Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

С. И. Репин, М. Е. Фролов

ОБ ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЛАСТИНЕ РЕЙССНЕРА–МИНДЛИНА

1. Введение

Теория пластин Рейсснера–Миндлина является обобщением классической теории тонких пластин Кирхгоффа–Лява. В рамках этой теории деформация пластины толщины t, срединная плоскость которой занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, описывается при помощи двух переменных: скалярной функции $w(x)$ (прогиб срединной плоскости в точке x) и векторной функции $\eta(x)$ (поворот нормали к срединной плоскости в точке x). Функционал энергии для этой задачи имеет следующий вид:

$$I(w,\eta) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) + \frac{1}{2\alpha}|\nabla w - \eta|^2 - fw \right) dx,$$

где C – положительно определенный тензор четвертого ранга, $\varepsilon(\eta) = \frac{\nabla\eta + (\nabla\eta)^T}{2}$, α – положительный параметр, пропорциональный t^2, а величина ft^3 соответствует распределенной нагрузке, действующей на пластину. Существование пары функций (u,ϕ), которые удовлетворяют заданным краевым условиям и минимизируют $I(w,\eta)$ на $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$, следует из известных результатов вариационного исчисления для выпуклых коэрцитивных функционалов (см., например, [1]). Можно показать, что при $\alpha \to 0$ минимайзеры этой вариационной задачи стремятся к решению соответствующей вариационной задачи для пластины Кирхгоффа–Лява (см., например, [7]).

В последние десятилетия рассматриваемая модель вызывает большой интерес как у механиков так и у математиков. Это связано с тем, что она может быть использована для описания поведения пластин не только малой, но и средней толщины и имеет

Работа поддержана грантом Минвуз E02-1.0-55.

более широкую область применения (см., например, [3, 4, 6, 7] и цитируемую там литературу). Другим достоинством данной модели является то, что ее численное решение не требует построения внутренних аппроксимаций в пространстве W_2^2.

Одной из первых работ, в которых исследовались свойства аппроксимаций рассматриваемой задачи, является работа [7]. В ней установлены оценки регулярности решения (u, ϕ) для случая, когда Ω – выпуклая полигональная область. При помощи этих оценок далее получены асимптотические оценки скорости сходимости конечномерных аппроксимаций. Предлагаемый в работе [7] подход основан на формулировке исходной задачи, которая включает в себя тройку неизвестных (u, ϕ, γ). Последняя из них играет роль независимой аппроксимации величины $\frac{\nabla u - \phi}{\alpha}$. Используя ортогональное разложение Гельмгольца для элементов пространства $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, авторы предложили метод решения, основанный на расщеплении исходной задачи на более простые. В дальнейшем, идея использования разложения Гельмгольца широко применялась другими авторами при построении целой группы так называемых неконформных методов (см., в частности, [3]).

Апостериорные оценки точности аппроксимаций, полученных для рассматриваемой модели при помощи метода конечных элементов, были предложены в работах [8–10]. Данные оценки построены в рамках так называемого “метода невязок”, который последние десятилетия широко использовался для получения индикаторов погрешности в различных задачах (см., например, [5]). Эти оценки включают в себя постоянные, зависящие от структуры разбиения области Ω и пригодны только для аппроксимаций специального вида (галеркинских аппроксимаций).

В данной работе построена вычисляемая мажоранта нормы разности между приближенным и точным решением задачи о пластине Рейсснера–Миндлина. При получении этой оценки использовались исключительно методы вариационного исчисления и функционального анализа. Поэтому она пригодна для любых внутренних (конформных) аппроксимаций точного решения и содержит только глобальные постоянные, зависящие от формы области Ω и других исходных данных задачи. Оценку такого вида естественно назвать апостериорной оценкой функционального типа. Отметим, что для широкого класса эллиптических краевых задач подобные оценки были ранее получены в работах [2, 11, 12] и ряде других работ.

2. Получение мажоранты нормы отклонения от точного решения задачи о пластине Рейсснера–Миндлина

Классическая постановка рассматриваемой задачи такова: найти пару элементов (u, ϕ), удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений дивергентного типа

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathrm{C}\,\varepsilon(\phi) - \gamma = 0 & \text{в } \ \Omega, \\ -\operatorname{div} \gamma = f & \text{в } \ \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $\gamma = \frac{\nabla u - \phi}{\alpha}$. Предполагается, что Ω – связная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с непрерывной по Липшицу границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, а тензор C обладает свойством симметрии, т.е. $\mathrm{C}_{ijkl} = \mathrm{C}_{jikl} = \mathrm{C}_{klij}$. Пусть также существуют такие положительные постоянные α_1, α_2, что

$$\alpha_1 |\varkappa|^2 \leqslant \mathrm{C}\,\varkappa : \varkappa \leqslant \alpha_2 |\varkappa|^2 \quad \forall \varkappa \in \mathbb{M}_s^{2\times 2}, \quad |\varkappa|^2 = \varkappa : \varkappa,$$

где $\mathbb{M}_s^{2\times 2}$ обозначает пространство симметричных 2×2 матриц. Для простоты изложения мы рассмотрим случай, когда функции u и ϕ удовлетворяют однородным краевым условиям, т.е.

$$\begin{cases} u = 0 & \text{на } \ \partial\Omega, \\ \phi = 0 & \text{на } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Однако, предлагаемый подход также может быть применен в случае других краевых условий.

Задача (1)–(2) допускает следующую слабую формулировку: найти $(u, \phi, \gamma) \in V_0 \times Y_0 \times Q$ такие, что

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega C\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\eta)\, dx - \int\limits_\Omega \gamma \cdot \eta \, dx = 0 & \forall \eta \in Y_0, \\ \int\limits_\Omega \gamma \cdot \nabla w \, dx = \int\limits_\Omega f w \, dx & \forall w \in V_0, \\ \int\limits_\Omega (\alpha\gamma - (\nabla u - \phi)) \cdot q \, dx = 0 & \forall q \in Q, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$V_0 = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad Y_0 = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad Q = L_2(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Любое решение системы (3), обладающее повышенной гладкостью, удовлетворяет уравнениям (1)–(2), и, следовательно, является решением в классическом смысле. Нетрудно показать, что пара функций (u, ϕ) минимизирует следующий функционал энергии:

$$I(w,\eta) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}\, \varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) + \frac{1}{2\alpha} |\nabla w - \eta|^2 - fw \right) \, dx$$

на множестве $S = V_0 \times Y_0$, так что

$$I(u,\phi) = \inf_{(w,\eta)\in S} I(w,\eta) = \inf \mathcal{P}.$$

Далее эта вариационная задача будет называться *прямой* задачей.

Рассмотрим произвольную пару элементов (v, ψ), дающих конформную аппроксимацию точного решения (u, ϕ) в S (при этом элемент $\gamma = \frac{\nabla u - \phi}{\alpha}$ аппроксимируется в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ вектором $y = \frac{\nabla v - \psi}{\alpha}$). Введем соответствующие этим элементам отклонения от точных значений $e_v = v - u$, $e_\psi = \psi - \phi$ и $e_y = y - \gamma$. Тогда справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. *Для любой аппроксимации $(v, \psi) \in S$ выполняется следующее равенство:*

$$\| e_\psi \|^2 + \alpha \, \| e_y \|^2 = 2 \left(I(v,\psi) - \inf \mathcal{P} \right), \tag{4}$$

где

$$\| {e_y}^2 \| = \int\limits_{\Omega} |e_y|^2 \, dx$$

и

$$\| e_\psi \|^2 = \int\limits_{\Omega} \mathrm{C}\, \varepsilon(e_\psi) : \varepsilon(e_\psi) \, dx.$$

Доказательство. Рассмотрим правую часть равенства (4)

$$\begin{aligned} 2 \left(I(v,\psi) - I(u,\phi) \right) = \\ = \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{C}\, \varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi) + \frac{1}{\alpha} |\nabla v - \psi|^2 - 2fv \right) \, dx - \\ - \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{C}\, \varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) + \frac{1}{\alpha} |\nabla u - \phi|^2 - 2fu \right) \, dx. \end{aligned}$$

Используя (3), получаем

$$\int_\Omega \mathrm{C}\,\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi)\,dx - \int_\Omega \mathrm{C}\,\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi)\,dx =$$

$$= \int_\Omega \mathrm{C}\,\varepsilon(\psi-\phi) : \varepsilon(\psi-\phi)\,dx + 2\int_\Omega \left(\mathrm{C}\,\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\phi) - \mathrm{C}\,\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi)\right)\,dx =$$

$$= \| e_\psi \|^2 + 2\int_\Omega \mathrm{C}\,\varepsilon(e_\psi) : \varepsilon(\phi)\,dx = \| e_\psi \|^2 + 2\int_\Omega \gamma\cdot e_\psi\,dx,$$

и

$$\frac{1}{\alpha}\left(\|\nabla v-\psi\|^2 - \|\nabla u-\phi\|^2\right) = \alpha\left(\|y\|^2 - \|\gamma\|^2\right) =$$

$$= \alpha\,\|e_y\|^2 + 2\int_\Omega \gamma\cdot(\alpha e_y)\,dx.$$

Отклонения e_v, e_ψ и e_y связаны соотношением

$$e_\psi + \alpha e_y = \psi - \phi + (\nabla v - \psi) - (\nabla u - \phi) = \nabla v - \nabla u = \nabla e_v, \qquad (5)$$

учитывая которое, приходим к равенству

$$2\int_\Omega \left(\gamma\cdot(e_\psi + \alpha e_y) - f(v-u)\right)dx = 2\int_\Omega (\gamma\cdot\nabla e_v - f e_v)\,dx = 0.$$

Отсюда следует, что

$$2\left(I(v,\psi) - I(u,\phi)\right) = \int_\Omega \mathrm{C}\,\varepsilon(\psi-\phi) : \varepsilon(\psi-\phi)\,dx + \alpha\,\|y-\gamma\|^2.$$

□

Заметим, что хотя функция γ и ее аппроксимация y, входящие в (4), выражаются через основные переменные задачи, они представляют собой так называемый вектор напряжений сдвига (*shear stresses*), который имеет самостоятельный физический смысл (см., например, [4]). Таким образом, левая часть равенства (4) – норма в пространстве $Y_0 \times Q$, которую естественно использовать для измерения погрешности приближенного решения в терминах отклонений e_ψ и e_y. Как показано в заключительной части работы, оценки этих двух отклонений и соотношение (5) позволяют контролировать также норму отклонения e_v. Таким образом, точность любой аппроксимации (v, ψ) может быть оценена, если известно значение $\inf \mathcal{P}$. Не смотря на то, что в общем случае точная нижняя грань рассматриваемой задачи неизвестна, далее мы покажем, что правая часть (4) оценивается сверху с привлечением так называемой *двойственной* вариационной формулировки.

Рассмотрим следующий Лагранжиан:

$$L(w, \eta, q^*) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}\, \varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) - fw + q^* \cdot (\nabla w - \eta) - \frac{\alpha |q^*|^2}{2} \right) dx,$$

где

$$\inf \mathcal{P} = \inf_{(w,\eta) \in S} \sup_{q^* \in Q^*} L(w, \eta, q^*),$$

и $Q^* = L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Двойственная задача, порожденная Лагранжианом L, имеет вид: найти элемент $p^* \in Q^*$ такой, что

$$I^*(p^*) = \sup_{q^* \in Q^*} I^*(q^*) = \sup \mathcal{P}^*,$$

где

$$I^*(q^*) = \inf_{(w,\eta) \in S} L(w, \eta, q^*).$$

Используя известные результаты выпуклого анализа, можно показать, что справедливо соотношение $\inf \mathcal{P} = \sup \mathcal{P}^*$ или

$$\inf_{(w,\eta) \in S} \sup_{q^* \in Q^*} L(w, \eta, q^*) = \sup_{q^* \in Q^*} \inf_{(w,\eta) \in S} L(w, \eta, q^*). \tag{6}$$

При помощи соотношений (4) и (6) получаем оценку

$$|\!|\!| e_\psi |\!|\!|^2 + \alpha \, \| e_y \|^2 \leqslant 2 \left(I(v, \psi) - I^*(q^*) \right), \tag{7}$$

которая справедлива для любого элемента $q^* \in Q^*$.

Как следует из определения двойственного функционала

$$I^*(q^*) = \inf_{w \in V_0, \eta \in Y_0} L(w, \eta, q^*) =$$

$$= \inf_{w \in V_0, \eta \in Y_0} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}\, \varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) - q^* \cdot \eta - \frac{\alpha |q^*|^2}{2} + q^* \cdot \nabla w - fw \right) dx.$$

Если элемент q^* не принадлежит множеству Q_f^*, где

$$Q_f^* = \left\{ q^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \int\limits_\Omega q^* \cdot \nabla w \, dx = \int\limits_\Omega f w \, dx \quad \forall w \in V_0 \right\},$$

то значение $I^*(q^*)$ не ограничено снизу. Поэтому функционал фактически определен для $q^* \in Q_f^*$ и имеет вид

$$I^*(q^*) = \inf_{\eta \in Y_0} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}\, \varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) - q^* \cdot \eta \right) dx - \int\limits_\Omega \frac{\alpha |q^*|^2}{2} \, dx.$$

Первое слагаемое в данном выражении можно представить следующим образом:

$$\inf_{\eta \in Y_0} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}\, \varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) - q^* \cdot \eta \right) dx = \sup_{\tau^* \in N_q^*} \int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2} \mathrm{C}^{-1} \tau^* : \tau^* \right) dx,$$

где

$$N_q^* = \left\{ \tau^* \in L_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{2\times 2}) \mid \int\limits_\Omega \tau^* : \varepsilon(\eta) \, dx = \int\limits_\Omega q^* \cdot \eta \, dx \quad \forall \eta \in Y_0 \right\}.$$

В результате мы приходим к выражению

$$I^*(q^*) = \sup_{\tau^* \in N_q^*} \int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2} \mathrm{C}^{-1} \tau^* : \tau^* \right) dx - \int\limits_\Omega \frac{\alpha |q^*|^2}{2} \, dx.$$

Принимая во внимание неравенство

$$I^*(q^*) \geqslant \mathcal{J}^*(q^*, \tau^*),$$

где

$$\mathcal{J}^*(q^*, \tau^*) = -\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}^{-1} \tau^* : \tau^* + \frac{\alpha |q^*|^2}{2} \right) dx,$$

и используя (7), получаем оценку

$$\| e_\psi \|^2 + \alpha \, \| e_y \|^2 \leqslant 2 \left(I(v, \psi) - \mathcal{J}^*(q^*, \tau^*) \right), \tag{8}$$

которая верна для любых $q^* \in Q_f^*$ и $\tau^* \in N_q^*$.

Покажем, что неравенство (8) допускает также следующее представление:

$$\| e_\psi \|^2 + \alpha \, \| e_y \|^2 \leqslant \inf_{q^* \in Q^*_f} \left\{ \inf_{\tau^* \in N^*_q} D(\psi, \tau^*) + \alpha \, \| y - q^* \|^2 \right\}, \qquad (9)$$

где

$$D(\psi, \tau^*) = \int\limits_\Omega \left(\mathrm{C}\,\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi) + \mathrm{C}^{-1}\, \tau^* : \tau^* - 2\tau^* : \varepsilon(\psi) \right) dx.$$

Действительно,

$$2\left(I(v,\psi) - \mathcal{J}^*(q^*, \tau^*)\right) =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\mathrm{C}\,\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi) + \frac{1}{\alpha} |\nabla v - \psi|^2 - 2fv + \mathrm{C}^{-1}\, \tau^* : \tau^* + \alpha |q^*|^2 \right) dx =$$

$$= D(\psi, \tau^*) + 2 \int\limits_\Omega \left(\tau^* : \varepsilon(\psi) - fv \right) \, dx + \int\limits_\Omega \alpha \left(|y|^2 + |q^*|^2 \right) \, dx.$$

Используя соотношения

$$\int\limits_\Omega \tau^* : \varepsilon(\psi) \, dx = \int\limits_\Omega q^* \cdot \psi \, dx,$$

$$\psi + \alpha y = \nabla v,$$

и

$$\int\limits_\Omega q^* \cdot \nabla v \, dx = \int\limits_\Omega f v \, dx,$$

мы приходим к выводу, что

$$2\left(I(v,\psi) - \mathcal{J}^*(q^*, \tau^*)\right) = D(\psi, \tau^*) + \alpha \, \| y - q^* \|^2 +$$

$$+ 2 \int\limits_\Omega \left(q^* \cdot (\psi + \alpha y) - fv \right) \, dx = D(\psi, \tau^*) + \alpha \, \| y - q^* \|^2 .$$

Однако, практическое применение оценки (9) серьезно затруднено тем обстоятельством, что при вычислении верхних границ отклонения элементы q^* и τ^* необходимо выбирать в соответствующих допустимых классах Q^*_f и N^*_q. Построение внутренних аппроксимаций в этих классах может оказаться слишком трудоемкой задачей. По этой причине, нашей дальнейшей целью является модификация полученного неравенства таким образом, чтобы вычисление оценок погрешности не требовало использования сложных аппроксимаций.

Построим оценку нормы отклонения, в которой правая часть определена на $Q^*_{\rm div} \times N^*_{\rm div}$ вместо $Q^*_f \times N^*_q$, где

$$N^*_{\rm div} = \left\{ \varkappa^* \in L_2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_s) \mid \operatorname{div} \varkappa^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \right\}$$

и

$$Q^*_{\rm div} = \left\{ y^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} y^* \in L_2(\Omega) \right\}.$$

Рассмотрим произвольный элемент $\varkappa^* \in N^*_{\rm div}$ и запишем слагаемое $D(\psi, \tau^*)$ в следующем виде:

$$D(\psi, \tau^*) = \int\limits_\Omega \mathrm{C}(\varepsilon(\psi) - \mathrm{C}^{-1}\, \tau^*) : (\varepsilon(\psi) - \mathrm{C}^{-1}\, \tau^*)\, dx.$$

Далее, используя неравенство треугольника для нормы $\Big(\int\limits_\Omega \mathrm{C}\, \varkappa : \varkappa\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$D(\psi, \tau^*)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant D(\psi, \varkappa^*)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_\Omega \mathrm{C}(\mathrm{C}^{-1}\, \tau^* - \mathrm{C}^{-1}\, \varkappa^*) : (\mathrm{C}^{-1}\, \tau^* - \mathrm{C}^{-1}\, \varkappa^*)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя известное алгебраическое неравенство Юнга

$$2|ab| \leqslant \beta_1\, a^2 + \frac{1}{\beta_1}\, b^2,$$

приходим к оценке

$$D(\psi, \tau^*) \leqslant (1 + \beta_1) D(\psi, \varkappa^*) + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \int\limits_\Omega \mathrm{C}^{-1}(\tau^* - \varkappa^*) : (\tau^* - \varkappa^*)\, dx,$$

которая верна при любом положительном значении параметра β_1. Отсюда мы заключаем, что

$$\inf_{\tau^* \in N^*_q} D(\psi, \tau^*) \leqslant (1 + \beta_1) D(\psi, \varkappa^*) + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) R(\varkappa^*), \qquad (10)$$

где
$$R(\varkappa^*) = \inf_{\tau^* \in N_q^*} \int\limits_\Omega \mathrm{C}^{-1}(\tau^* - \varkappa^*) : (\tau^* - \varkappa^*)\, dx.$$

Утверждение 2. *Для любого элемента* $\varkappa^* \in N^*_{\mathrm{div}}$ *имеет место следующая оценка:*
$$R(\varkappa^*) \leqslant \mathbb{C}^2_{1\Omega} \, \| q^* + \operatorname{div} \varkappa^* \|^2,$$
где $\mathbb{C}_{1\Omega}$ *– постоянная, удовлетворяющая неравенству*
$$\| \eta \| \leqslant \mathbb{C}_{1\Omega} \, \| \eta \| \quad \forall \eta \in Y_0.$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $\sigma^* = \tau^* - \varkappa^*$ в определении $R(\varkappa^*)$. С одной стороны,
$$\int\limits_\Omega \tau^* : \varepsilon(\eta)\, dx = \int\limits_\Omega q^* \cdot \eta \, dx \quad \forall \eta \in Y_0.$$
С другой стороны,
$$-\int\limits_\Omega \varkappa^* : \varepsilon(\eta)\, dx = \int\limits_\Omega \operatorname{div} \varkappa^* \cdot \eta \, dx \quad \forall \eta \in Y_0.$$
Следовательно, σ^* принадлежит множеству N_r^*, где
$$r^* = q^* + \operatorname{div} \varkappa^*$$
и
$$N_r^* = \left\{ \sigma^* \in L_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{2\times 2}) \mid \int\limits_\Omega \sigma^* : \varepsilon(\eta)\, dx = \int\limits_\Omega r^* \cdot \eta \, dx \quad \forall \eta \in Y_0 \right\}.$$
Отсюда получается требуемая оценка. Действительно,
$$R(\varkappa^*) = \inf_{\sigma^* \in N_r^*} \int\limits_\Omega \mathrm{C}^{-1} \sigma^* : \sigma^* \, dx = -\sup_{\sigma^* \in N_r^*} \int\limits_\Omega \left(-\mathrm{C}^{-1} \sigma^* : \sigma^*\right) dx =$$
$$= -\inf_{\eta \in Y_0} \int\limits_\Omega (\mathrm{C}\,\varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) - 2r^* \cdot \eta)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant -\inf_{\eta \in Y_0} (\| \eta \|^2 - 2\mathbb{C}_{1\Omega} \, \| r^* \| \| \eta \|) \leqslant$$

$$\leqslant - \inf_{a \geqslant 0} (a^2 - 2\mathbb{C}_{1\Omega} \, \| r^* \| \, a) = \mathbb{C}_{1\Omega}^2 \, \| q^* + \operatorname{div} \varkappa^* \|^2 .$$

□

Следствием неравенств (9), (10) и утверждения 2 является оценка

$$\| e_\psi \|^2 + \alpha \, \| e_y \|^2 \leqslant (1 + \beta_1) D(\psi, \varkappa^*) + \\ + \inf_{q^* \in Q_f^*} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \mathbb{C}_{1\Omega}^2 \, \| q^* + \operatorname{div} \varkappa^* \|^2 + \alpha \, \| y - q^* \|^2 \right\},$$

которая справедлива для любых $\beta_1 > 0$, $q^* \in Q_f^*$ и $\varkappa^* \in N_{\mathrm{div}}^*$.

Далее, следуя изложенной схеме, элемент $q^* \in Q_f^*$ заменяется на произвольный элемент $y^* \in Q_{\mathrm{div}}^*$, и мы получаем

$$\| y - q^* \|^2 \leqslant (1 + \beta_2) \, \| y - y^* \|^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_2} \right) \| q^* - y^* \|^2,$$

$$\| q^* + \operatorname{div} \varkappa^* \|^2 \leqslant (1 + \beta_3) \, \| y^* + \operatorname{div} \varkappa^* \|^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_3} \right) \| q^* - y^* \|^2,$$

где β_2, β_3 - свободные положительные параметры. Можно показать (см., например, [11]), что для произвольного элемента $y^* \in Q_{\mathrm{div}}^*$ имеет место оценка

$$\inf_{q^* \in Q_f^*} \| q^* - y^* \|^2 \leqslant \mathbb{C}_{2\Omega}^2 \, \| \operatorname{div} y^* + f \|^2,$$

где $\mathbb{C}_{2\Omega}$ – константа в неравенстве Фридрихса

$$\| w \| \leqslant \mathbb{C}_{2\Omega} \, \| \nabla w \| \quad \forall w \in V_0.$$

Используя этот факт, мы приходим к двойственной мажоранте для пластин Рейсснера–Миндлина следующего вида:

$$\| e_\psi \|^2 + \alpha \, \| e_y \|^2 \leqslant \mathcal{M}_1(\psi, \varkappa^*) + \mathcal{M}_2(y, y^*) + \mathcal{M}_3(y^*, \varkappa^*) + \mathcal{M}_4(y^*), \quad (11)$$

где

$$\mathcal{M}_1 = (1 + \beta_1) D(\psi, \varkappa^*),$$

$$\mathcal{M}_2 = \alpha (1 + \beta_2) \, \| y - y^* \|^2,$$

$$\mathcal{M}_3 = \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) (1 + \beta_3) \mathbb{C}_{1\Omega}^2 \, \| y^* + \operatorname{div} \varkappa^* \|^2,$$

$$\mathcal{M}_4 = \left\{ \left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)\left(1+\frac{1}{\beta_3}\right)\mathbb{C}^2_{1\Omega} + \alpha\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right)\right\}\mathbb{C}^2_{2\Omega}\,\|\operatorname{div} y^* + f\,\|^2 .$$

Поясним смысл оценки (11). С одной стороны, в нее входят заданные аппроксимации ψ и $y = \frac{\nabla v - \psi}{\alpha}$, точность которых мы контролируем. С другой стороны, она также содержит пару свободных функций y^*,$\varkappa^*$ и несколько положительных параметров. Правая часть (11) дает гарантированную оценку сверху нормы отклонения от точного решения при любом выборе y^*, $\varkappa^*$ и β_1, β_2, β_3 из соответствующих допустимых классов. Однако, неудачный выбор этих элементов может привести к существенной переоценке ее значения. С другой стороны, легко видеть, что при помощи мажоранты можно получить сколь угодно точную оценку контролируемого отклонения. Действительно, для пары $y^* = \gamma$ и $\varkappa^* = \mathrm{C}\,\varepsilon(\phi)$ слагаемые $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$, с точностью до константы представляющие собой невязку дифференциальных уравнений системы (1), обращаются в ноль. Следовательно, можно положить β_1, β_2, β_3 равными нулю, и неравенство переходит в равенство.

Легко видеть, что из полученной оценки вытекает также оценка для отклонения $e_v = v - u$. Используя соотношение (5), получаем

$$\|\nabla e_v\| \leqslant \|e_\psi\| + \alpha\,\|e_y\| \leqslant \mathbb{C}_{1\Omega}\,\|\!|e_\psi|\!\|+\alpha\,\|e_y\| .$$

Отсюда следует, что

$$\|\nabla e_v\|^2 \leqslant (1+\beta)\mathbb{C}^2_{1\Omega}\,\|\!|e_\psi|\!\|^2 + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\alpha^2\,\|e_y\|^2,$$

где β - произвольное положительное число. Положив $\beta = \alpha\mathbb{C}^{-2}_{1\Omega}$, мы приходим к неравенству

$$\|\nabla e_v\|^2 \leqslant \left(\alpha + \mathbb{C}^2_{1\Omega}\right)\left(\|\!|e_\psi|\!\|^2 + \alpha\,\|e_y\|^2\right) \leqslant \left(\alpha + \mathbb{C}^2_{1\Omega}\right)\left(\mathcal{M}_1 + \ldots + \mathcal{M}_4\right).$$

Таким образом, предлагаемая двойственная мажоранта одновременно позволяет контролировать все рассматриваемые нормы отклонений.

Литература

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. Наука, М. (1973).
2. С. И. Репин, *Двусторонние оценки отклонения от точного решения для равномерно эллиптических уравнений,*. — Труды Санкт-Петербургского Математического общества **9** (2001), 148–179.

3. D. N. Arnold, R. S Falk, *A uniformly accurate finite element method for the Reissner–Mindlin plate.* — SIAM J. Numer. Anal. **26**, No. 6 (1989), 1276–1290.
4. D. N. Arnold, A. L. Madureira, S. Zhang, *On the range of applicability of the Reissner–Mindlin and Kirchhoff–Love plate bending models.* — J. of Elasticity **67** (2002), 171–185.
5. I. Babuška, T. Strouboulis, *The finite element method and its reliability.* The Clarendon Press, Oxford University Press, Numerical Mathematics and Scientific Computation, New York (2001).
6. J. H. Bramble, T. Sun, *A negative-norm least squares method for Reissner–Mindlin plates.* — Math. Comp. **67, No. 223** (1998), 901–916.
7. F. Brezzi, M. Fortin, *Numerical approximation of Mindlin–Reissner plates.* — Math. Comp. **47,** No. 175 (1986), 151–158.
8. C. Carstensen, *Residual-based a posteriori error estimate for a nonconforming Reissner–Mindlin plate finite element.* — SIAM J. Numer. Anal. **39, No. 6** (2002), 2034–2044 (electronic).
9. C. Carstensen, K. Weinberg, *An adaptive non-conforming finite-element method for Reissner–Mindlin plates.* — Inter. J. Numer. Methods Engrg. **56, No. 15** (2003), 2313–2330.
10. E. Liberman, *A posteriori error estimator for a mixed finite element method for Reissner–Mindlin plate.* — Math. Comp. **70, No. 236** (2001), 1383–1396 (electronic).
11. S. Repin, *A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals.* — Math. Comp. **69, No. 230** (2000), 481–500.
12. S. Repin, *A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **243** (1997), 201–214.

Repin S. I., Frolov M. E. On the estimate of deviations from the exact solution of the Reissner-Mindlin plate problem.

In this paper, a majorant of the difference between the exact solution and any conforming approximate solution of the Reissner-Mindlin plate problem is derived. This majorant is explicitly computable and involves constants that depend only on given data of the problem. It provides the ability to compute guaranteed upper bounds of errors with any desired accuracy and vanishes if and only if an approximate solution coincides with the exact one.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступило 27 мая 2004 г.

С.-Петербургский государственный
Политехнический Университет

E-mail: fro@nm.ru