beta)\times(G,\beta)\longrightarrow(G,\beta),\quad p(x,y)=xy,$$

$$q:(G,\beta)\longrightarrow(G,\beta),\quad q(x)=x^{-1}$$

бинепрерывны, то есть отображения $\overline{p}=p\times p$ и $\overline{q}=q\times q$ являются непрерывными отображениями соответствующих топологических пространств,

$$\overline{p}((x,y),(x',y'))=(xx',yy'),$$

$$\overline{q}(x,y)=(x^{-1},y^{-1}).$$

Пусть (G,τ_1) и (G,τ_2) – топологические группы. Нетрудно доказать, что $(G,\tau_1\times\tau_2)$ – битопологическая группа в только что определенном понимании. Действительно, в этом случае $(G,\beta)\times(G,\beta)=(G,\tau_1\times\tau_2)\times(G,\tau_1\times\tau_2)=(G\times G,\tau_1\times\tau_1,\tau_2\times\tau_2)$. Соответствующее топологическое пространство есть не что иное, как $(G\times G,\tau_1\times\tau_1)\times(G\times G,\tau_2\times\tau_2)$ и $\overline{p}$ отображает $(G\times G,\tau_1\times\tau_1)\times(G\times G,\tau_2\times\tau_2)$ в топогическое пространство $(G\times G,\tau_1\times\tau_2)=(G,\tau_1)\times(G,\tau_2)$. Это отображение $\overline{p}=(\overline{p}_1,\overline{p}_2)$ непрерывно, так как непрерывны его составляющие

$$\overline{p}_1:(G\times G,\tau_1\times\tau_1)\longrightarrow(G,\tau_1)$$

$$\overline{p}_2:(G\times G,\tau_2\times\tau_2)\longrightarrow(G,\tau_2).$$

Аналогично, оказывается непрерывным и отображение $\overline{q}=(\overline{q}_1,\overline{q}_2)$, так как непрерывны его составляющие

$$\overline{q}_1:(G,\tau_1)\longrightarrow(G,\tau_1),\overline{q}_1(x)=x^{-1}$$

$$\overline{q}_2:(G,\tau_2)\longrightarrow(G,\tau_2),\overline{q}_2(y)=y^{-1}.$$

Таким образом, если (G,τ_1) и (G,τ_2) – топологические группы, то $(G,\tau_1\times\tau_2)$ – битопологическая группа, очевидно и обратное утверждение. В качестве τ_1 можно взять для любой группы G дискретную топологическую структуру, а в качестве τ_2 – тривиальную. Это доказывает существование разложимой битопологической группы $(G,\tau_1\times\tau_2)$ с $\tau_1\neq\tau_2$ для любой группы G кроме, конечно, одноэлементной.

С другой стороны, если $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, то (G, τ) – топологическая группа тогда и только тогда, когда $(G, \tau \times \tau)$ – битопологическая группа. Таким образом рассматриваемое нами сейчас понятие битопологической группы является естественным обобщением понятия топологической группы. С другой стороны, это существенно битопологическое понятие, так как существуют неразложимые битопологические в этом смысле группы.

Пример. Пусть G – произвольная не одноэлементная коммутативная группа. Рассмотрим множества $U_z = \{(x,y)|xy^{-1} = z\}$, для всех $z \in G$. Если $z_1 \neq z_2$, то $U_{z_1} \cap U_{z_2} = \emptyset$. Такие множетва, в совокупности, образуют базу некоторой топологической структуры β на $G \times G$.

Докажем, что (G, β) является битопологической группой, то есть отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta),$$

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

непрерывны. Для этого достаточно доказать справедливость следующих соотношений:

$$\overline{p}^{-1}(U_z) = \bigcup U_{z_1} \times U_{z_2} | z_1 z_2 = z$$

$$\overline{q}{-}1(U_z) = U_{z^{-1}},$$

которые, в свою очередь, следуют из следующих эквивалентностей:

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \overline{p}^{\,-1}(U_z) \iff \overline{p}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in U_z \iff$$

$$(x_1x_2, y_1y_2) \in U_z \iff (x_1x_2)(y_1y_2)^{-1} = z \iff (x_1y_1^{-1})(x_2y_2^{-1}) = z$$

$$\iff x_1y_1^{-1} = z_1, x_2y_2^{-1} = z_2, z_1z_2 = z \iff$$

$$(x_1,y_1) \in U_{z_1}, (x_2,y_2) \in U_{z_2}, z_1z_2 = z \iff$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in U_{z_1} \times U_{z_2}, z_1z_2 = z \iff$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \bigcup (U_{z_1} \times U_{z_2} | z_1z_2 = z$$

$$(x,y) \in \overline{q}^{\,-1}(U_z) \iff \overline{q}(x,y) \in U_z \iff (x^{-1}, y^{-1}) \in U_z \iff$$

$$x^{-1}y = z \iff xy^{-1} = z^{-1} \iff (x,y) \in U_{z^{-1}}.$$

Такая битопологическая группа (G,β) будет неразложимой битопологической группой, она не будет даже локально разложимой битопологической группой. Например, открытое в (G,β) множество Δ не представимо объединением прямоугольных окрестностей его точек в (G,β).

Для некоммутативных групп, коммутант которых не совпадает со всей группой, было предложено свое построение неразложимой битопологической группы. Пусть G' – коммутант группы G. Рассмотрим множества $U_z = \{(x,y)|xy^{-1} \in zG'\}$. Любые два из таких множеств либо совпадают либо не имеют общих точек. Это следует из того, что z_1G' и z_2G', являясь смежными классами разложения группы G по ее нормальному делителю G', либо совпадают (в том случае когда $z_1z_2^{-1} \in G'$) либо не имеют общих элементов. Множества U_z, взятые по всем $z \in G$ образуют базу топологической структуры β' на $G\times G$. Доказательство бинепрерывности отображений p и q при таком определении битопологической группы (G,β') осуществляется по той же схеме, что и в коммутативном случае. различие будет состоять лишь в том, что вместо условий типа $u = z$ рассматриваются условия типа $u \in zG'$. При этом используется тот факт, что факторгруппа G/G' является коммутативной группой.

2. Прямые и косые битопологические группы. Понятие битопологической группы, как группы G с фиксированной на ней битопологической структурой β, то есть пары (G,β), при условии бинепрерывности отображений

$$p : (G,\beta) \times (G,\beta) \longrightarrow (G,\beta), \quad p(x,y) = xy,$$

$$q : (G,\beta) \longrightarrow (G,\beta), \quad q(x) = x^{-1}$$

представляется, на первый взгляд, единственной основой теории битопологических групп. Оно выгодно отличается от других, имеющихся в литературе, вариантов и свободно от их недостатков. Однако, как можно заметить, возможен и другой, не менее интересный вариант, отличающийся от уже описанного. Он получается заменой условия непрерывности отображения $\overline{q}$ (бинепрерывности отображения q) на условие непрерывности отображения

$$\overline{r} : (G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta), \quad \overline{r}(x,y) = (y^{-1},x^{-1}).$$

Это новое условие может быть записано, как условие бинепрерывности отображения $q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$, где $\beta^{-1} = \{U^{-1} | U \in \beta\}$, $U^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in U\}$.

Битопологическую группу в таком понимании будем называть *косой битопологической группой*. Примером косой битопологической группы является битопологическая прямая (R, τ_r, τ_l), рассматриваемая, как группа относительно сложения вещественных чисел. Здесь

$$\tau_r = \{\emptyset, R, (x, \infty) | x \in R\},$$

$$\tau_l = \{\emptyset, R, (-\infty, x) | x \in R\}.$$

Множества $U_{x,y} = (x, \infty) \times (-\infty, y), \{x, y\} \subset R\}$ образуют, в совокупности, базу топологической структуры β на $R \times R$. Соответственно, множества $U_{x,y}^{-1} = (-\infty, y) \times (x, \infty)$ образуют, в совокупности, базу битопологической структуры β^{-1}. Проверим непрерывность отображений $\overline{p}$ и $\overline{r}$.

$\overline{p}^{\,-1}(U_{x_0,y_0}) = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) | x_1 + x_2 > x_0, y_1 + y_2 < y_0\} = \{((x_1, y_1), (x_2.y_2)) | x_1 + x_2 > x_0\} \cap \{((x_1, y_1), (x_2.y_2)) | y_1 + y_2 < y_0\} = (\bigcup[(x_1, \infty) \times R \times (x_2, \infty) \times R] | x_1 + x_2 > x_0) \cap (\bigcup[R \times (-\infty, y_1) \times R \times (-\infty, y_2)] | y_1 + y_2 < y_0) \in \tau_r \times \tau_l \times \tau_r \times \tau_l$

$\overline{q}^{\,-1}(U_{x_0,y_0}^{-1}) = \{(x, y) | (-y, -x) \in U_{x_0,y_0}\} = \{(x, y) | -y \in (x_0, \infty), -x \in (-\infty, y_0\} = \{(x, y) | x \in (-y_0, \infty), y \in (-\infty, -x_0 = U_{-y_0,-x_0} \in \tau_r \times \tau_l$

Если β – симметричная битопологическая структура, то понятия битопологической группы (G, β) и косой битопологической группы (G, β) для нее совпадают, так как в этом случае $\beta = \beta^{-1}$.

На первый взгляд представляется возможным использовать идею скашивания битопологических групп и посредством изменения основного условия бинепрерывности

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta),$$

которое мы назовем условием 1. Это означает переход к условию бинепрерывности одного из следующих отображений:

2) $$p : (G, \beta) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta)$$

3) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

4) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta)$$

5) $$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

6) $$p : (G, \beta) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

7) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

8) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

– всего восемь различных условий.

Однако, как было доказано в упомянутой выше книге, других вариантов нет. Действительно, каждое из условий 1–8 выполняется тогда и только тогда, когда выполняется двойственное ему условие, получаемое из исходного заменой β на β^{-1}. Дело в том, что переход от β к β^{-1} соответствует перестановке координат в $G \times G$, то есть переходу от точек (x, y) к точкам (y, x). Так как

$$(p \times p)\,((y, x), (y', x')) = (yy', xx'),$$

то непрерывность исходного отображения в точке $((y, x), (y', x'))$ означает непрерывность двойственного отображения в точке $((y, x), (y', x'))$. Поэтому достаточно рассмотреть условия 2–4. Мы докажем, что выполнение любого из условий 2–4 влечет симметричность битопологической структуры β.

Действительно, в этой ситуации одно из отображений

$$p : \{(1,1)\} \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta),$$
$$p : (G, \beta) \times \{(1,1)\} \longrightarrow (G, \beta)$$

бинепрерывно, следовательно $\beta \subset \beta^{-1}$, отсюда, заменяя β на β^{-1}, получаем $\beta^{-1} \subset \beta$ и поэтому $\beta = \beta^{-1}$.

Таким образом мы доказали, что условия 2–4 сильнее условия 1, что и означает невозможность “скашивания” за счет изменения условий 1 или 8.

§5. Некоторые определения и конструкции

В этом параграфе будут изложены некоторые элементарные понятия и конструкции общей теории битопологических групп. Под битопологической группой будет пониматься пара (G, β), удовлетворяющая условию непрерывности отображения $\overline{p}$,

$$\overline{p} : (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \overline{p}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) =$$
$$= (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

и отображения $\overline{q}$,

$$\overline{q} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \overline{q}(x, y) = (x^{-1}, y^{-1})$$

или же (в косом варианте) отображения $\overline{r}$,

$$\overline{r} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \overline{r}(x, y) = (y^{-1}, x^{-1})$$

1. Битопологические подгруппы и факторгруппы.

Определение. Пусть (G, β) – битопологическая группа и G' подгруппа группы G. Так как $G' \times G' \subset G \times G$, то топологическая структура β определяет на $G' \times G'$ топологическую структуру β' подпространства $(G' \times G', \beta')$ топологического пространства $(G \times G, \beta)$. Битопологическое пространство (G', β'), удовлетворяющее соответствующим условиям в прямом и косом вариантах будем называть *битопологической подгруппой* битопологической группы (G, β).

Замечание. Отображения $\overline{p}$ и $\overline{q}$ (или $\overline{r}$) сопоставляют точкам пространств $(G' \times G', \beta') \times (G' \times G', \beta')$ и $(G' \times G', \beta')$ точки пространства $(G' \times G', \beta')$. С другой стороны, эти топологические пространства являются подпространствами топологических пространств $(G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta)$ и $(G \times G, \beta)$, сответственно. В силу этого ограничения $\overline{p}'$, $\overline{q}'$ (или $\overline{r}'$) отображений $\overline{p}$, $\overline{q}$ (или $\overline{r}$) на эти подпространства будут непрерывными отображениями. Таким образом, то что мы назвали битопологической подгруппой дуйствительно является биитопологической группой.

Пусть (G, β) – битопологическая группа и G' – нормальный делитель группы G. Разложению группы G на смежные классы нормального делителя G' соответствует разбиение множества $G \times G$ на попарно непересекающиеся множества $aG' \times bG'$, $a \in G$, $b \in G$. Это разбиение определяет факторпространство $(G'' \times G'', \beta'')$. Здесь G'' – факторгруппа группы G по нормальному делителю G', а β'' – топологическая структура факторпространства пространства $(G \times G, \beta)$ по указанному разбиению множества $G \times G$. Отображение $\overline{u} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G'' \times G'', \beta'')$, где $\overline{u}(x, y) = xG' \times yG'$ будет, очевидно, непрерывным отображением. Естественно определяются отображения $\overline{p}''$ и $\overline{q}''$ (или $\overline{r}''$), при этом диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (G\times G,\beta)\times(G\times G,\beta) & \xrightarrow{\overline{p}} & (G\times G,\beta) \\ {\scriptstyle \overline{u}\times\overline{u}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{u}}\big\downarrow \\ (G''\times G'',\beta'')\times(G''\times G'',\beta'') & \xrightarrow{\overline{p}''} & (G''\times G'',\beta'') \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} (G\times G,\beta) & \xrightarrow{\overline{q}} & (G\times G,\beta) \\ {\scriptstyle \overline{u}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{u}}\big\downarrow \\ (G''\times G'',\beta'') & \xrightarrow{\overline{q}''} & (G''\times G'',\beta'') \end{array} \tag{2}$$

или же (в косом варианте)

$$\begin{array}{ccc} (G\times G,\beta) & \xrightarrow{\overline{r}} & (G\times G,\beta) \\ {\scriptstyle \overline{u}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{u}}\big\downarrow \\ (G''\times G'',\beta'') & \xrightarrow{\overline{r}''} & (G''\times G'',\beta'') \end{array} \tag{3}$$

будут коммутативны.

Из непрерывности отображений $\overline{p},\overline{q}$ (или $\overline{r}$), $\overline{u}$, и коммутативности диаграмм следует непрерывность отображений p, q (или r). Отсюда следует, что (G'',β'') можно называть битопологической факторгруппой (в обоих вариантах) битопологической группы (G,β) по нормальному делителю $G'\subset G$, $G''=G/G'$.

2. Прямые произведения и свободные объединения битопологических групп. Пусть $((G_\lambda,\beta_\lambda)|\lambda\in\Lambda)$ – семейство битопологических групп, (G,β) – прямое произведение битопологических пространств $(G_\lambda,\beta_\lambda)$, взятое по всем $\lambda\in\Lambda$. Здесь $G=\prod G_\lambda|\lambda\in\Lambda$ – группа, являющаяся прямым произведением всех групп $G_\lambda,\lambda\in\Lambda$, а топологическая структура β на $G\times G$ построена следующим образом:

Рассматриваются координатные проекции

$$\mathrm{pr}_\lambda : G\longrightarrow G_\lambda, \lambda\in\Lambda, \quad \mathrm{pr}_\mu(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)=x_\mu,$$

и отображения

$$\mathrm{pr}_\lambda\times\mathrm{pr}_\lambda : G\times G\longrightarrow G_\lambda\times G_\lambda.$$

Топологическая структура β порождается множествами $(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(U)$, взятыми по всем $\lambda \in \Lambda$ и по всем $U \in \beta_\lambda$. Иначе говоря, β есть наименьшая из топологических структур β' на множестве $G \times G$, для которых все $\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda : (G \times G, \beta') \longrightarrow (G_\lambda \times G_\lambda, \beta_\lambda)$ непрерывны.

Докажем тепепь, что (G, β) является битопологической группой. Заметим, прежде всего, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(G,\beta)\times(G,\beta)) \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_\lambda\times\mathrm{pr}_\lambda"'] & (G,\beta) \arrow[d, "\mathrm{pr}_\lambda"'] \\
(G_\lambda,\beta_\lambda)\times(G_\lambda,\beta_\lambda) \arrow[r, "\overline{p}_\lambda"] & (G_\lambda,\beta_\lambda)
\end{tikzcd}$$

коммутативна для каждого $\lambda \in \Lambda$.

Действительно,

$$(\mathrm{pr}_\lambda)\overline{p}((x,y),(x',y')) = \mathrm{pr}_\lambda(xx',yy') = ((xx')_\lambda,(yy')_\lambda) = (x_\lambda x'_\lambda, y_\lambda y'_\lambda)$$

$$\overline{p}_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)((x,y),(x',y')) = \overline{p}_\lambda((x_\lambda,y_\lambda),(x'_\lambda,y'_\lambda)) = (x_\lambda x'_\lambda, y_\lambda y'_\lambda)$$

что доказывает коммутативность диаграммы. С другой стороны, множества $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U)$, взятые по всем $\lambda \in \Lambda$ и $U \in \beta_\lambda$ порождают топологическую структуру β на множестве $G \times G$, поэтому непрерывность $\overline{p}$ будет доказана, если все $\overline{p}^{\,-1}(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U))$ – открытые множества. Но последнее утверждение следует из коммутативности той же диаграммы и бинепрерывности отображений $\overline{p}_\lambda$ и pr_λ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Пусть (G, β) – некоторая битопологическая группа, прямая или косая. Рассмотрим отображения

$$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

$$q : (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

$$r : (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta)$$

– для косого варианта.

Нетрудно доказать, что эти отображени бинепрерывны, если бинепрерывны отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

$$r : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

– для косого варианта.

Тем самым оказывается справедливым следующее утверждение:

Если (G, β) – битопологическая группа, то и (G, β^{-1}) – битопологическая группа, соответственно прямая или косая.

§6. Битопологические и топологические группы

1. Диагональная топологическая группа.

Определение. Пусть (G, β) – произвольно фиксированная битопологическая группа (прямая или косая) с умножением

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta), \quad p(x, y) = xy,$$

и обращением элементов

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta), \quad q(x) = x^{-1}$$

или, (в косом варианте),

$$r : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1}), \quad q(x) = x^{-1}.$$

Отображения

$$\overline{p} : (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta),$$
$$\overline{p}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

и отображения $\overline{q}$,

$$\overline{q} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \ \overline{q}(x, y) = (x^{-1}, y^{-1}),$$

для прямой битопологической группы,

$$\overline{r} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \ \overline{r}(x, y) = (x^{-1}, y^{-1}),$$

для косой битопологической группы, будут непрерывными отображениями.

Тогда определено отображение $j : G \longrightarrow G \times G$, которое мы будем называть *диагональным вложением*, $j(x) = (x, x)$ для каждого $x \in G$.

Замечание. Пусть $\tau = \beta | G$ – топологическая структура на G, индуцируемая топологической структурой β при вложении $j : G \longrightarrow$

$G \times G$. Нетрудно заметить, что (G,τ) будет топологической группой при умножении и обращении элементов, индуцированными умножением и обращением на битопологической группе (G,β).

Будем, для простоты изложения, отождествлять x с (x,x) для каждого $x \in G$. Тогда группа G будет подмножеством множества $G \times G$, (G,τ) будет подпространством топологического пространства $(G \times G,\beta)$, $(G,\tau)\times(G,\tau)$ будет подпространством топологического пространства $(G \times G,\beta)\times(G \times G,\beta)$.

Умножение $\overline{p}$ на $(G \times G,\beta)$ индуцирует на (G,τ) умножение p, а именно

$$p(x,y) = \overline{p}((x,x),(y,y)) = (xy,xy) = xy.$$

Аналогично, обращение элементов на $(G \times G,\beta)$ индуцирует на (G,τ) обращение элементов, а именно

$$q(x) = \overline{q}(x,x) = (x^{-1},x^{-1}) = x^{-1},$$

как для косой так и для прямой битопологической группы $(G\beta)$. Непрерывность такого умножения и такого обращения элементов в (G,τ) следует из того, что они являются просто ограничениями на соответствующие подпространства операций умножения и обращения элементов в битопологической группе (G,β), неважно прямой или косой.

2. Диагональный функтор. Определенное выше сопоставление каждой битопологической группе (G,β) топологической группы (G,τ), где $\tau = \beta|G$, имеет функторный характер, то есть каждый бинепрерывный гомоморфизм переходит при этом в непрерывный гомоморфизм, соответствующих топологических групп.

Действительно, пусть

$$\varphi : (G,\beta) \longrightarrow (G',\beta')$$

– бинепрерывный гомоморфизм битопологических групп. Тогда можно считать, что то же самое отображение φ является непрерывным гомоморфизмом группы (G,τ) в группу (G',β'), так как, в силу принятого ранее соглашения, $G \subset G \times G$, а потому отображения p и q, соответственно r, являются ограничениями отображений $\overline{p}$ и $\overline{q}$, соответственно $\overline{r}$.

Нетрудно проверить, что тем самым определен ковариантный функтор $\mathcal{P}$, определенный на категории TG_+ и категории TG_- всех битопологических групп (прямых и, соответственно, косых) и их бинепрерывных гомоморфизмов в категорию TG топологических групп и их непрерывных гомоморфизмов. С другой стороны каждой топологической группе (G, τ) можно однозначно сопоставить битопологическую группу $(G, \tau \times \tau)$, для которой $\overline{p} = p \times p$ и $\overline{q} = q \times q$. Любой непрерывный гомоморфизм φ переходит при этом в бинепрерывный гомоморфизм $\varphi \times \varphi$.

Нетрудно проверить, что тем самым определен ковариантный функтор $\mathcal{I}$, определенный на категории всех топологических групп и их непрерывных гомоморфизмов, в категорию всех битопологических групп (прямых или, соответственно, косых) и их бинепрерывных гомоморфизмов. Нетрудно также заметить, что композиция этих функторов $\mathcal{PI}$ является тождественным функтором. Таким образом каждую из категорий битопологических групп (прямых и, соответственно, косых) можно рассматривать, как детализации категории топологических групп.

Функтор $\mathcal{I}$ вкладывает категорию TG в общую часть категорий TG_+ и TG_-. Можно считать, условившись о соответствующих отождествлениях, что TG просто содержится в этих категориях. При таком предположении можно считать, что функтор $\mathcal{P}$ является ретракцией категорий TG_+ и TG_- на их подкатегорию TG.

3. Горизонтальные и вертикальные вложения. Ограничение структуры битопологической группы (G, β) на диагональ $\Delta \subset G \times G$ определяет, как мы убедились, топологическую группу $(G, \beta|G)$. При этом топологическая группа $(G, \beta|G)$ не зависит от того была ли битопологическая группа (G, β) прямой или косой (на диагонали разница между ними стирается). Рассматривая ограничения структуры битопологической группы на горизонтальные и вертикальные множества мы приходим к другой ситуации.

Пусть
$$h_b : G \longrightarrow G \times \{b\}, \;\; h_b(x) = (x, b)$$
$$v_a : G \longrightarrow \{a\} \times G, \;\; v_a(y) = (a, y).$$

Эти отображения являются вложениями G в $(G \times G, \beta)$, они позволяют индуцировать на G топологические структуры $h_b^{-1}(\beta)$ и $v_a^{-1}(\beta)$, h_b и v_a становятся топологическими вложениями $(G, h_b^{-1}(\beta))$ и (G, v_a^{-1}) в $(G \times G, \beta)$ – горизонтальным и, соответственно, вертикальным вложениями.

В частности, мы имеем вложения

$$h_1 : G \longrightarrow G \times \{1_G\}, \ h_1(x) = (x, 1_G),$$

$$v_1 : G \longrightarrow \{1_G\} \times G, \ v_1(y) = (1_G, y).$$

Эти вложения мы будем называть *стандартными*.

Расмотрим также следующие вложения G в $(G{\times}G.\beta){\times}(G{\times}G.\beta)$:

$$h_{c,d;1} : G \longrightarrow (G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta), \ h_{c,d;1}(x) = (c, d, x, 1_G),$$

$$h_{1;c.d} : G \longrightarrow (G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta), \ h_{1;c,d}(x) = (x, 1_G; c, d).$$

Нетрудно заметить, что топологическая структура $\beta \times \beta$ индуцирует на G посредством $h_{c,d;1}$ и $h_{1;c.d}$ одну и ту же топологическую структуру τ_1 для всех c и d из G. Иначе говоря, для любых c и d из G эти отображения являются топологическими вложениями (G, τ_1) в $(G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta)$. Нас будут интересовать, главным образом, вложения $h_{c,1;1}$ и $h_{1;c.1}$, их мы будем называть *стандартными* для любого $c \in G$. Образуем теперь композицию $h_1^{-1} p h_{c,1;1}$, являющуюся непрерывным отображением (G, τ_1) в себя, $h_1^{-1} p h_{c,1;1}(x) = cx$ – левый сдвиг на G. Отображение $h_1^{-1} p h_{c^{-1},1;1}$ даст нам обратный левый сдвиг, так как $h_1^{-1} p h_{c^{-1},1;1}(cx) = x$. Следовательно $h_1^{-1} p h_{c,1;1}$ топологическое отображение (G, τ_1) на себя для каждого $c \in G$. Правые сдвиги мы получаем композицией $h_1^{-1} p h_{1;c,1}$. Таким образом, битопологической группе (G, β) соответствует группа (G, τ_1) с непрерывными левыми и правыми сдвигами. Если (G, β) – прямая битопологическая группа, то в (G, τ_1) непрерывно и обращение элементов.

Аналогичная ситуация возникает при переходе от горизонтальных вложений $h_{c,d;1}$ и $h_{1;c,d}$ к вертикальным вложениям $v_{c,d;1}$ и $v_{1;c,d}$, а именно:

$$v_{c,d;1} : G \longrightarrow (G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta), \ v_{c,d;1}(y) = (c, d, 1_G, y),$$

$$v_{1;c,d} : G \longrightarrow (G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta), \ v_{1;c,d}(y) = (1_G, y, c, d).$$

Топологическая структура $\beta \times \beta$ индуцирует на G посредством вложений $v_{c,d;1}$ и $v_{1;c,d}$ одну и ту же топологическую структуру τ_2 для всех c и d из G. Введя стандартные вложения $v_{c,1;1}$ и $v_{1;c,1}$ и образовав композиции $v_1^{-1} p v_{c,1;1}$ и $v_1^{-1} p v_{1;c,1}$ мы получаем непрерывные левые и правые сдвиги на (G, τ_2).

Если (G, β) прямая битопологическая группа, то в (G, τ_1) непрерывно и обращение элементов. Для косой битопологической группы операция обращения элементов определяет топологический изоморфизм групп (G, τ_1) и (G, τ_2). В отличие от диагонального вложения, горизонтальные и вертикальные вложения отличают прямые битопологические группы от косых.

§7. Конечные битопологические группы

1. Описание конечных прямых битопологических групп. Рассмотрим произвольную конечную прямую битопологическую группу (G, β). Пусть U – наименьшее открытое в $(G \times G, \beta)$ множество, содержащее точку $(1,1)$, где 1 – единица группы G. Само множество $G \times G$ можно рассматривать, как прямое произведение группы G на себя, элемент $(1,1)$, как единицу группы $G \times G$, умножение элементов группы $G \times G$ покомпонентное.

Лемма 1. *Если $(x, y) \in U$ то $(x^{-1}, y^{-1}) \in U$.*

Доказательство. Пусть $(x, y) \in U$, тогда множество $(x^{-1}, y^{-1})U$ содержит $(1,1)$, так как $(x^{-1}, y^{-1})(x, y) = (1,1)$. Множество $U \cap (x^{-1}, y^{-1})U$ также содержит единицу группы $G \times G$ и потому $U \cap (x^{-1}, y^{-1})U = U$, в силу минимальности U. Более того $(x^{-1}, y^{-1})U = U$, в силу конечности U, следовательно $(x^{-1}, y^{-1}) \in U$.

Лемма 2. *Если $(x_1, y_1) \in U$ и $(x_2, y_2) \in U$, то*

$$(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) \in U.$$

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1) \in U$ и $(x_2, y_2) \in U$, тогда, в силу леммы 1, $(x^{-1}, y^{-1}) \in U$ и, следовательно, $(1,1) \in U$. Поэтому $U \cap (x_1, y_1)U = U$, в силу минимальности U. Более того, $(x_1, y_1)U = U$, в силу конечности U. Но так как и $(x_2, y_2) \in U$, то и $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in U$.

Следствие. *Наименьшее открытое в $(G \times G, \beta)$ множество, содержащее $(1,1)$, является подгруппой группы $G \times G$.*

Лемма 3. *Наименьшее открытое в $(G \times G, \beta)$ множество, содержащее $(1,1)$, является нормальным делителем группы $G \times G$.*

Доказательство. Как уже доказано, наименьшее открытое в $(G \times G, \beta)$, содержащее единицу, является подгруппой группы $G \times G$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент (x, y) в G и множество $(x, y)U(x^{-1}, y^{-1})$. Это множество открыто в $(G \times G, \beta)$ и содержит $(1, 1)$ группы $(G \times G)$ и потому $U \cap (x, y)U(x^{-1}, y^{-1}) = U$, в силу минимальности U. Более того$(x, y)U(x^{-1}, y^{-1}) = U$, в силу конечности U. Последнее означает, что U – нормальный делитель.

Лемма 4. *Каждый класс смежности минимального открытого в $(G \times G, \beta)$, содержащего $(1, 1)$, является минимальным открытым в $(G \times G, \beta)$ множеством.*

Доказательство. Очевидно.

Лемма 5. *Битопологическая структура β состоит из всевозможных объединений классов смежности минимального открытого в $(G \times G, \beta)$ множества U, содержащего $(1, 1)$.*

Доказательство. Очевидно.

Теорема. *Пусть G – произвольная конечная группа. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями группы $G \times G$ и всеми прямыми битопологическими группами на G.*

Доказательство. Пусть G – произвольная конечная группа и U – некоторый нормальный делитель группы $G \times G$, β – топологическая структура на $G \times G$, состоящая из всевозможных объединений смежных классов нормального делителя U в группе $G \times G$. Положим $\overline{p}((x, y), (x', y')) = (xx', yy')$, $\overline{q}(x, y) = (x^{-1}, y^{-1})$ и докажем, что отображения

$$\overline{p} : (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta),$$

$$\overline{q} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta),$$

непрерывны. Для этого достаточно доказать, что

$$\overline{p}^{\,-1}((x, y)U) \in \beta \times \beta, \qquad \overline{q}^{\,-1}((x, y)U) \in \beta.$$

Но

$$\overline{p}((x_1, y_1)U \times (x_2, y_2)U) = \overline{p}((x_1, y_1)(x_2, y_2)U \times U) = \\ = (x_1x_2, y_1y_2)U = (x, y)U$$

для $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$. С другой стороны, если

$$\overline{p}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (x, y)U,$$

то $x_1x_2 = xv$, $y_1y_2 = yw$, где $(v, w) \in U$ и поэтому

$$(x_1, y_1) \in (x_1, y_1)U, \quad (x_2y_2) \in (x_2v^{-1}, y_2w^{-1})U,$$

то есть

$$((x_1, y_1)(x_2, y_2)) \in (x_1, y_1)U \times (x_2v^{-1}),$$

$y_2w^{-1}U$, причем $x_1x_2v^{-1} = x, y_1y_2w^{-1} = y$. Отсюда следует, что

$$\overline{p}((x, y)U) = \bigcup (x_1, y_1)U \times (x_2, y_2)U | x_1x_2 = x, \quad y_1y_2 = y,$$

что и доказывает непрерывность отображения $\overline{p}$.

Непрерывность отображения $\overline{q}$ следует из равенства

$$\overline{q}^{-1}((x, y)U) = (x^{-1}, y^{-1})U.$$

Обратное заключение теоремы следует из лемм 1–5.

Замечание. Минимальное открытое в $(G \times G, \beta)$, множество U, содержащее $(1, 1)$, имеет вид $N_1 \times N_2$, где N_1 и N_2 являются нормальными делителями группы G. Здесь $N_1 = \{x | (x, y) \in U\}$, $N_2 = \{y | (x, y) \in U\}$.

2. Описание конечных косых битопологических групп. Рассмотрим произвольную конечную косую битопологическую группу (G, β). Пусть U – наименьшее открытое в (G, β) множество, содержащее точку $(1, 1)$, где 1 – единица группы G. Само множество $G \times G$ можно рассматривать, как прямое произведение группы G на себя, элемент $(1, 1)$, как единицу группы $G \times G$, умножение элементов группы $G \times G$ покомпонентное.

Так как доказательства лемм 1–5 предыдущего раздела используют только непрерывность отображения

$$\overline{p} : (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta),$$

то эти леммы будут справедливы и для косого варианта. Однако непрерывность отображения

$$\overline{r} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \quad \overline{r}(x, y) = (y^{-1}, x^{-1})$$

позволяет доказать еще одну лемму, не имеющую места в прямом варианте.

Лемма 6. *Если* $(x, y) \in U$, *то* $(y, x) \in U$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$(x, y) \in U \iff (x^{-1}, y^{-1}) \in U.$$

Пусть $U' = \{(y^{-1}, x^{-1}) | (x, y) \in U$. В силу непрерывности отображения $\overline{r}$ множество U' является открытым в $(G \times G, \beta)$ множеством, содержащим к тому же $(1, 1)$. Поэтому множество $U \cap U'$ также является открытым в $(G \times G, \beta)$, содержащим $(1, 1)$. В силу минимальности U

$$U \cap U' = U,$$

а в силу конечности U, $U' = U$. Таким образом

$$(x^{-1}, y^{-1}) \in U \iff (y, x) \in U.$$

Из двух доказанных нами эквивалентностей следует

$$(x, y) \in U \iff (y, x) \in U.$$

Теорема. *Пусть G конечная группа. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями группы G и всеми косыми битопологическими группами на G.*

Доказательство. Пусть $U = N \times N$, где N – нормальный делитель группы G. Отображения $\overline{p}$ и $\overline{r}$ определяются, как обычно. Непрерывность отображения $\overline{p}$ доказывается, как для предыдущей теоремы, а непрерывность отображения $\overline{r}$ следует из соотношения

$$\overline{r}^{-1}((x, y)U) = U(y^{-1}, x^{-1}).$$

Тем самым доказано, что каждому нормальному делителю N группы G сопоставляется косая битопологическая группа на G. Обратное соответствие следует из лемм 1–6 и из того, что любой симметричный относительно диагонали нормальный делитель U группы $G \times G$ имеет вид $N \times N$, где N – нормальный делитель группы G. Последнее следует из замечания к предыдущей теореме.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что каждая конечная косая битопологическая группа (G, β) является одновременно прямой битопологической группой, для которой минимальное открытое в $(G \times G, \beta)$ множество U, содержащее $(1, 1)$, симметрично относительно диагонали.

§8. P-топологические группы

1. Основные определения. Определение P-топологической группы аналогично определению битопологической группы с той разницей, что битопологические структуры заменяются на P-топологические структуры. Нам необходимо, прежде всего, ввести некоторые определения, относящиеся к P-топологическим группам.

Определение. P-*топологической группой* будем называть пару (G, ζ), где G – некоторая группа, ζ – P-топологическая структура на множестве G, такие, что отображения

$$p : (G, \zeta) \times (G, \zeta) \longrightarrow (G, \zeta), \quad p(x, y) = xy,$$

$$q : (G, \zeta) \longrightarrow (G, \zeta), \quad q(x) = x^{-1}$$

P-непрерывны, то есть отображения $\overline{p} = Pp$ и $\overline{q} = Pq$ являются непрерывными отображениями соответствующих топологических пространств.

Пример. Рассмотрим простейшую группу D, состоящую из двух элементов, $D = \{0, 1\}$ с операцией сложения, при которой $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Можно доказать, что имеются только тривиальные топологизации и битопологизации этой группы. Рассмотрим ее возможные P-топологизации. Множество PD состоит из трех точек $a = \{0\}$, $b = \{1\}$, $c = \{0, 1\}$ (рассматриваются только непустые подмножества), множество $PD \times PD$ состоит из девяти точек:

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),$$

$$(b, a),\ (b, b),\ (b, c),$$

$$(c, a),\ (c, b),\ (c, c).$$

Отображение $Pp : PD \times PD \longrightarrow PD$ переводит эти точки в

$$a,\ b,\ c,$$

$$b,\ a,\ c,$$

$$c,\ c,\ c.$$

Таким образом

$$(Pp)^{-1}(a) = \{(a, a),\ (b, b)\},$$

$$(Pp)^{-1}(b) = \{(a,b),\ (b,a)\},$$

$$(Pp)^{-1}(c) = \{(a,c),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,c)\}.$$

Нетрудно показать, что существуют три нетривиальные P-топологические структуры на рассматриваемой группе, то есть топологические структуры на множестве PD. Их нетривиальными открытыми множествами являются множества $\{a,b\}$ и $\{c\}$ в трех различных комбинациях: $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$ и $\{c\}$.

Определение. Подгруппой P-топологической группы (G,ζ) будем называть P-топологическую группу (G',ζ'), где G' – подгруппа группы G, а структура ζ' индуцирована на G структурой ζ.

Теорема. *Пусть (G,ζ) – произвольная P-топологическая группа, G' – подгруппа группы G, $\zeta' = \zeta|G'$. Тогда (G',ζ') является P-топологической группой.*

Доказательство. Так как отображения

$$p' : (G',\zeta') \times (G',\zeta') \longrightarrow (G',\zeta'),\quad p'(x,y) = xy,$$

$$q' : (G',\zeta') \longrightarrow (G',\zeta'),\quad q'(x) = x^{-1}$$

являются ограничениями отображений

$$p : (G,\zeta) \times (G,\zeta) \longrightarrow (G,\zeta),\quad p(x,y) = xy,$$

$$q : (G,\zeta) \longrightarrow (G,\zeta),\quad q(x) = x^{-1}$$

а эти отображения P-непрерывны, то P-непрерывны и отображения p', q'.

С P-факторгруппами дело сложнее. Мы знаем, что P-фактопространства не всегда существуют, но относительно P-факторгрупп этого утверждать мы не можем.

2. Дополнение. На групппах G можно рассматривать и более сложные структуры, например топологические структуры на P^2G (P^2-топологические структуры на G), топологические структуры на $P(G\times G)$ (P-битопологические структуры на G), и так далее. Нетрудно заметить, что даже для двухэлементной группы G существуют нетривиальные P^2-топологические и P-битопологические структуры. Действительно, так как $PG \subset P^2G$, то мы можем рассмотреть P^2-топологическую структуру на G, являющуюся тривиальным продолжением на P^2G нетривиальной P-топологической структуры на двухэлементной группе G. Такая P^2-топологическая структура на G будет, очевидно, нетривиальной.

Аналогично, так как $PG \subset P(G \times G)$, мы можем рассмотреть P-битопологическую структуру на G, являющуюся тривиальным продолжением на $P(G \times G$ нетривиальной P-топологической структуры на двухэлементной группе G (диагонали в $G \times G$). Такая P-битопологическая структура на G будет, очевидно, нетривиальной.

Пространства и группы с такими структурами будут изучаться в третьей главе книги.

Ivanov A. A. Space structures, their theory and application. 2.

The paper is the second part of a book "Spaces structures, their theory and application". This part consists of introduction and three chapters: P-topological structures, product structures and function spaces, some applications of space structures.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 февраля 2004 г.