Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

О. М. Фоменко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ГИПЕРБОЛОИДАХ

§1

Равномерное распределение целых точек на гиперболоидах первыми изучали Ю. В. Линник (простейший двуполосный гиперболоид) и Б. Ф. Скубенко (простейший однополостный гиперболоид) (см. [1]). Гиперболоиды общего вида впервые рассмотрела Е. П. Голубева [2]. Доказательства всех этих результатов требовали применения некоторых недоказанных гипотез. Дьюк [3], используя результаты Иванца о суммах сумм Салье, изучил случай простейшего двуполостного гиперболида. Безусловный вариант доказательства равномерной распределенности целых точек на однополостном гиперболоиде пока не получен.

Метод Е. П. Голубевой позволяет без всяких гипотез доказать равномерную распределенность целых точек (a, b, c) на гиперболоидах вида

$$n = qb^2 + ac,$$

где $nq = N^2$; $n > 0$, N – целые числа, $q > 0$ – постоянное целое число, $n \to \infty$. Ниже будем рассматривать лишь случай $q = 1$.

Пусть Ω – область на поверхности $1 = b^2 + ac$, $r(n, \Omega)$ – число целых решений (a, b, c) уравнения

$$n = b^2 + ac$$

таких, что $(a, b, c)/\sqrt{n} \in \Omega$. Рассмотрим простейший частный случай: $n = P^2$, где P – простое число, Ω_0 – область на гиперболиде $1 = b^2 + ac$, задаваемая условиями

$$0 < L_1 \leqslant a \leqslant L_2 < 1, \quad 0 < t_1 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant t_2 < 1. \tag{1}$$

Тогда метод Е. П. Голубевой позволяет доказать, что

$$r(P^2, \Omega_0) = C(t_2 - t_1)(L_2 - L_1)P \log P + BP + O(P \log^{-\gamma} P), \tag{2}$$

где C, B, γ – некоторые константы, причем $C > 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $P \to \infty$.

Можно пытаться изучать распределение на гиперболоиде $n = b^2 + ac$ целых точек (a, b, c) с дополнительным условием

$$a = p \text{ (простое число)}.$$

В общем случае такую задачу решить тружно даже с помощью гипотез типа гипотезы Римана, однако при $n = N^2$ можно доказать нетривиальные, хотя и не полные, результаты. Для упрощения возьмем случай простого N. Введем обозначение

$$r(P^2, \Omega_0)_{pr} = \sum_{\substack{L_1 P \leqslant p \leqslant L_2 P \\ P^2 = b^2 + pc}} \sum_{t_1 \leqslant b/p \leqslant t_2} 1, \tag{3}$$

где Ω_0 – область (1), P, p – простые числа.

Теорема. *Пусть ε – любое положительное число. Тогда при $P > P(\varepsilon)$ справедливы неравенства*

$$(K - \Delta - \varepsilon)\frac{P}{\log P} \leqslant r(P^2, \Omega_0)_{pr} \leqslant (K + \Delta + \varepsilon)\frac{P}{\log P},$$

где

$$K = 2(t_2 - t_1)(L_2 - L_1), \quad \Delta = L_2^2 \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

Следствие. *При $(t_2 - t_1)(L_2 - L_1) > L_2^2 \cdot \frac{\pi}{3}$*

$$r(P^2, \Omega_0)_{pr} \asymp \frac{P}{\log P} \quad (P \to \infty).$$

Гипотеза.

$$r(P^2, \Omega_0)_{pr} \sim 2(t_2 - t_1)(L_2 - L_1)\frac{P}{\log P} \quad (P \to \infty).$$

В §2 будет дано доказательство теоремы. В §3 исследуется связь задачи (2) с суммами Салье. Отметим, что двусторонняя связь равномерного распределения целых точек на гиперболоиде с оценкой суммы сумм Салье исследована в работах [4] и [5].

§2

В этом параграфе дается доказательство теоремы. Ниже ε', ε – любые положительные числа. Используем следующую хорошо известную лемму (см. [6]).

Лемма 1. *Пусть* $e(t) = e^{2\pi i t}$. *Пусть* r *– целое положительное число,* α *и* β *– вещественные числа,*

$$0 < \delta < 0{,}25, \quad \delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \delta.$$

Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ *с периодом 1 и с условиями:*

1) $\psi(x) = 1$ *в интервале* $\alpha + 0{,}5\,\delta \leqslant x \leqslant \beta - 0{,}5\delta$;
2) $0 < \psi(x) < 1$ *в интервалах* $\alpha - 0{,}5\delta < x < \alpha + 0{,}5\delta$ *и* $\beta - 0{,}5\delta < x < \beta + 0{,}5\delta$;
3) $\psi(x) = 0$ *в интервале* $\beta + 0{,}5\delta \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - 0{,}5\delta$;
4) $\psi(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \bigl(c_m e(mx) + c'_m e(-mx)\bigr),$$

где имеем

$$\begin{aligned} &|c_m| \leqslant \frac{1}{\pi m}, && |c'_m| \leqslant \frac{1}{\pi m},\\ &|c_m| \leqslant \beta - \alpha, && |c'_m| \leqslant \beta - \alpha,\\ &|c_m| < \frac{1}{\pi m}\Bigl(\frac{r}{\pi m \delta}\Bigr)^r, && |c'_m| < \frac{1}{\pi m}\Bigl(\frac{r}{\pi m \delta}\Bigr)^r. \end{aligned}$$

Разложив сглаженную характеристическую функцию отрезка $[t_1, t_2]$ в ряд Фурье (см. лемму 1), преобразуем правую часть равенства (3) следующим образом:

$$r(P^2, \Omega_0)_{pr} = (t_2 - t_1) \sum_{L_1P \leqslant p \leqslant L_2P} \rho(p) + O\Bigl(\delta \sum_{L_1P \leqslant p \leqslant L_2P} \rho(p)\Bigr) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{L_1P \leqslant p \leqslant L_2P} \rho(P^2, m, p) + \sum_{m=1}^{\infty} c'_m \sum_{L_1P \leqslant p \leqslant L_2P} \rho(P^2, -m, p),$$

где

$$\rho(P) = \sum_{\substack{b(\mathrm{mod}\, p) \\ b^2 \equiv P^2 (\mathrm{mod}\, p)}} 1 = 2,$$

$$\rho(P^2, m, p) = \sum_{\substack{b(\mathrm{mod}\, p) \\ b^2 \equiv P^2 (\mathrm{mod}\, p)}} e\Big(\frac{bm}{p}\Big) = e\Big(\frac{Pm}{p}\Big) + e\Big(\frac{-Pm}{p}\Big).$$

Пусть

$$S = \sum_{L_1 P \leqslant p \leqslant L_2 P} e\Big(\frac{Pm}{p}\Big).$$

Имеем

$$r(P^2, \Omega_0)_{pr} = 2(t_2 - t_1) \sum_{L_1 P \leqslant p \leqslant L_2 P} 1 + O\Big(\delta \sum_{L_1 P \leqslant p \leqslant L_2 P} 1\Big) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m (S + \overline{S}) + \sum_{m=1}^{\infty} c'_m (\overline{S} + S).$$

Ниже

$$\delta = \frac{1}{(\log P)^{1/3}}.$$

Оценим теперь сверху $|S|$. Нам необходим следующий результат Россера [7].

Лемма 2. *Пусть p_k означает k-ое простое число. Для каждого положительного числа A существует константа N такая, что для $k \geqslant N$*

$$k \log k + k \log\log k - k - Ak < p_k < k \log k + k \log\log k - k + Ak.$$

По лемме 2, имеем

$$p = p_k = k \log k + O(k \log\log k).$$

Очевидно,

$$\pi(p_k) = k \sim p_k / \log p_k.$$

Рассмотрение простых $p = p_k$ из отрезка $L_1 P \leqslant p_k \leqslant L_2 P$ эквивалентно рассмотрению их номеров k из отрезка $l_1 \leqslant k \leqslant l_2$. Введем обозначение

$$f(k) = k \log k.$$

Имеем

$$\sum_{L_1P\leqslant p\leqslant L_2P} e\Big(\frac{Pm}{p_k}\Big)-\sum_{l_1\leqslant k\leqslant l_2} e\Big(\frac{Pm}{f(k)}\Big)=$$
$$=\sum_{l_1\leqslant k\leqslant l_2} e\Big(\frac{Pm}{f(k)}\Big)\Big[e\Big(Pm\Big(\frac{1}{p_k}-\frac{1}{f(k)}\Big)\Big)-1\Big]=$$
$$=\sum_{l_1\leqslant k\leqslant l_2} e\Big(\frac{Pm}{f(k)}\Big)\Big[e\Big(\frac{Pm}{p_k\,f(k)}O\big(k\log\log k\big)\Big)-1\Big]=I.$$

Напомним известное неравенство

$$|e^z-1|\leqslant |z|e^{|z|}. \tag{4}$$

Пусть $m\leqslant(\log P)^{1/3+\varepsilon'}$. Тогда при $P>P_0$, $l_1\leqslant k\leqslant l_2$,

$$\Big|\frac{Pm}{p_k\,f(k)}O\big(k\log\log k\big)\Big|<1.$$

По (4), теперь имеем ($c_1<c_2$ – некоторые положительные константы)

$$I\ll\sum_{c_1\frac{P}{\log P}<k<c_2\frac{P}{\log P}}\frac{m\log\log k}{\log k}\ll\frac{mP\log\log P}{\log^2 P},$$

поэтому

$$S=\sum_{l_1\leqslant k\leqslant l_2} e\Big(\frac{Pm}{f(k)}\Big)+O\Big(\frac{mP\log\log P}{\log^2 P}\Big).$$

Пусть

$$F(k)=\frac{Pm}{f(k)}=\frac{Pm}{k\log k}.$$

Тогда

$$F'(k)=-Pm\Big(\frac{1}{k^2\log k}+\frac{1}{k^2\log^2 k}\Big).$$

На $l_1\leqslant k\leqslant l_2$

$$
\begin{aligned}
&F'(k) > Pm\frac{1}{k^2\log k} > \\
&> \frac{Pm}{\left(L_2+\frac{1}{5}\varepsilon\right)^2 \frac{P^2}{\log^2(L_2P)}(\log(L_2P)-\log\log(L_2P))} > \\
&> \frac{Pm}{\left(L_2+\frac{1}{5}\varepsilon\right)^2 \frac{P^2}{\log(L_2P)}} = \frac{m(\log P+\log L_2)}{(L_2+\frac{1}{5}\varepsilon)^2P} > \\
&> \frac{m\log P}{\left(L_2+\frac{1}{4}\varepsilon\right)^2P} \qquad (\text{при} \quad P > P(\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

Аналогично находится оценка сверху. Имеем теперь:

на $l_1 \leqslant k \leqslant l_2$

$$
\frac{m\log P}{\left(L_1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)^2P} > |F'(k)| > \frac{m\log P}{\left(L_2+\frac{1}{4}\varepsilon\right)^2P}, \tag{5}
$$

если $P > P(\varepsilon)$.

Пусть

$$
S_1 = \sum_{l_1\leqslant k\leqslant l_2} e(F(k)).
$$

Нам потребуется неравенство Кузьмина–Ландау (см. [8]), которое мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – вещественные числа,*

$$
S_0 = \sum_{i=1}^{n} e(a_i).
$$

Предположим, что

$$
1 > 1-\theta \geqslant a_1-a_2 \geqslant a_2-a_3 \geqslant \dots \geqslant a_{n-1}-a_n \geqslant \theta > 0.
$$

Тогда

$$
|S_0| \leqslant \frac{1}{\theta}.
$$

По (5) и лемме 3,

$$
|S_1| \leqslant \frac{\left(L_2+\frac{1}{4}\varepsilon\right)^2P}{m\log P},
$$

откуда

$$|S| \leqslant \frac{\left(L_2 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 P}{m \log P} \qquad (P > P(\varepsilon)). \tag{6}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m S.$$

Разобьем его на части:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m S = \sum_{m \leqslant (\log P)^{1/3+\varepsilon'}} c_m S + \sum_{m > (\log P)^{1/3+\varepsilon'}} c_m S = I_1 + I_2.$$

К сумме I_1 применим лемму 1 и (6). Имеем

$$I_1 \leqslant \sum_{m \leqslant (\log P)^{1/3+\varepsilon'}} \frac{1}{\pi m} \frac{\left(L_2 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 P}{m \log P} <$$
$$< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m^2} \frac{\left(L_2 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 P}{\log P} = \left(L_2 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 \frac{\pi}{6} \, \frac{P}{\log P}.$$

Поскольку

$$\delta = \frac{1}{(\log P)^{1/3}},$$

мы можем за счет выбора r (см. лемму 1) сделать

$$I_2 \ll \frac{P}{\log^2 P}.$$

Из доказанного следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (S + \overline{S}) + \sum_{m=1}^{\infty} c'_m (\overline{S} + S) \leqslant \left(L_2 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 \frac{2}{3}\pi \, \frac{P}{\log P},$$

если $P > P(\varepsilon)$. Очевидно,

$$\sum_{L_1 P \leqslant p \leqslant L_2 P} 1 = (L_2 - L_1) \frac{P}{\log P} + O\Big(\frac{P}{\log^2 P}\Big).$$

Теорема доказана.

§3

В настоящем параграфе мы исследуем задачу (2) методом, использованным в §2. Центральным моментом этого метода является оценка сумм вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{L_1P\leqslant a\leqslant L_2P} \rho(P^2,m,a),$$

где

$$\rho(P^2,m,a)=\sum_{\substack{b(\operatorname{mod} a)\\ b^2\equiv P^2(\operatorname{mod} a)}} e\Big(\frac{bm}{a}\Big).$$

Суммой Клостермана с характером $\chi(\operatorname{mod} a)$ называется сумма

$$S_\chi(m,n;a)=\sum_{x(\operatorname{mod} a)} \overline{\chi}(x) e\Big(\frac{m\overline{x}+nx}{a}\Big), \tag{7}$$

где $x\overline{x}\equiv 1(\operatorname{mod} a)$.

Ниже будем рассматривать случай $\chi(x)=(\frac{x}{a})$ – символ Якоби, тогда сумма (7) называется суммой Салье. Пусть

$$\varepsilon_a=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad a\equiv 1(\operatorname{mod} 4);\\ i, & \text{если} \quad a\equiv -1(\operatorname{mod} 4).\end{cases}$$

Известно, что

$$\varepsilon_a\sqrt{a}\,\rho(P^2,2m,a)=S_\chi(P^2,m^2;a),$$

если $(2m,a)=1$. При $(2mP,a)=1$ имеем

$$S_\chi(P^2,m^2;a)=\Big(\frac{Pm}{a}\Big)S_\chi(Pm,Pm;a).$$

Иванец [9] доказал, что

$$S_\chi(Pm,Pm;a)=\varepsilon_a\sqrt{a}\left(\frac{Pm}{a}\right)\sum_{\substack{MN=a\\ (M,N)=1}} e\bigg(2Pm\frac{\overline{M}}{N}-2Pm\frac{\overline{N}}{M}\bigg),$$

если $(2Pm,a)=1$. Следовательно, при $(2Pm,a)=1$

$$\rho(P^2,2m,a)=\sum_{\substack{MN=a\\ (M,N)=1}} e\bigg(2Pm\frac{\overline{M}}{N}-2Pm\frac{\overline{N}}{M}\bigg).$$

Введем обозначение $((2k,a)=1)$

$$S_0(k,k;a)=\sum_{\substack{mn=a\\(m,n)=1}} e\left(2k\frac{\overline{m}}{n}-2k\frac{\overline{n}}{m}\right).$$

Методом работы [10] можно доказать асимптотическую формулу

$$\sum_{\substack{a\leqslant x\\(2k,a)=1}} S_0(k,k;a)=96\pi^{-2}\psi(8k)kE(x/2k)+O_\varepsilon\left(\left(k+x\right)^{\frac{47}{118}}x^{\frac{35}{59}+\varepsilon}\right), \quad (8)$$

где

$$\psi(q)=\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad E(y)=\int_o^y e^{2\pi i(-1/t)}\,dt;$$

константа в $O_\varepsilon(\cdots)$ зависит только от ε. Следствием (8) является оценка

$$\sum_{\substack{L_1P\leqslant a\leqslant L_2P\\(2Pm,a)=1}} \rho(P^2,2m,a)\ll P, \quad (9)$$

неулучшаемая по P и равномерная по $m\ll P^{1/47-\varepsilon}$.

Оценка (9) показывает, что методом, основанным на лемме 1, можно, самое большое, получить лишь асимптотику $(C>0)$

$$r(P^2,\Omega_0)=C(t_2-t_1)(L_2-L_1)P\log P+O(P\log\log P).$$

При этом необходимо должным образом оценить также некоторые суммы, аналогичные (9).

Литература

1. Ю. В. Линник, *Эргодические свойства алгебраических полей,* Л., 1967.
2. Е. П. Голубева, *Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов, на гиперболоидах специального вида,* Мат. сб. **123**, No. 4 (1984), 510–533.
3. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms,* Invent. Math. **92**, No. 1 (1988), 73–90.
4. А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян, *Об асимптотиках Линника–Скубенко,* Докл. АН СССР, **253**, No. 4 (1980), 777–780.
5. Е. П. Голубева, *Связь суммы сумм Салье с распределением целых точек на гиперболоидах,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 56–62.
6. И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел,* М., 1980.

7. J. B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers,* Amer. J. Math. **63** (1941), 211–232.
8. L. J. Mordell, *On the Kusmin–Landau inequality for exponential sums,* Acta Arithm. **4**, No. 1 (1958), 3–9.
9. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight,* Invent. Math. **87**, No. 2 (1987), 385–401.
10. W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bilinear forms with Kloosterman fractions,* Invent. Math. **128**, No. 1 (1997), 23–43.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 6 октября 2003 г.