Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ q-ОСЦИЛЛЯТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С ДИСКРЕТНЫМИ q-ПОЛИНОМАМИ ЭРМИТА

1. Введение

Роль, которую играют когерентные состояния в квантовой теории, трудно переоценить. Этим объясняется огромное количество работ, посвященных исследованию свойств этих состояний и их всевозможных обобщений, а также их многочисленным приложениям в различных разделах современной физики, в первую очередь в квантовой оптике. Основные сведения, относящиеся к теории когерентных состояний, могут быть найдены в работах [1–9]. Обширная библиография (доведённая до 2000г.) имеется в обзоре [10]. Только за последние месяцы появился ряд интересных работ, посвященных обобщению векторных когерентных состояний на случай матричного индекса [11–14], гипергеометрических [15] и комбинаторных [16] когерентных состояний, развитию их математических [17, 18] и физических [19, 20] приложений, в том числе к описанию моделей с точно решаемыми потенциалами [21], суперсимметричной конформной теории поля [22] и функциональному интегралу [23].

Введённые для бозонного осциллятора (группа Гейзенберга) [24] (и переоткрытые в [25–28] в связи с созданием квантовой оптики), когерентные состояния в настоящее время определены для широкого класса квантовых физических систем (в том числе и квантово-полевых), а также для систем, связанных с другими группами (в том числе и с супергруппами). Когерентные состояния могут быть определены для квантовых групп, а также с использованием различных обобщений (деформаций) экспоненты.

В настоящее время известно несколько вариантов определения когерентных состояний:

Данное исследование осуществлялось при поддержке РФФИ, гранты No. 03-01-00837, 03-01-00593.

1) как собственных состояний оператора уничтожения: $a|z\rangle = z|z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$ (в этом случае их обычно называют *когерентными состояниями типа Барута-Жирарделло*, поскольку в работе [29] это определение было перенесено на случай некомпактных групп);

2) как результата действия унитарного оператора сдвига $D(z) = e^{za^{+}-z^{*}a}$ на выделенный вектор пространства состояний (обычно вакуум Фока $|0\rangle$): $|z\rangle = D(z)|0\rangle$ (*когерентные состояния типа Переломова*, активно изучавшего эти состояния в исследованиях, суммированных в [1]);

3) как состояний, минимизирующих соотношение неопределенности Гейзенберга (или Гейзенберга–Робертсона);

4) как состояний, удовлетворяющих естественным условиям – нормируемость, непрерывность по индексу, (сверх)полнота и связанное с ней существование разложения единицы, эволюционная стабильность (*когерентные состояния типа Клаудера-Газо* [30, 31]).

Все эти определения в случае бозонного осциллятора порождают одно и тоже семейство когерентных состояний, однако это не так в общем случае.

Как известно, стандартные когерентные состояния одного бозонного осциллятора определяются соотношением

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}|k\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Связанные с этим определением обобщения когерентных состояний (известные как нелинейные, обобщенные или деформированные когерентные состояния), имеют вид

$$|z\rangle = \left(\mathcal{N}(|z|^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{\rho_k!}} e_k, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}. \tag{2}$$

где $\mathcal{N}$ – нормирующий множитель, $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_F$ (рассматриваемыми как базис Фока и пространство Фока, соответственно), $\rho_k!$ – обобщенный факториал по индексу $\rho_k! = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_k$, при условии $\rho_0! = 1$. Возможный выбор последовательности $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ положительных чисел ограничен требованием (сверх)полноты семейства когерентных состояний

$$\int\limits_{\mathcal{D}} d\mu(z,\overline{z})\, \mathcal{N}(|z|^2)\; |z\rangle\langle z| = I, \tag{3}$$

где I – единичный оператор в $\mathfrak{H}_F$, а мера $d\mu$ является решением проблемы моментов [32] связанной с последовательностью $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ (см. также [33, 34]). Различные семейства обобщенных когерентных состояний различаются различным выбором этих последовательностей. Известно, что при условии расходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho_k!}}$$

указанной последовательности (а значит соответствующему семейству обобщенных когерентных состояний) можно сопоставить семейство $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ многочленов, ортонормированных по некоторой однозначно определяемой мере $\mathrm{d}\nu$ на вещественной оси, и образующих базис Фока $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $\mathfrak{H}_F = L^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}\nu)$. Эти многочлены определяют осцилляторо-подобную систему, для которой они играют ту же роль, что и полиномы Эрмита в случае стандартного бозонного осциллятора. Спектр гамильтониана этой системы определяется коэффициентами $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ реккурентных соотношений для указанного семейства многочленов. Отметим, что специфический выбор в качестве базиса Фока семейства ортогональных (на вещественной оси) многочленов, связанных с матрицей Якоби (т.е. удовлетворяющих трехчленному рекуррентному соотношению), расширяет круг прикладных задач квантовой оптики, где успешно применяются когерентные состояния [5, 6, 4, 10, 41]. Использование производящих функций для известных полиномов позволяет явно выразить когерентные состояния через стандартные специальные функции и, решая соответствующую классическую проблему моментов, доказать полноту системы когерентных состояний. Возможно также, что интерпретация некоторых из возникающих в этом подходе дифференциальных и разностных уравнений, как уравнений Шредингера для системы "обобщенных осцилляторов", укажет пути решения определенных асимптотических и спектральных задач, хорошо изученных для обычного уравнения Шредингера.

Такая мотивировка лежит в основе нового подхода к построению обобщенных когерентных состояний, развитого в работах авторов [35–40] (см. также работу [41], в которой также отмечена связь бозонных систем с семействами ортогональных многочленов). Этот новый подход к построению когерентных состояний связан с конструкцией, предложенной в работе [42], алгебр обобщённых осцилляторов, порождаемых произвольными системами ортонормированных полиномов. Именно, по заданной системе ортогональных многочленов каноническим образом определяется осцилляторо-подобная система: вводятся операторы координаты, импульса, квадратичный гамильтониан (спектр которого определяется коэффициентами рекурретных соотношений для этих ортогональных многочленов) и лестничные операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие перестановочным соотношениям деформированной алгебры бозонного осциллятора. Это позволяет осуществить построение когерентных состояний как в случае классических ортогональных многочленов, так и для их различных q-аналогов. В конкретных ситуациях основные осложнения связаны с необходимостью решения соответствующей классической проблемы моментов и выражением когерентных состояний через стандартные специальные функции.

Описанная схема построения семейств когерентных состояний реализована в работах авторов [35–39] дл когерентных состояния типа Барута–Жирарделло и Клаудера–Газо, связанных с классическими полиномами Эрмита, Лагерра, Лежандра и Чебышева. Ключевым моментом в этих исследованиях, также как и в данной работе, является решение соответствующей классической проблемы моментов [32] (см. также [34]), необходимой для построения меры, участвующей в разложении единицы – одного из важнейших свойств когерентных состояний. Развитый в случае классических многочленов подход был распространен в [40] на случай непрерывных q-полиномов Эрмита. Было показано также,что для дискретных q-полиномов Эрмита I-типа когерентных состояний не существует. В данной работе мы продолжим исследование случая деформированных многочленов и построим семейство когерентных состояний, связанных с оставшимся случаем дискретных q-полиномов Эрмита, а именно с q-полиномами Эрмита II-го типа.

2. q-ОСЦИЛЛЯТОР, СВЯЗАННЫЙ С ДИСКРЕТНЫМИ q-ПОЛИНОМАМИ ЭРМИТА II-ГО ТИПА

2.1. Дискретные q-полиномы Эрмита II-го типа $\tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};\mathbf{q})$.

Дискретные q-полиномы Эрмита II-го типа $\tilde{h}_n(x;q)$ ($|q|<1$) имеют вид [45, 46]

$$\tilde{h}_n(x;q) = i^{-n}V_n^{-1}(ix;q) = i^{-n}q^{-\binom{n}{2}}{}_2\phi_0\left(\begin{matrix} q^{-n},\ ix \\ - \end{matrix}\middle| q;\ -q^n\right) = \\ = x^n{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n},\ q^{-n+1} \\ 0 \end{matrix}\middle| q^2;\ -\frac{1}{x^2}\right), \tag{4}$$

где базисный гипергеометрический ряд ${}_r\phi_s$ по определению равен

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix}\middle| q;\ z\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(1+s-r)}q^{(1+s-r)\binom{k}{2}}\frac{(a_1;q)_k(a_2;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(b_1;q)_k(b_2;q)_k\cdots(b_s;q)_k}\frac{z^k}{(q;q)_k}, \tag{5}$$

так что

$$ {}_2\phi_0\left(\begin{matrix} a,\ b \\ - \end{matrix}\middle| q;\ z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{-\binom{k}{2}}\frac{(a;q)_k\,(b;q)_k}{(q;q)_k}\,z^k, \tag{6}$$

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle| q;\ z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k\,(b;q)_k}{(c;q)_k(q;q)_k}\,z^k. \tag{7}$$

Здесь используются сдвинутые q-факториалы (q-символы Похгаммера), определяемые по

$$(a;q)_0 = 1, \quad (a;q)_k = \prod_{s=0}^{k-1}(1-aq^s), \quad (a;q)_\infty = \prod_{s=0}^{\infty}(1-aq^s). \tag{8}$$

Рекуррентные соотношения для полиномов $\tilde{h}_n(x;q)$ имеют вид

$$\begin{gathered} x\tilde{h}_n(x;q) = \tilde{h}_{n+1}(x;q) + q^{-2n+1}(1-q^n)\tilde{h}_{n-1}(x;q) \\ \tilde{h}_0(x;q) = 1, \quad \tilde{h}_{-1}(x;q)\equiv 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Система полиномов $\left\{\tilde{h}_n(x;q)\right\}_{n=0}^{\infty}$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$

удовлетворяет соотношениям ортогональности ($m \neq n$, $c > 0$)

$$c(1-q)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\tilde{h}_m(cq^k;q)\tilde{h}_n(cq^k;q)+ \\ +\tilde{h}_m(-cq^k;q)\tilde{h}_n(-cq^k;q)\Big]\,W(cq^k)\,q^k=0, \tag{10}$$

где

$$W(x)=\frac{1}{(ix;q)_\infty(-ix;q)_\infty}. \tag{11}$$

Эти соотношения ортогональности можно записать с помощью q-интеграла Джексона (см., например, [46]) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{h}_m(t;q)\tilde{h}_n(t;q)W(t)\mathrm{d}_q t=0. \tag{12}$$

Напомним, что понятие q-интеграла Джексона естественным образом связано с определением q-производной

$$f(x):=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)_q F(x)=\frac{F(x)-F(qx)}{x(1-q)},\quad (0<q<1). \tag{13}$$

Из этого соотношения получаем

$$F(x)-F(qx)=x(1-q)f(x). \tag{14}$$

Согласно этой формуле, непрерывная в точке $x=0$ функция $F(x)$ восстанавливается по $f(x)$ с помощью формулы

$$F(x)-F(0)=\big(F(x)-F(qx)\big)+\big(F(qx)-F(q^2x)\big)+\cdots+\big(F(q^nx)- \\ -F(q^{n+1}x)\big)+\cdots=x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^nf(q^nx). \tag{15}$$

Из (15), используя аналог формулы Ньютона–Лейбница, имеем

$$\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}_q t:=F(x)-F(0)=x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^nf(q^nx). \tag{16}$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_x^{\infty} f(t)\mathrm{d}_q\,t:=x(1-q)\sum_{n=-\infty}^{-1}q^nf(q^nx). \tag{17}$$

Сложив (16) и (17), получаем для любого $x > 0$

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}_q t := x(1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n x). \tag{18}$$

Точно так же можно определить

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}_q t := x(1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(-q^n x). \tag{19}$$

Тогда при любом $x > 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{d}_q t := x(1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n \left[f(q^n x) + f(-q^n x)\right]. \tag{20}$$

Отметим, что для упрощения обозначений, в этих формулах часто выбирают $x = 1$.

Для случая "симметричной" q-производной $\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)_q F(x) := \frac{F(qx)-F(q^{-1}x)}{x(q-q^{-1})}\right)$ определение q-интеграла Джексона было предложено в [44]). Ниже мы построим другой вариант q-интеграла Джексона, связанный с деформированной производной $\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q$.

Следуя описанной в [42] конструкции, введем нормированное семейство многочленов $\{\Psi_n(x;q)\}_{n=0}^\infty$, положив

$$\Psi_n(x;q) = \frac{q^{\frac{1}{2}n^2}}{\sqrt{(q;q)_n}}\, \tilde{h}_n(x;q), \tag{21}$$

для которых из (9) получаем рекуррентное соотношение

$$\Psi_n(x;q) = b_n \Psi_{n+1}(x;q) + b_{n-1}\Psi_{n-1}(x;q), \tag{22}$$

где

$$b_n = q^{-\frac{1}{2}(2n+1)}\sqrt{1-q^{n+1}}, \quad b_{-1} \equiv 0. \tag{23}$$

Построенное семейство многочленов образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_\mu = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathrm{d}\mu)$ относительно некоторой вероятностной меры $\mathrm{d}\mu(x)$. Поскольку

$$\sum_{n=0}^\infty b_n^{-1} < \infty, \tag{24}$$

то проблема моментов для матрицы Якоби, определяемой рекуррентными соотношениями (22), является неопределенной (см. [32]) и мера $\mathrm{d}\mu(x)$ определена не однозначно.

В дальнейшем мы будем рассматривать пространство Гильберта $\mathcal{H}_\mu$ как пространство Фока для осциллятору подобной системы (q-осциллятора), которая будет построена в следующем пункте.

2.2. q-осциллятор, связанный с дискретными q-полиномами Эрмита II-го типа.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mu$ определим оператор координаты X_μ, задав его действие на элементы базиса $|n\rangle := \Psi_n(x;q)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ формулой

$$X_\mu|n\rangle = X_\mu \Psi_n(x;q) = b_n|n+1\rangle + b_{n-1}|n-1\rangle, \tag{25}$$

в соответствии с рекуррентными соотношениями (22). Известно (см. [32]), что так определенный оператор X_μ симметричен и имеет индексы дефекта $(1,1)$, так что он имеет семейство самосопряженных расширений. Следуя методу, описанному в [34], фиксируя некоторое самосопряженное расширение X_μ^ϖ оператора X_μ, можно построить вполне определенную экстремальную меру $\mathrm{d}\mu_\varpi$. Приведем соответствующие результаты из [34] для случая когда параметр ϖ нумерующий расширение принимает нулевое значение $\varpi = 0$. В этом случае носитель $\Pi_0 \equiv \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ меры $\mathrm{d}\mu_0$ состоит из точек, являющихся корнями трансцендентного уравнения

$$\Psi_0(x;q) + x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sqrt{\frac{[2k-2]!!}{[2k-1]!!}}\,\Psi_{2k-1}(x;q) = 0, \tag{26}$$

где

$$[s] \equiv \frac{b_{s-1}^2}{b_0^2}, \quad s \geq 1, \quad [0] = 0. \tag{27}$$

Нагрузки $\sigma_0(x_k)$ в точках носителя $\Pi_0 \equiv \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ меры $\mathrm{d}\mu_0$ равны

$$\sigma_0(x_k) = \tag{28}$$

$$= \frac{x_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[2j-1]!!} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^{j+m+1} \beta_{2m,\,2j-2} {x_k}^{2(j-m-1)}}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[2j-1]!!} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^{j+m-1} \alpha_{2m-1,\,2j-2} x^{2(j-m)}\right]\right)(x_k)}.$$

Коэффициенты α_{ij} и β_{ij} являются коэффициентами полиномов $P_n(x;q) = \Psi_n(x;q)$ и $Q_n(x;q)$ 1-го и 2-го рода для матрицы Якоби, связанной с оператором X_μ [32]. Приведем их явные выражения из работы [34]

$$P_n(x;q) = \sum_{m=0}^{\mathrm{Ent}(\frac{1}{2}n)} \frac{(-1)^m}{\sqrt{[n]!}} \alpha_{2m-1,\,n-1} x^{n-2m}, \quad n \geq 0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{-1,\,2n-1} = 1, \\ &\alpha_{2m-1,\,n-1} = \sum_{k_1=2m-1}^{n-1} [k_1] \sum_{k_2=2m-3}^{k_1-2} [k_2] \ldots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}-2} [k_m], \quad m \geq 1. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &Q_0(x;q) = 0, \\ &Q_{n+1}(x;q) = \sum_{m=0}^{\mathrm{Ent}(\frac{1}{2}n)} \frac{(-1)^m}{\sqrt{[n+1]!}} \beta_{2m,\,n}\, x^{n-2m}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\beta_{0,\,n} = 1, \\ &\beta_{2m,\,n} = \sum_{k_1=2m}^{n} [k_1] \sum_{k_2=2m-2}^{k_1-2} [k_2] \ldots \sum_{k_m=2}^{k_{m-1}-2} [k_m], \quad m \geq 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что для некоторых задач нет необходимости рассматривать экстремальную меру. В таком случае можно взять “удобный” носитель меры, например, геометрическую прогрессию $\{cq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и подобрать нагрузки так, чтобы получить решение той же проблемы моментов (см. детальное рассмотрение в [47]).

Оператор импульса P_μ определим его действием на базисные элементы пространства $\mathcal{H}_\mu$

$$P_\mu \Psi_n(x;q) = i\,(b_n \Psi_{n+1}(x;q) - b_{n-1}\Psi_{n-1}(x;q))\,, \tag{33}$$

или в других обозначениях

$$P_\mu |n\rangle = i\,(b_n|n+1\rangle - b_{n-1}|n-1\rangle)\,. \tag{34}$$

Этот оператор так же как и X_μ симметричен и имеет индексы дефекта $(1,1)$, так что он тоже имеет семейство самосопряженных расширений. Мы будем рассматривать то из самосопряженных расширений оператора P_μ, которое согласовано с выбранным выше самосопряженным расширением оператора X_μ так, что соответствующие операторы рождения и уничтожения сопряжены. Мы сохраним за этими расширениями обозначения X_μ и P_μ. Следуя методам, описанным в [43], оператор P_μ может быть реализован в пространстве $\mathcal{H}_\mu$ как дифференциально-разностный оператор.

Определим в пространстве $\mathcal{H}_\mu$ лестничные операторы рождения и уничтожения, положив

$$a_\mu^+ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{1-q}}\,(X_\mu - iP_\mu)\,, \quad a_\mu^- = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{1-q}}\,(X_\mu + iP_\mu)\,. \tag{35}$$

Эти операторы действуют на базисные элементы пространства $\mathcal{H}_\mu$ по формулам

$$a_\mu^+\Psi_n(x;q) = \sqrt{\frac{q}{1-q}}\,b_n\Psi_{n+1}(x;q), \quad n \ge 0; \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &a_\mu^-\Psi_n(x;q) = \sqrt{\frac{q}{1-q}}\,b_{n-1}\Psi_{n-1}(x;q), \quad n \ge 1; \\ &a_\mu^-\Psi_0(x;q) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Определим далее оператор N, нумерующий базисные состояния,

$$N\Psi_n(x;q) = n\Psi_n(x;q); \quad (N|n\rangle = n|n\rangle) \quad n \ge 0. \tag{38}$$

Нетрудно проверить справедливость соотношений

$$a_\mu^- a_\mu^+ = q^{-2N}[N+I]_q, \quad a_\mu^+ a_\mu^- = q^{-2(N-1)}[N]_q, \tag{39}$$

где символ $[n]_q := \dfrac{1-q^n}{1-q}$ – стандартное “математическое” q-число. Из формул (39) следуют перестановочные соотношения операторов рождения и уничтожения:

$$a_\mu^- a_\mu^+ - q^{-1}a_\mu^+ a_\mu^- = q^{-2N}, \quad a_\mu^- a_\mu^+ - q^{-2}a_\mu^+ a_\mu^- = q^{-N}. \tag{40}$$

Для гамильтониана

$$H_\mu = \frac{1}{2}\frac{q}{1-q}\left({X_\mu}^2 + {P_\mu}^2\right) = a_\mu^+ a_\mu^- + a_\mu^- a_\mu^+ \tag{41}$$

полиномы $|n\rangle := \Psi_n(x;q)$, являются собственными функциями

$$H_\mu|n\rangle = \lambda_n|n\rangle, \tag{42}$$

соответствующими собственным значениям

$$\lambda_n = \frac{q}{1-q}\left(b_{n-1}^2 + b_n^2\right) = q^{-2n}[n+1]_q + q^{-2(n-1)}[n]_q, \quad n \geq 0. \tag{43}$$

Аналогично тому, как это было показано в [42] в случае классических многочленов, можно доказать, что уравнение (42) эквивалентно q-разностному уравнению для дискретных q-полиномов Эрмита II-го типа:

$$\begin{aligned} &-(1-q^n)x^2\tilde{h}_n(x;q) = \\ &\quad = q\tilde{h}_n(x-i;q) - (1+q+x^2)\tilde{h}_n(x;q) + (1+x^2)\tilde{h}_n(x+i;q), \end{aligned} \tag{44}$$

которое является аналогом уравнения Шредингера для описанного выше q-осциллятора.

3. Когерентные состояния для q-осциллятора, ассоциированного с дискретными q-полиномами Эрмита $\tilde{h}_n(x;q)$

Определим когерентные состояния типа Барута–Жирарделло стандартным образом [48]

$$a_\mu^-|z\rangle = z|z\rangle; \quad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1}(|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\left(\sqrt{\frac{q}{1-q}}\,b_{n-1}\right)!}\,|n\rangle. \tag{45}$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{q}{1-q}{b_{n-1}}^2\right)! = \left(\frac{q}{1-q}\right)^n q^{-n^2}(q;q)_n \tag{46}$$

вычислим нормирующий множитель

$$\mathcal{N}^2(|z|^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-q}{q}\,|z|^2\right)^n\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = {}_0\phi_1\left(\left.\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\right|q;(1-q)|z|^2\right). \tag{47}$$

и перекрытие двух когерентных состояний

$$\langle z_1 \mid z_2\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-q}{q}\,\bar{z}_1 z_2\right)^n\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = {}_0\phi_1\left(\left.\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\right|q;(1-q)\bar{z}_1 z_2\right). \tag{48}$$

Далее, подставляя (47) в (45) и используя производящую функцию для полиномов $\tilde{h}_n(x;q)$ (см. [45, (3.296)]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_n(x;q)\tau^n = (i\tau;q)_\infty {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} ix \\ i\tau \end{matrix} \middle| q; -i\tau \right), \tag{49}$$

получаем с учетом (22) явный вид когерентного состояния $|z\rangle$

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\left(\frac{q}{1-q}\right)^n q^{-n^2}(q;q)_n}} \, \frac{\tilde{h}_n(x;q)}{q^{-\frac{1}{2}n^2}\sqrt{(q;q)_n}} =$$

$$= \left({}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| -iq; (1-q)|z|^2 \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-q}{q}}\, zq \right)^n \frac{q^{n(n-1)}}{(q;q)_n} \tilde{h}_n(x;q)$$

$$= \frac{(i\sqrt{q(1-q)}\, z;q)_\infty \, {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} ix \\ i\sqrt{q(1-q)}\, z \end{matrix} \middle| q; -i\sqrt{q(1-q)}\, z \right)}{\sqrt{{}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| -iq; (1-q)|z|^2 \right)}}. \tag{50}$$

Осталось доказать формулу разложения единицы (соотношение (сверх)полноты)

$$\iint_{\mathbb{C}} \widehat{W}(|z|^2)|z\rangle\langle z| \mathrm{d}^2 z = \mathbb{1}, \tag{51}$$

т.е. построить меру

$$\mathrm{d}\mu(|z|^2) = \widehat{W}(|z|^2)\mathrm{d}^2 z. \tag{52}$$

Известно [48, 49], что с этой целью надо решить классическую проблему моментов Стильтьеса

$$\pi \int_0^{\infty} x^n W(x) \mathrm{d}\, x = \left(\frac{q}{1-q} \right)^n q^{-n^2}(q;q)_n, \quad n \geq 0, \tag{53}$$

где

$$W(x) = \frac{\widehat{W}(x)}{\mathcal{N}^2(x)}, \quad (x = |z|^2). \tag{54}$$

При замене переменных

$$x = \frac{q}{1-q} y, \quad \frac{\pi q}{1-q} W\left(\frac{q}{1-q} y\right) = \widetilde{W}(y), \tag{55}$$

проблема моментов (53) принимает вид

$$\int_0^\infty y^n \widetilde{W}(y)\mathrm{d}\, y = q^{-n^2}(q;q)_n. \tag{56}$$

4. Решение проблемы моментов (56)

Определим обобщенную экспоненту

$$\widehat{e}_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{b_{n-1}!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} x^n = {}_0\phi_1\left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}\middle| q,\, qx\right) \tag{57}$$

и соответствующую деформированную производную

$$\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q f(x) = \frac{f(q^{-2}x) - f(q^{-1}x)}{q^{-1}x}, \tag{58}$$

так что

$$\begin{aligned} &\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q x^n = \begin{cases} {b_{n-1}}^2 x^{n-1} & \text{при} \quad n \geq 1; \\ 0 & \text{при} \quad n = 0 \end{cases}, \\ &\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q \widehat{e}_q(x) = \widehat{e}_q(x); \end{aligned} \tag{59}$$

и справедливо следующее обобщение правила Лейбница

$$\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q (u(x)v(x)) = \begin{cases} v(q^{-2}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q u(x) + u(q^{-1}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(x), \\ v(q^{-1}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q u(x) + u(q^{-2}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(x). \end{cases} \tag{60}$$

Соответствующий q-интеграл определяется равенством

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(t)\widehat{\mathrm{d}}_q\, t = \\ &= \frac{1-q}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^{-(k-1)} f(q^{-(k-1)}) + q^{(k+2)} f(q^{(k+2)}) \right), \quad |q| < 1. \end{aligned} \tag{61}$$

Нетрудно убедиться в том, что интеграл существует для непрерывных функций $f(x) = \widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q F(x)$, таких что $F(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ и что

$$\int_0^a \widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q f(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x = f(a) - f(0). \tag{62}$$

Интегрируя правило Лейбница (60) с учетом формулы (62), получаем формулу интегрирования по частям ($0 < a \le \infty$)

$$\int_0^a u(q^{-1}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x = \\ = u(x)v(x)\Big|_0^a - \int_0^a v(q^{-2}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q u(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x; \tag{63a}$$

$$\int_0^a u(q^{-2}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x = \\ = u(x)v(x)\Big|_0^a - \int_0^a v(q^{-1}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q u(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x. \tag{63b}$$

Для случая $a = \infty$ перепишем формулу (63a) в следующем виде. Сперва, осуществив в интеграле в правой части равенства (63a) замену $q^{-1}x = y$, получим

$$\int_0^\infty u(q^{-1}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x = \int_0^\infty u(y)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(qy)\widehat{\mathrm{d}}_q\, y. \tag{64}$$

Тогда, учитывая независимость интеграла (61) от обозначения переменной интегрирования, получим окончательно

$$\int_0^\infty u(x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q v(qx)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x = \\ = u(x)v(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v(q^{-2}x)\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q u(x)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x. \tag{65}$$

Рассмотрим функцию $f(y)$, удовлетворяющую условию

$$\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right]}_q f(q^2 y) = -q^2 f(y). \tag{66}$$

Используя определение деформированной производной (58), получим из (66) разностное уравнение

$$\frac{f(qy) - f(q^2 y)}{q^{-1} y} = -q^2 f(y)$$

для функции $f(y)$. Переписав это уравнение в виде

$$f(qy) - f(q^2 y) = -qyf(y), \tag{67}$$

найдем его решение в форме степенного ряда

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_n} q^{-\binom{n}{2}} (-y)^n = {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0,\, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q;\, y \right). \tag{68}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_n(q) := \int_0^{\infty} x^n \, {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0,\, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q;\, q^{-2} x \right) \widehat{\mathrm{d}}_q \, x, \quad n \geq 0. \tag{69}$$

Из (66) следует, что

$$-\widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_q \, {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0,\, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q;\, qx \right) = {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0,\, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q;\, q^{-2} x \right). \tag{70}$$

Применяя к интегралу $I_n(q)$ формулу интегрирования по частям (65) с $u(x) = x^n$ и $v(x) = -\left({}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0,\, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q;\, x \right) \right)$, имеем при $n \geq 1$

$$I_n(q) = \int_0^{\infty} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0,\, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q;\, q^{-2} x \right) \, {b_{n-1}}^2 x^{n-1} \widehat{\mathrm{d}}_q \, x, \tag{71}$$

так как внеинтегральный член обращается в нуль, и, следовательно,

$$I_n(q) = {b_{n-1}}^2 I_{n-1}(q), \quad n \geq 1. \tag{72}$$

С другой стороны, при $n = 0$ имеем

$$I_0(q) = -\int_0^\infty \widehat{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_q} {}_2\phi_0\left(\begin{matrix}0,\,0\\ -\end{matrix}\middle| q;\, q^{-2}x\right)\widehat{\mathrm{d}}_q\, x = \\ = -{}_2\phi_0\left(\begin{matrix}0,\,0\\ -\end{matrix}\middle| q;\, qx\right)\Big|_0^\infty = 1. \tag{73}$$

Из формул (72) и (73) следует

$$I_n(q) = {b_{n-1}}^2! = q^{-n^2}(q;q)_n. \tag{74}$$

Таким образом, проблема моментов (56) имеет решение

$$\widetilde{W}(y) = \frac{1-q}{q^2}\sum_{k=0}^\infty y\ {}_2\phi_0\left(\begin{matrix}0,\,0\\ -\end{matrix}\middle| q;\, q^{-2}y\right)\times \\ \times\left(\delta(y - q^{-(k-1)}) + \delta(y - q^{(k+2)})\right) \tag{75}$$

так что

$$\widehat{W}(x) = \mathcal{N}^2(x)\frac{1-q}{\pi q}\widetilde{W}(\tfrac{1-q}{q}x) = \\ = \frac{1-q}{\pi q}{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\ 0\end{matrix}\middle| q;\, (1-q)x\right)\times \\ \sum_{k=0}^\infty \frac{(1-q)^2}{q^3}x\ {}_2\phi_0\left(\begin{matrix}0,\,0\\ -\end{matrix}\middle| q;\, \tfrac{1-q}{q^3}x\right)\times \\ \times\left(\delta(\tfrac{1-q}{q}x - q^{-(k-1)}) + \delta(\tfrac{1-q}{q}x - q^{(k+2)})\right). \tag{76}$$

В результате для меры $\mathrm{d}\mu(|z|^2)$ из разложения единицы (51)–(52) имеем

$$\mathrm{d}\mu(|z|^2) = \frac{(1-q)^3}{\pi q^4}\,{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\ 0\end{matrix}\middle| q;\, (1-q)|z|^2\right)\times \\ \times\sum_{k=0}^\infty k|z|^2\ {}_2\phi_0\left(\begin{matrix}0,\,0\\ -\end{matrix}\middle| q;\, \tfrac{1-q}{q^3}|z|^2\right)\times \\ \times\left(\delta(\tfrac{1-q}{q}|z|^2 - q^{-(k-1)}) + \delta(\tfrac{1-q}{q}|z|^2 - q^{(k+2)})\right). \tag{77}$$

Тем самым доказана полнота построенной системы когерентных состояний.

Благодарности. Авторы признательны проф. В. М. Бабичу и участникам руководимого им семинара за обсуждение результатов тесно связанных с темой настоящей работы. Авторы благодарны проф. П. П. Кулишу за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* Наука ФМ, М. (1987).
2. И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.* Наука, М. (1979).
3. J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam (eds), *Coherent States – Applications in Physics and Mathematical Physics.* World Scientific, Singapore (1985).
4. Дж. Клаудер, Э.Сударшан, *Основы квантовой оптики.* Мир, М. (1979).
5. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.* 2-е изд., Наука ФМ, М. (1971).
6. *Когерентные состояния в квантовой теории* (В. И. Манько, ред.), Новости Фундаментальной Физики, вып. 1, Мир, М. (1972).
7. W.-M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore, *Coherent states: theory and some applications.* — Rev. Mod. Phys. **62** (1990), 867–927.
8. S. T. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and their Generalizations.* Springer, New York (2000).
9. S. T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, U. A. Mueller, *Coherent states and their generalizations: A mathematical overview.* — Rev. Math. Phys. **7**:7 (1995), 1013–1104.
10. V. V. Dodonov, *"Nonclassical" states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years.* — J. Opt. B. **4**:1 (2002), R1–R33.
11. K. Thirulogasanthar, A. L. Hohouéto, *Vector coherent states with matrix moment problems.* — `math-ph/0311046`.
12. K. Thirulogasanthar, G. Honnouvo, *Multi Matrix Vector Coherent States.* — `math-ph/0308045`.
13. K. Thirulogasanthar, A. L. Hohouéto, *Vector coherent states on Clifford algebras.* — `math-ph/0308020`.
14. S. T. Ali, M. Englis, J.-P. Gazeau, *Vector Coherent States from Plancherel's Theorem, Clifford Algebras and Matrix Domains.* — `math-ph/0311042`.
15. T. Appl, D. H. Schiller, *Generalized Hypergeometric Coherent States.* `quant-ph/0308013`.
16. P. Blasiak, K. A. Penson, A. I. Solomon, *Combinatorial coherent states via normal ordering of bosons.* — `quant-ph/0311033`.
17. S. T. Ali, R. Roknizadeh, M. K. Tavassoly, *Representations of Coherent States in Nonorthogonal Bases.* — `quant-ph/0310147`.
18. M. Daoud, E. H. El Kinani, *The Moyal Bracket in the Coherent States framework.* — J. Phys. A **35**:11 (2002), 2639, `math-ph/0309037`.
19. J.-P. Gazeau, W. Piechocki, *Asymptotic coherent states quantization of a particle in de Sitter space.* — `hep-th/0308019`.

20. C. Anastopoulos, *Coherent states of spinning relativistic particles.* — quant-ph/0312025.
21. T. Shreecharan, P. K. Panigrahi, J. Banerji, *Coherent states for exactly solvable potentials.* — quant-ph/0309038.
22. Y-Z. Zhang, *Coherent State Construction of Representations of* $osp(2|2)$ *and Primary Fields of* $osp(2|2)$ *Conformal Field Theory.* — hep-th/0312024.
23. Lorenz Hartmann, John R. Klauder, *Weak Coherent State Path Integrals.* — hep-th/0309184.
24. E. Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Macromechanik.* — Naturwissenshaften **14** (1926), 644–666.
25. R. J. Glauber, *The Quantum Theory of Optical Coherence.* — Phys. Rev. **130** (1963), 2529–2539.
26. R. J. Glauber, *Coherent and incoherent states of radiation field.* — Phys. Rev. **131** (1963), 2766–2788.
27. J. R. Klauder, *The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers.* — Ann. Phys. **11** (1960), 123–168.
28. E. C. G. Sudarshan, *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams.* — Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 277–279.
29. A. O. Barut, L. Girardello, *New "Coherent States" Associated with Noncompact Groups.* — Comm. Math. Phys. **21**, No.1 (1972), 41–55.
30. J.-P. Gazeau, J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum.* J. Phys. A. **32**, No.1 (1999), 123–132.
31. J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, P. Monceau, J. R. Klauder, K. A. Penson, *Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl–Teller potentials.* — J. Math. Phys. **42** (2001), 2349–2386, math-ph/0012044.
32. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* ФМ, М. (1961).
33. B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator.* — Adv. Math. **137** (1998), 82–203.
34. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, *Construction of the spectral measure for the deformed oscillator position operator in the case of undetermined Hamburger moment problem.* — Rev. Math. Phys. **12**, No. 5 (2000), 691–710, math.QA/9803089.
35. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния для осциллятора Лежандра.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **285** (2002), 39–52, math.QA/0307187 .
36. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния и полиномы Чебышева.* — В кн.: Сб. трудов международной конференции "Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания", Обнинск, 14–18 мая 2002 г. quant-ph/0307133.
37. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния и ортогональные многочлены.* Труды конференции "День Дифракции 2002", СПб (2002) math.QA/0209181.
38. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Barut-Girardello Coherent states for Gegenbauer oscillator.* Zap. Nauchn. Semin. POMI **291** (2002), 43–63.
39. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Generalized Coherent states: A Novel Approach.* Zap. Nauchn. Semin. POMI **300** (2003), 65–70.

40. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Generalized Coherent States for q-oscillator connected with q-Hermite Polynomials.* Day on Diffraction 2003, SPb (2003); math.QA/0307356.
41. A. Odzijewicz, M. Horowski, and A. Tereszkiewicz, *Integrable multi-boson systems and orthogonal polynomials.* — J. Phys. **A34** (2001), 4353–4376.
42. V. V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras.* — Integral Transf. Special Funct. **12**:2 (2001), 115–138; math.CA/0002226.
43. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Realization of the annihilation operator for an oscillator-like system by a differential operator and Hermite-Chihara polynomials.* — Integral Transforms and Special Functions **13** (2002), 547–554; math.QA/0101215.
44. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *Деформированные осцилляторы и их приложения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **189** (1991), 39–74.
45. R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey sheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* — Report No. 94-05, Delft University of Technology (1994), (math.CA/9602214).
46. G. Gasper, M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series.* Cambridge Univ. Press (1990) in Encyclopedia of Mathematics and its Applications 35.
47. C. Berg, *On some indeterminate moment problems for measures on a geometric progression.* — J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 67–75 http://www.elsevier.nl/locate/cam.
48. J. R. Klauder, K. A. Penson, J.-M. Sixdeniers, *Constructing coherent states through solutions of Stieltjes and Hausdorff moment problems.* — Phys. Rev. **64**, 1 013817 (2001).
49. K. A. Penson, A. I. Solomon, *New generalized coherent states,.* — J. Phys. Rev. **40**, 5 (1999), 2354–2363.

Borzov V. V., Damaskinsky E. V. Generalized coherent states for q-oscillator connected with discrete q-Hermite polynomials.

We are continuing here the study of generalized coherent states of Barut-Girardello type for the oscillator-like systems connected with the given set of orthogonal polynomials. In this work we construct the family of coherent states associated with discrete q-Hermite polynomials of the II-type and prove the over-completeness of this family of states by constructing the measure for unity decomposition for this family of coherent states.

С.-Петербургский Университет
Телекомуникаций. Каф. Математики
Военный Инженерный Технический
Университет. Каф. Математики

Поступило 21 декабря 2003 г.

E-mail: evd@pdmi.ras.ru