Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

А. В. Хаустов, Н. А. Широков

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Аппроксимация функций с помощью полиномов, рациональных или целых функций составляет в настоящее время существенную часть всего математического анализа. Развитие этой проблематики показало, что наряду с решением старых проблем и усилением имеющихся оценок оказывается важным распространение утверждений о приближении на новые математические ситуации. Данная статья посвящена приближениям с помощью двоякопериодических функций, эти приближения не рассматривались ранее. Окончательная формулировка результата требует введения ряда новых характеристик и приведена в конце работы. В процессе рассуждений мы будем опираться на развитую теорию аппроксимации на подмножествах комплексной плоскости, что позволит значительно сократить доказательства.

1. Постановка задачи

Пусть Q – параллелограмм на комплексной плоскости с вершинами в точках 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2(\omega_1+\omega_2)=2\omega_3$, причем $\operatorname{Im}\dfrac{\omega_2}{\omega_1}>0$, $\mathfrak{P}$ – классическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ [1, гл. 1]. Пусть $Q^0=\operatorname{Int}Q$, $D:\overline{D}\subset Q^0$ – односвязная область, $H^\alpha(\overline{D})$, $0<\alpha<1$, – класс функций, аналитических в D и удовлетворяющих в $\overline{D}$ условию Гельдера порядка α:

$$|f(\eta)-f(z)|\leqslant c|\eta-z|^\alpha,\quad \eta,z\in\overline{D}.$$

Известны описания класса $H^\alpha(\overline{D})$ в терминах скорости приближения функций этой класса полиномами $P_n(z)$, $\deg P_n\leqslant n$, класса $H^\alpha([-\omega,\omega])$, $0<\omega<\pi$, в терминах скорости приближения тригонометрическими полиномами [2]. В данной работе исследуется вопрос о возможности описания класса $H^\alpha(\overline{D})$ в терминах скорости приближения функциями вида $P_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))$, где

$P_n(\zeta,\omega)$ – полином двух переменных степени не выше n. Эта задача имеет следующую геометрическую интерпретацию. Отображение $T(z) = (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$ устанавливает взаимно однозначное соответствие параллелограмма Q с комплексной эллиптической кривой $E \subset \mathbb{C}^2$, задаваемой соотношением $E = \{(\zeta,\omega) \in \mathbb{C}^2 : \omega^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3\}$, где g_2, g_3 – некоторые постоянные [1, гл. 1]. Для $G \subset E$ под G^0 будем понимать множество точек $(\zeta_0,\omega_0) \in G$, для которых $\{(\zeta,\omega) : |\zeta - \zeta_0| < r_1, |\omega - \omega_0| < r_2\} \cap E \subset G$ при некоторых r_1, r_2. При указанном отображении множество $\overline{D}$ переходит в некоторое связное множество $G \subset E$, класс $H^\alpha(\overline{D})$ – в естественное определяемый класс $H^\alpha(G)$ функций, аналитических в G^0 и удовлетворяющих в G условию Гельдера порядка α (см. п. 3), а семейство функций $P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$ переходит в семейство полиномов $P_n(\zeta,\omega)$ на эллиптической кривой. Тем самым поставленная задача переформулируется в вопрос о возможности описания класса $H^\alpha(G)$ в терминах скорости приближения полиномами на эллиптической кривой. В настоящей работе мы установим лишь так называемую прямую теорему приближения, которая, как мы полагаем, согласуется с соответствующей рассматриваемой ситуации обратной теоремой.

2. Описание классов областей

Мы ограничимся в данной работе рассмотрением областей следующего вида. Пусть D – односвязная область, лежащая в Q^0 вместе со своей границей. Относительно границы области D будем предполагать, что произвольная дуга этой границы достаточно малой длины соизмерима с ее хордой, т.е. найдутся такие постоянные c_1, c_2 и l_0, что при произвольных s_1, $s_2 \in \partial D$, $|s_1 - s_2| < l_0$, справедливы неравенства $c_1|s_1 - s_2| \leqslant |\widehat{s_1 s_2}| \leqslant c_2|s_1 - s_2|$. Условие соизмеримости величин A и B будем обозначать записью $A \asymp B$. Пусть по-прежнему $T(z) = (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$. Справедлива

Лемма 1. *Пусть точки $s', s'' \in \partial D$, $T(s') = (\zeta', \omega')$, $T(s'') = (\zeta'', \omega'')$, $|s' - s''| < l_0'(D)$, где $l_0'(D)$ – некоторая постоянная, зависящая от области D, но не от точек s', s''. Тогда $|s' - s''| \asymp |T(s') - T(s'')|$.*

Доказательство. Заметим, что граница области D лежит вне некоторой окрестности начала координат, значит, везде в $\overline{D}$ имеем $|\mathfrak{P}'| \leqslant M_1$, $|\mathfrak{P}''| \leqslant M_2$, откуда

$$|T(s') - T(s'')| \leqslant (M_1 + M_2)|s' - s''|.$$

Обратно, выбирая постоянную $l_0'(D)$ достаточно малой, мы можем добиться того, чтобы отрезок $[s', s'']$ лежал в некоторой области, где либо $\mathfrak{P}$, либо $\mathfrak{P}'$ однолистны, значит, либо $|\mathfrak{P}'| \geqslant m_1 > 0$, либо $|\mathfrak{P}''| \geqslant m_2 > 0$. Рассматривая кривую $\Gamma_{s',s''}$, являющуюся прообразом отрезка $[\mathfrak{P}(s'), \mathfrak{P}(s'')]$ при отображении функцией $\mathfrak{P}$ в первом случае, и прообразом отрезка $[\mathfrak{P}'(s'), \mathfrak{P}'(s'')]$ при отображении функцией $\mathfrak{P}'$ во втором, получим

$$|s' - s''| \leqslant l_{\Gamma_{s',s''}} \leqslant \frac{1}{m_1}|\mathfrak{P}(s') - \mathfrak{P}(s'')| + \frac{1}{m_2}|\mathfrak{P}'(s') - \mathfrak{P}'(s'')| \leqslant \\ \leqslant m|T(s') - T(s'')|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Область D обладает свойством соизмеримости дуги ее границы с хордой тогда и только тогда, когда область G, определенная в п. 1, обладает тем же свойством.*

Доказательство. Соизмеримость длины дуги границы области D с длиной ее образа при отображении T устанавливается аналогично доказательству леммы 1. Отсюда и вытекает требуемое утверждение. □

3. Описание классов функций

В этом пункте мы опишем класс функций, для которого будет получена теорема приближения.

Под классом $H^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, будем понимать множество функций $f : G \to \mathbb{C}$, обладающих следующими свойствами:

1) f аналитична в G^0, что нужно понимать в следующем смысле: для произвольной точки $(\zeta_0, \omega_0) \in G^0$ найдется полидиск $B_{r_1,r_2}(\zeta_0, \omega_0) = \{|\zeta - \zeta_0| < r_1, |\omega - \omega_0| < r_2\}$ и функция F_{ζ_0,ω_0}, голоморфная по переменным ζ и ω в области $B_{r_1,r_2}(\zeta_0, \omega_0)$, такие, что функция f совпадает с F_{ζ_0,ω_0} во всех точках множества $G \cap B_{r_1,r_2}(\zeta_0, \omega_0)$;

2) при произвольных $s_1, s_2 \in G$ справедливо неравенство

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant c\big|s_1 - s_2\big|^\alpha.$$

Для каждой функции $f \in H^\alpha(G)$ существует функция $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ такая, что $\varphi(z) = f(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$.

Лемма 3. *Функция f принадлежит классу $H^\alpha(G)$ в том и только в том случае, когда $\varphi \in H^\alpha(\overline{D})$.*

Доказательство. Равносильность условий Гельдера для функций f и φ непосредственно вытекает из леммы 1. Докажем, что для аналитичности функции f необходима и достаточна аналитичность функции φ. Необходимость вытекает из голоморфности функций $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}'$ в замкнутой области $\overline{D}$. Докажем достаточность.

Пусть $(\zeta_0, \omega_0) = (\mathfrak{P}(z_0), \mathfrak{P}'(z_0)) \in G^0$. Предположим сначала, что $z_0 = \omega_3$. Тогда, поскольку $\mathfrak{P}''(\omega_3) \neq 0$, найдется окрестность $B_\delta(\omega_3) = \{|z - \omega_3| < \delta\}$ такая, что $\mathfrak{P}'$ однолистна в $B_\delta(\omega_3)$. Кроме того, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}'$ аналитичны в $B_\delta(\omega_3)$, значит, найдутся значения ε_1 и ε_2, для которых

$$D_1 = \{|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon_1\} \subset \mathfrak{P}(B_\delta), \quad D_2 = \{|\omega - \omega_0| < \varepsilon_2\} \subset \mathfrak{P}'(B_\delta).$$

Рассмотрим полидиск $D_1 \times D_2$ и в нем функцию $F(\zeta, \omega) = \varphi({\mathfrak{P}'}^{-1}(\omega))$, где под ${\mathfrak{P}'}^{-1}(\omega)$ понимается значение этой функции в B_δ. Функция F, как легко видеть, голоморфна в $D_1 \times D_2$. Рассмотрим произвольную точку $(\zeta, \omega) \in (D_1 \times D_2) \cap G$. Тогда $(\zeta, \omega) = (\mathfrak{P}(\eta), \mathfrak{P}'(\eta))$ для некоторого $\eta \in \overline{D}$. Если мы докажем, что $\eta \in B_\delta$, то, пользуясь однолистностью $\mathfrak{P}'$ в B_δ, получим, что $\eta = {\mathfrak{P}'}^{-1}(\omega)$ и $F(\zeta, \omega) = \varphi(\eta) = f(\mathfrak{P}(\eta), \mathfrak{P}'(\eta)) = f(\zeta, \omega)$. Требуемое условие действительно имеет место, поскольку $\mathfrak{P}(\eta) = \zeta \in D_1 \subset \mathfrak{P}(B_\delta)$ и так как функция $\mathfrak{P}$ принимает значение ζ только в точках η и η^*, где η^* – точка, симметричная с η относительно ω_3, то $\eta \in B_\delta$.

Пусть теперь $z_0 \neq \omega_3$. Рассмотрим область $B_\delta = B_\delta(z_0) \subset D$ и область $B'_\delta = B_\delta(2\omega_3 - z_0)$, симметричную с B_δ относительно точки ω_3, представляющие собой такие окрестности указанных точек, что $\mathfrak{P}'(B_\delta) \cap \mathfrak{P}'(B'_\delta) = \varnothing$ ($\mathfrak{P}'(z_0) = -\mathfrak{P}'(2\omega_3 - z_0)$) и, кроме того, $\mathfrak{P}$ однолистна в $B_\delta(z_0)$. Рассмотрим полиск $D_1 \times D_2$, где

$$D_1 = \{\zeta - \zeta_0| < \varepsilon_1\} \subset \mathfrak{P}(B_\delta), \quad D_2 = \{\omega - \omega_0| < \varepsilon_2\} \subset \mathfrak{P}'(B_\delta)$$

и функцию $F(\zeta, \omega) = \varphi(\mathfrak{P}^{-1}(\zeta))$, где под $\mathfrak{P}^{-1}(\zeta)$ понимается значение этой функции в B_δ. Для произвольной точки $(\zeta, \omega) = (\mathfrak{P}(\eta), \mathfrak{P}'(\eta)) \in (D_1 \times D_2) \cap G$ имеем: $\zeta \in D_1 \subset \mathfrak{P}(B_\delta)$, $\zeta = \mathfrak{P}(\eta^*)$ для некоторого $\eta^* \in B_\delta$. Если $\eta \neq \eta^*$, то $\eta \in B'_\delta$ и $\mathfrak{P}'(\eta) \in \mathfrak{P}'(B'_\delta) \cap \mathfrak{P}'(B_\delta) = \varnothing$, что невозможно, значит, $\eta \in B_\delta$. Так же, как и ранее, отсюда следует, что $F(\zeta, \omega) = f(\zeta, \omega)$. □

Из леммы 3 вытекает, что приближение функции $f \in H^\alpha(G)$ полиномами от ζ и ω на подмножествах $G \subset E \subset \mathbb{C}^2$ сводится к приближению соответствующей ей функции $\varphi \in H^\alpha(\overline{D})$ функциями вида $P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$, где $\deg P_n \leqslant n$. Более точно, мы получим утверждения о скорости приближения полиномиальными функциями от $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{P}'(z)$ степени $n' = cn$, где постоянная c зависит от множества D, но не зависит от функции φ и от n.

4. Семейство функций, описывающих скорость приближения

Здесь мы опишем семейство граничных весов, которое будет использовано нами для оценки скорости приближения функций рассматриваемого класса.

Пусть по-прежнему $D : \overline{D} \subset Q^0$ – односвязная область с границей, малые дуги которой соизмеримы с их хордами.

Пусть Φ – конформное отображение $\mathbb{C} \setminus D$ на $\mathbb{C} \setminus \{|z| < 1\}$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, и пусть $\Psi = \Phi^{-1}$. Обозначим $L_{1+t} = \Psi(\{|z| = 1 + t\})$, $t > 0$, и пусть

$$\rho^D_{1+t}(z) = \operatorname{dist}(z, L_{1+t}), \quad z \in \partial D.$$

(Будем использовать сокращенное обозначение $\rho_{1+t}(z)$, если область D не меняется в рассуждениях.) Пусть

$$\tilde{z}^D_t = \Psi((1+t)\Phi(z)), \quad z \in \partial D.$$

Лемма 4. *Пусть $\widetilde{Q}$ – некоторая область, содержащая $\overline{D}$. Пусть $s : \widetilde{Q} \to \mathbb{C}$ – отображение, однолистное в области $\widetilde{Q}$. Тогда*

1) *$s(D)$ – область, обладающая свойством соизмеримости дуги ее границы с хордой;*
2) *найдется постоянная t_0 такая, что $\rho^D_{1+t}(z) \asymp \rho^{s(D)}_{1+t}(s(z))$ при произвольных $z \in \partial D$ и $t < t_0$, где постоянная t_0 и константы соизмеримости зависят только от областей $\widetilde{Q}$ и D, но не от z и t.*

Доказательство. Свойство 1) вытекает из неравенств $0 < A < |s'(z)| < B < \infty$. Для доказательства свойства 2) обозначим через $g_D(z)$ функцию Грина области $\mathbb{C} \setminus D$ с логарифмическим полюсом в бесконечности. Тогда $L_{1+t} = \{z \in \mathbb{C} \setminus D : g_D(z) = \log(1+t)\}$. Пусть $\Omega_{D,\widetilde{Q}}(z)$ – гармоническая мера кривой $\partial\widetilde{Q}$ относительно $\widetilde{Q} \setminus D$, $\Omega_{D,\widetilde{Q}}(z) = 0$ при $z \in \partial D$, $\Omega_{D,\widetilde{Q}}(z) = 1$ при $z \in \partial\widetilde{Q}$, и пусть

$$m = \min_{z \in \partial\widetilde{Q}} g_D(z), \quad M = \max_{z \in \partial\widetilde{Q}} g_D(z).$$

Тогда
$$m\Omega_{D,\widetilde{Q}}(z) \leqslant g_D(z) \leqslant M\Omega_{D,\widetilde{Q}}(z), \quad z \in \widetilde{Q} \setminus D,$$
и поэтому
$$\operatorname{dist}(z, L_{1+t}) \asymp \operatorname{dist}(z, L_{1+t}^{D,\widetilde{Q}}), \quad z \in \partial D,$$
где
$$L_{1+t}^{D,\widetilde{Q}} = \Big\{ z \in \widetilde{Q} \setminus D \colon \Omega_{D,\widetilde{Q}}(z) = \log(1+t) \Big\}.$$

С другой стороны, в силу однолистности функции s в $\widetilde{Q}$, имеем $\Omega_{s(D),s(\widetilde{Q})}(s(z)) = \Omega_{D,\widetilde{Q}}(z)$ и
$$\operatorname{dist}(z, L_{1+t}^{D,\widetilde{Q}}) \asymp \operatorname{dist}\Big(s(z), L_{1+t}^{s(D),s(\widetilde{Q})}\Big).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. □

5. Построение приближающих функций

В этом пункте мы опишем полиномы, для которых будет получена оценка скорости их приближения к искомой функции. Предварительно нам понадобится следующий результат.

Лемма 5. *Пусть Q_r – параллелограмм с центром в точке ω_3 и сторонами длины $2r|\omega_1|$, $2r|\omega_2|$, $0 < r < 1$. Пусть функция F аналитична в Q_r, принадлежит в $\overline{Q}_r$ классу $H^{1+\alpha}$, кроме того, $F(z) = F(2\omega_3 - z)$ для произвольного $z \in \overline{Q}_r$. Тогда для произвольного n можно указать полином Q_n, $\deg Q_n \leqslant n$, такой, что*
$$\begin{gathered}\big|F(z) - Q_n(\mathfrak{P}(z))\big| \leqslant c \cdot n^{-(\alpha+1)} \\ \big|F'(z) - (Q_n(\mathfrak{P}(z)))'\big| \leqslant c \cdot n^{-\alpha}, \quad z \in \overline{Q}_r.\end{gathered}$$

Доказательство. Пусть $K_r = \mathfrak{P}(Q_r)$. Каждая точка K_r имеет ровно 2 прообраза в Q_r. Граница области K_r – кусочно-гладкая кривая с двумя угловыми точками, соответствующими вершинам параллелограмма Q_r. Применяя теорему о монодромии, можно указать такую аналитическую в K_r функцию F_0 класса $H^{1+\alpha}(\overline{K}_r)$, что $F_0(\mathfrak{P}(z)) = F(z)$. Применяя далее классические теоремы приближения [3; 4, глава 9], построим полином $Q_n(\tau)$ такой, что
$$\begin{gathered}\big|F_0(\tau) - Q_n(\tau)\big| \leqslant c \cdot n^{-(\alpha+1)}, \\ \big|F_0'(\tau) - Q_n'(\tau)\big| \leqslant c \cdot n^{-\alpha}.\end{gathered}$$

Заменяя τ на $\mathfrak{P}(z)$, получим требуемое утверждение. $\square$

Пользуясь доказанной леммой, проведем некоторые дополнительные построения. Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{z-\omega_3}{\mathfrak{P}'(z)}$ и параллелограмм Q_r, выбранный таким образом, что $\overline{D} \subset Q_r$. Применяя лемму 5, построим для F многочлен $Q_{m_0}(z)$ степени $\leqslant m_0$, где величина m_0 будет определена ниже. Положим

$$s(z) = \mathfrak{P}'(z)Q_{m_0}(\mathfrak{P}(z)).$$

Функция s представляет собой полином от $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{P}'(z)$ степени $\leqslant m_0+1$.

Покажем, что s однолистна. Имеем

$$s'(z) = \Big(\mathfrak{P}'(z)\big(Q_{m_0}(\mathfrak{P}(z)) - F(z)\big) + \mathfrak{P}'(z)F(z)\Big)' =$$

$$= \mathfrak{P}''(z)\big(Q_{m_0}(\mathfrak{P}(z)) - F(z)\big) + \mathfrak{P}'(z)\big(Q_{m_0}(\mathfrak{P}(z)) - F(z)\big)' + 1.$$

Отсюда, применяя оценки леммы 5, получим

$$|s'(z)-1| \leqslant \max_{\overline{Q}_r} |\mathfrak{P}''|\frac{c}{m_0^{\alpha+1}} + \max_{\overline{Q}_r} |\mathfrak{P}'|\frac{c}{m_0^{\alpha}}.$$

Выберем m_0 так, чтобы $|s'(z)-1| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Если теперь $s(z_1)=s(z_2)$, то

$$|z_1 - z_2| = \left| \int\limits_{[z_1,z_2]} (s'(z)-1)\,dz \right| \leqslant \frac{1}{2}|z_1-z_2|,$$

следовательно, $z_1 = z_2$.

Для так построенной функции s и $\varphi \in H^\alpha(D)$ имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi(\eta)}{s(\eta)-s(z)} s'(\eta)\,d\eta.$$

Будем приближать ядро Коши $\dfrac{1}{s(\eta)-s(z)}$ полиномами от $s(\eta)$, $s(z)$. Известна следующая лемма.

Лемма 6 [4, глава 9]. *Пусть $\mathfrak{M}$ – односвязная область с жордановой границей, дуга которой соизмерима с хордой. Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$,*

$\widehat{\beta}$ – ближайшая к β точка на $\partial\mathfrak{M}$, $\rho = \rho^{\mathfrak{M}}_{1+\frac{1}{n}}(\widehat{\beta})$. Тогда существуют полиномы $\Pi^{\mathfrak{M}}_n$ от двух переменных степени $\leqslant c \cdot n$ такие, что выполнены оценки:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}} \Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)\,d\gamma - 1\right| \leqslant \frac{c(\mathfrak{M})}{n^2}, \quad \beta \in \mathfrak{M}; \tag{1}$$

$$\left|\Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)\right| \leqslant \frac{c(\mathfrak{M})}{\rho}, \quad |\beta-\gamma| \leqslant \rho, \quad \gamma \in \partial\mathfrak{M}, \quad \beta \in \mathfrak{M}; \tag{2}$$

$$\left|\frac{1}{\gamma-\beta} - \Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)\right| \leqslant c(\mathfrak{M}) \cdot \frac{\rho}{(|\gamma-\beta|+\rho)^2}, \tag{3}$$
$$|\beta-\gamma| > \rho, \quad \gamma \in \partial\mathfrak{M}, \quad \beta \in \mathfrak{M}.$$

Перейдем теперь к построению приближающих функций. Пусть $\mathfrak{M} = s(D)$. Так как ∂D – жорданова кривая, дуга которой соизмерима с хордой, а функция s однолистна в Q_r, то s-образ $\mathfrak{M}$ также является областью с жордановой границей, обладающей тем же свойством. Из леммы 6 вытекает, что при $\gamma \in \partial\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathfrak{M}$, ядро Коши $\dfrac{1}{\gamma-\beta}$ может быть приближено полиномами $\Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)$ $\Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)$ непрерывна по γ. Теперь полагаем

$$P_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda)s'(\lambda)\Pi^{\mathfrak{M}}_n(s(\lambda),s(z))\,d\lambda.$$

В силу того, что s – полином от $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ степени $\leqslant m_0+1$, P_n является полиномом от $\mathfrak{P},\mathfrak{P}'$ степени $\leqslant n' = c_0 n$, где c_0 – постоянная, зависящая от области D.

6. Оценка приближения

Займемся теперь собственно оценками скорости приближения с помощью построенных функций. Пусть $z \in D$, $\beta = s(z)$, $\widehat{\beta}$ – по-прежнему ближайшая к β точка на $\partial\mathfrak{M}$, $\widehat{\beta} = s(\widehat{z})$. В силу (1), имеем

$$\left|\varphi(\widehat{z})\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}\frac{d\gamma}{\gamma-\beta} - \varphi(\widehat{z})\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}\Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)\,d\gamma\right| =$$
$$= |\varphi(\widehat{z})|\left|1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}\Pi^{\mathfrak{M}}_n(\gamma,\beta)\,d\gamma\right| \leqslant \frac{c}{n^2}. \tag{4}$$

Поэтому

$$\varphi(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \left[\varphi(\lambda) \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda) - s(z)} - \varphi(\lambda) s'(\lambda) \Pi_n^{\mathfrak{M}}(s(\lambda), s(z)) \right] d\lambda = \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} (\varphi(\lambda) - \varphi(\widehat{z})) s'(\lambda) \left(\frac{1}{s(\lambda) - s(z)} - \Pi_n^{\mathfrak{M}}(s(\lambda), s(z)) \right) d\lambda + r_n(z),$$

где

$$|r_n(z)| \leqslant \frac{c}{n^2}.$$

Учитывая, что $|\lambda - \widehat{z}| \asymp |s(\lambda) - s(\widehat{z})|$, имеем

$$\bigl|\varphi(\lambda) - \varphi(\widehat{z})\bigr| \leqslant c \bigl|s(\lambda) - s(\widehat{z})\bigr|^{\alpha} = c|\gamma - \widehat{\beta}|^{\alpha}. \qquad (6)$$

Применяя неравенства (2)–(6), получим:

$$\bigl|\varphi(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))\bigr| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{\partial D \cap \{\lambda : |s(\lambda) - s(\widehat{z})| \leqslant \rho\}} \bigl|s(\lambda) - s(\widehat{z})\bigr|^{\alpha - 1} |s'(\lambda)|\, |d\lambda| +$$

$$+ c_2 \int\limits_{\partial D \cap \{\lambda : |s(\lambda) - s(\widehat{z})| > \rho\}} \bigl|s(\lambda) - s(\widehat{z})\bigr|^{\alpha} |s'(\lambda)| \cdot \frac{\rho}{(|s(\lambda) - \beta| + \rho)^2} |d\lambda| + \frac{c_3}{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1' \int\limits_{\partial \mathfrak{M} \cap \{\gamma : |\gamma - \widehat{\beta}| \leqslant \rho\}} \bigl|\gamma - \widehat{\beta}\bigr|^{\alpha - 1} |d\gamma| + c_2' \int\limits_{\partial \mathfrak{M} \cap \{\gamma : |\gamma - \widehat{\beta}| > \rho\}} \bigl|\gamma - \widehat{\beta}\bigr|^{\alpha - 2} \rho |d\gamma| + \frac{c_3'}{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant c' \rho^{\alpha}. \qquad (7)$$

Последнее неравенство получается буквально тем же использованием условия соизмеримости дуги с хордой, что и в [3] или в [4, глава 9]. Устремляя в (7) z к $\widehat{z}$ и пользуясь леммой 4, найдем, что при $\widehat{z} \in \partial D$ выполнено соотношение

$$|\varphi(\widehat{z}) - P_n(\mathfrak{P}(\widehat{z}), \mathfrak{P}'(\widehat{z})) \leqslant c \bigl(\rho^D_{1 + \frac{1}{n}}(\widehat{z})\bigr)^{\alpha}.$$

Таким образом доказана следующая

Теорема. *Пусть множество* $G \subset E \subset \mathbb{C}^2$ *удовлетворяет условиям п. 2. Тогда для всякой функции* $f \in H^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, *где класс* $H^\alpha(G)$ *определен в п. 3, найдутся полиномы* $P_n(\zeta, \omega)$, $\deg P_n \leqslant \mathrm{const} \cdot n$ *такие, что при* $(\zeta, \omega) \in \partial G$ *справедлива оценка*

$$\left|f(\zeta, \omega) - P_n(\zeta, \omega)\right| \leqslant c_{f,G}\, \delta^\alpha_{\frac{1}{n}}(\zeta, \omega), \tag{8}$$

где

$$\delta_{\frac{1}{n}}(\zeta, \omega) = \rho^{T^{-1}(G)}_{1+\frac{1}{n}}(T^{-1}(\zeta, \omega)),$$

величина $\rho^{T^{-1}(G)}_{1+\frac{1}{n}}$ *определена в п. 4.*

Замечание. Мы полагаем, что весовое приближение в правой части (8) выбрано так, что его использование приведет к установлению соответствующей обратной теоремы, что даст конструктивное описание класса $H^\alpha(G)$ при $G \subset E$.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций.* М., (1970).
2. Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на бесконечной системе отрезков,* Тр. С.-Петербургского Мат. об-ва **123** (2001), 181–188.
3. Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами,* Изв. АН Арм. ССCP **8**, No. 4 (1971), 311–341.
4. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 17 ноября 2003 г.