Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

О. М. Фоменко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ $L(1, f)$

§0. Введение

Пусть $S_k(\Gamma_0(N))$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(N)$-параболических форм четного веса $k \geqslant 2$; предполагается, что уровень N бесквадратен. Пусть $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}, \quad z \in H = \{z = x + iy : y > 0\};$$

$$a_f(n) \cdot n^{-\frac{k-1}{2}} = \lambda_f(n);$$

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{-s}, \quad s = \sigma + it;$$

$$L_f\big(s + \frac{k-1}{2}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s} = L(s, f).$$

Обозначим через $S_k(N)^+$ множество новых форм веса k и уровня N, принадлежащих пространству $S_k(\Gamma_0(N))$; пусть

$$S'_k(\leqslant Q)^+ = \bigcup_{q \leqslant Q,\, q \text{ простое}} S_k(q)^+.$$

Отметим, что для $N = p$ (простое число)

$$\dim S_2(\Gamma_0(N)) = \frac{1}{12} N + O(1).$$

Ниже предполагается, что $f \in S_k(N)^+$. Тогда L-функция Гекке $L(s, f)$ разлагается в эйлеровское произведение

$$L(s, f) = \prod_p (1 - \lambda_f(p) p^{-s} + \chi_0^{(N)}(p) p^{-2s})^{-1},$$

где $\chi_0^{(N)}(n)$ – главный характер по модулю N. Пусть

$$\Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{-s} \Gamma(s) L_f(s).$$

Известно, что $\Phi(s)$ является целой функцией от s и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(s) = C(-1)^{k/2}\Phi(k-s),$$

где $C = \pm 1$; точное выражение для C см. в [1]. Полоса $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$ является для функции $L(s,f)$ критической. Пусть вес k постоянен. Как показано в [2], $L(s,f)$ не имеет зигелевского нуля (в N-аспекте), откуда можно вывести, что

$$L(1,f) \gg \frac{1}{\log N}.$$

С другой стороны, нетрудно получить оценку сверху

$$L(1,f) \ll \log^2 N.$$

Это легко следует из классического результата Делиня

$$|\lambda_f(n)| \leqslant d(n),$$

где $d(n)$ – количество делителей числа n, и оценки

$$\sum_{n \leqslant X} \lambda_f(n) \ll X^{\frac{1}{3}+\varepsilon} N^{\frac{1}{3}}$$

(см. [3]).

Цель настоящей работы – доказательство следующих результатов.

Теорема 1. *При целом $m \geqslant 1$ и $N = p \to \infty$*

$$\sum_{f \in S_2(N)^+} L^m(1,f) = \frac{1}{12} B_m N + O(N^{1-\alpha}),$$

где B_m – константа, определенная в (5) и (3),

$$1 \ll B_m \ll e^{cm \log\log m} \tag{1}$$

для некоторой абсолютной константы $c > 0$, $\alpha = \alpha(m) > 0$ – некоторая константа, $O(\dots) = O_m(\dots)$.

Теорема 2. *При $N = p \to \infty$ величина*

$$\frac{\#\{f | f \in S_2(N)^+, L(1, f) \leqslant x\}}{\#\{f | f \in S_2(N)^+\}}$$

сходится к функции распределения $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней, причем соответствующая характеристическая функция имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(it)^k.$$

Указанные теоремы являются аналогами хорошо известных результатов М. Б. Барбана [4] для $L_D(1)$, где $L_D(s)$ – L-функция Дирихле, ассоциированная с характером Дирихле χ_D по модулю D.

Замечание. Метод доказательства теоремы 1 нельзя непосредственно перенести на случай форм из пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, $N = p$, $k > 2$, поскольку лемма 1 (см. ниже) доказана лишь для веса $k = 2$.

Мы докажем теорему 1 в §§1–3.

§1. Начало доказательства теоремы 1

Напомним, что мы рассматриваем пространство форм $S_2(\Gamma_0(N))$, $N = p$, и базис в нем $S_2(N)^+$. Пусть $f \in S_2(N)^+$. Напомним соотношение мультипликативности

$$\lambda_f(r)\lambda_f(s) = \sum_{d|(r,s)} \chi_0^{(N)}(d)\lambda_f(rs/d^2). \tag{2}$$

Имеем при $\operatorname{Re} s > 1$

$$L^m(s, f) = \sum_{n_1,\ldots,n_m} \frac{\lambda_f(n_1)\ldots\lambda_f(n_m)}{(n_1\ldots n_m)^s} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_f^{(m)}(k)}{k^s},$$

где, в силу (2),

$$a_f^{(m)}(k) = \sum_{n_1\dots n_m=k} \sum_{d_1|(n_1,n_m)} \sum_{d_2|\left(\frac{n_1n_2}{d_1^2},n_3\right)} \dots$$

$$\dots \sum_{d_{m-1}\left|\left(\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{(d_1\cdots d_{m-2})^2},n_m\right)\right.} \chi_0^{(N)}(d_1\dots d_{m-1})\lambda_f\Bigl(\frac{k}{(d_1\dots d_{m-1})^2}\Bigr) =$$

$$= \sum_{d^2|k} \sum_{n_1\dots n_m=k} \sum_{d_1|(n_1,n_2)} \sum_{d_2|\left(\frac{n_1n_2}{d_1^2},n_3\right)} \dots$$

$$\dots \sum_{d_{m-1}\left|\left(\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{(d_1\cdots d_{m-2})^2},n_m^2\right)\right., d_1\dots d_{m-1}=d} \chi_0^{(N)}(d)\cdot\lambda_f\Bigl(\frac{k}{d^2}\Bigr) =$$

$$= \sum_{d^2|k} b_m(k,d)\lambda_f\Bigl(\frac{k}{d^2}\Bigr),$$

причем мы ввели обозначение

$$b_m(k,d) = \sum_{n_1\dots n_m=k} \sum_{d_1|(n_1,n_2)} \sum_{d_2\left|\left(\frac{n_1n_2}{d_1^2},n_3\right)\right.} \dots$$

$$\dots \sum_{d_{m-1}\left|\left(\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{(d_1\cdots d_{m-2})^2},n_m^2\right)\right., d_1\dots d_{m-1}=d} \chi_0^{(N)}(d). \tag{3}$$

Имеем

$$b_m(k,d) \leqslant d_m(k)d_m(d) \leqslant d_m^2(k),$$

где $d_m(k)$ – число решений уравнения в натуральных числах

$$x_1x_2\dots x_m = k.$$

При $m=2$ $d_2(k)=d(k)$. Известно, что

$$d_m(k) \ll_{m,\varepsilon} k^{\varepsilon}.$$

Рассмотрим интеграл $(1 < x \ll N)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} L^m(s+1,f)\Gamma(s)x^s\,ds.$$

Он равен

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k}\exp(-k/x).$$

Сдвигая прямую интегрирования до $\operatorname{Re}s=\gamma$, $-1<\gamma<0$, мы проходим полюс подынтегральной функции в точке $s=0$ с вычетом $L^m(1,f)$ и получаем

$$L^m(1,f)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k}\exp(-k/x)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma)}L^m(s+1,f)\Gamma(s)x^s\,ds.$$

Обозначим

$$I_f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma)}L^m(s+1,f)\Gamma(s)x^s\,ds,\quad -1<\gamma<0. \tag{4}$$

Пусть $k=k_0\cdot k_1'^2$, где k_0 – здесь и ниже означает бесквадратное натуральное число, k_1' – натуральное число. Имеем

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k}\exp(-k/x)=$$
$$=\sum_{k_0}\sum_{k_1'}\sum_{d|k_1'}\frac{b_m(k_0k_1'^2,d)}{k_0k_1'^2}\lambda_f\Big(\frac{k_0k_1'^2}{d^2}\Big)\exp(-k_0k_1'^2/x).$$

Положим $k_1'=k_1d$, где k_1 и d – натуральные числа. Имеем

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k}\exp(-k/x)=$$
$$=\sum_{k_0}\sum_{k_1}\sum_{d}\frac{b_m(k_0k_1^2d^2,d)}{k_0k_1^2d^2}\exp(-k_0k_1^2d^2/x)\lambda_f(k_0k_1^2).$$

Введем обозначение

$$\sum_f\cdots=\sum_{f\in S_2(N)^+}\cdots.$$

Возьмем $x=N$. Пусть

$$\operatorname{Tr}(T_n)=\operatorname{Tr}(T_n|S_k(\Gamma_0(N))$$

означает след оператора Гекке T_n в пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$. Формула для $\mathrm{Tr}\,(T_n)$ была доказана Айхлером [5] и Сельбергом [6]. В случае пространства $S_2(\Gamma_0(N))$, $N=p$, формула следа принимает сравнительно простой вид (см. [7, 8]). Суммируем по базису:

$$\sum_f L^m(1,f) = \sum_f \sum_{k_0} \sum_{k_1} \sum_d \frac{b_m(k_0k_1^2d^2,d)}{k_0k_1^2d^2}\cdot$$
$$\cdot\exp(-k_0k_1^2d^2/N)\lambda_f(k_0k_1^2) - \sum_f I_f\,.$$

Имеем

$$\sum_f L^m(1,f) =$$
$$= \sum_f \sum_{\substack{k_0\ \ k_1\ \ d \\ k_0k_1^2d^2\leqslant N^{1+\varepsilon}}} \sum\sum \frac{b_m(k_0k_1^2d^2,d)}{k_0k_1^2d^2}\exp(-k_0k_1^2d^2/N)\lambda_f(k_0k_1^2)-$$
$$-\sum_f I_f + O(1),$$

поскольку

$$\sum_f \sum_{\substack{k_0\ \ k_1\ \ d \\ k_0k_1^2d^2> N^{1+\varepsilon}}} \sum\sum \cdots = O(1).$$

Далее,

$$\sum_f L^m(1,f) =$$
$$= \sum_{k_0k_1^2\leqslant N^{1+\varepsilon}} \sum_{d^2\leqslant \frac{N^{1+\varepsilon}}{k_0k_1^2}} \frac{b_m(k_0k_1^2d^2,d)}{k_0k_1^2d^2}\exp(-k_0k_1^2d^2/N)\cdot$$
$$\cdot\sum_f \lambda_f(k_0k_1^2) - \sum_f I_f + O(1) =$$
$$= \sum_{k_0k_1^2\leqslant N^{1+\varepsilon}} a_{k_0k_1^2}\mathrm{Tr}\,(T_{k_0k_1^2}) - \sum_f I_f + O(1),$$

где мы положили

$$a_{k_0k_1^2} = \sum_{d^2 \leqslant \frac{N^{1+\varepsilon}}{k_0k_1^2}} \frac{b_m(k_0k_1^2d^2, d)}{k_0k_1^2d^2} \exp(-k_0k_1^2d^2/N).$$

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма (см. [8]).

Лемма 1. *Рассмотрим пространство $S_2(\Gamma_0(N))$, где $N = p$. Пусть $\{a_n\}$ – любая последовательность чисел. Для любого $C > 1$ и любого $B < N^2/4C$ имеем*

$$\sum_{n=B}^{CB} a_n \mathrm{Tr}\,(T_n) = \frac{N}{12} \sum_{n=B}^{CB} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \delta_{\boxed{n}} +$$
$$+ a_{\max} O(B^{7/4} N^{-1/2} + B^{39/32+\varepsilon} N^{1/4}),$$

где $a_{\max}$ означает наибольшее значение $|a_n|$ в рассматриваемом промежутке и O-константа зависит лишь от C и ε; $\delta_{\boxed{n}}$ означает 1, если n является квадратом, и 0 в противном случае.

Разделим интервал суммирования $[1, N^{1+\varepsilon}]$ на $\ll \log N$ интервалов вида $[B, CB]$ и применим лемму 1. Имеем

$$\sum_{k_0k_1^2=B}^{CB} a_{k_0k_1^2} \mathrm{Tr}\,(T_{k_0k_1^2}) =$$
$$= \frac{N}{12} \sum_{B \leqslant k_1^2 \leqslant CB} \frac{a_{k_1^2}}{\sqrt{k_1^2}} + a_{\max} O(B^{7/4} N^{-\frac{1}{2}} + B^{39/32+\varepsilon} N^{\frac{1}{4}}),$$
$$a_{\max} \ll B^{-1+\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\sum_f L^m(1,f) = \frac{N}{12} \sum_{\substack{k_1 \\ k_1^2d^2 \leqslant N^{1+\varepsilon}}} \sum_d \frac{b_m(k_1^2d^2, d)}{k_1^3d^2} \cdot$$
$$\cdot \exp(-k_1^2d^2/N) + O(N^{\frac{15}{32}+\varepsilon}) - \sum_f I_f.$$

Используем известный факт:

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z| \quad (0 < |z| < 1).$$

Тогда

$$\frac{N}{12}\sum_{\substack{k_1 \quad d\\ k_1^2d^2\leqslant N^{1+\varepsilon}}}\sum \frac{b_m(k_1^2d^2,d)}{k_1^3d^2}\exp(-k_1^2d^2/N)=$$

$$=\frac{N}{12}\sum_{\substack{k_1 \quad d\\ k_1^2d^2<N}}\sum \frac{b_m(k_1^2d^2,d)}{k_1^3d^2}\left(1+O\left(\frac{k_1^2d^2}{N}\right)\right)+$$

$$+\frac{N}{12}\sum_{\substack{k_1 \quad d\\ N\leqslant k_1^2d^2\leqslant N^{1+\varepsilon}}}\sum \frac{b_m(k_1^2d^2,d)}{k_1^3d^2}\exp(-k_1^2d^2/N)=$$

$$=\frac{N}{12}\sum_{k_1}\sum_{d}\frac{b_m(k_1^2d^2,d)}{k_1^3d^2}+O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Пусть

$$B_m=\sum_{k_1}\sum_{d}\frac{b_m(k_1^2d^2,d)}{k_1^3d^2}. \tag{5}$$

Мы доказали, что

$$\sum_f L^m(1,f)=\frac{N}{12}B_m-\sum_f I_f+O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{6}$$

§2. Рост B_m

Имеем

$$b_m(k_1^2d^2,d)\leqslant b_m(k_1^2d^2)=b_m(K^2),$$

где $k_1d=K$,

$$b_m(K^2)=\sum_{n_1\ldots n_m=K^2}\ \sum_{d_1|(n_1,n_2)}\ \sum_{d_2|\left(\frac{n_1n_2}{d_1^2},n_3\right)}\cdots$$

$$\cdots\sum_{d_{m-1}\left|\left(\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{(d_1\cdots d_{m-2})^2},n_m\right)\right.}1.$$

Очевидно,

$$B_m<B'_m=\sum_{1\leqslant K<\infty}\frac{d(K)b_m(K^2)}{K^2}.$$

В силу мультипликативности $d(K)$ и $b_m(K^2)$,

$$B'_m=\prod_p\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{d(p^s)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right).$$

Имеем

$$d(p^s)=s+1,$$
$$b_m(p^{2s})=$$
$$=\sum_{p^{\alpha_1}\dots p^{\alpha_m}=p^{2s}}\ \sum_{d_1|(p^{\alpha_1},p^{\alpha_2})}\ \sum_{d_2\left|\left(\frac{p^{\alpha_1}p^{\alpha_2}}{d_1^2},p^{\alpha_3}\right)\right.}\dots$$
$$\dots\sum_{d_{m-1}\left|\left(\frac{p^{\alpha_1}\dots p^{\alpha_{m-1}}}{(d_1\dots d_{m-2})^2},p^{\alpha_m}\right)\right.}\leqslant\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m=2s}(\alpha_1+1)\dots(\alpha_m+1).$$

Отсюда (ср. [9]) следует оценка

$$b_m(p^{2s})\ll\begin{cases}\left(\frac{Am}{2s}\right)^{2s}, & \text{если}\quad 2s\leqslant m,\\ \min\left(\left(\frac{A2s}{m}\right)^{2m},A^{2s}\right), & \text{если}\quad 2s>m,\end{cases}\tag{7}$$

с некоторой константой $A>1$. Заметим, что

$$\left(\frac{Am}{s}\right)^s\ll\left(\frac{m}{A}\right)^s$$

для $s\geqslant 1$. Имеем

$$B'_m=\prod_{p\leqslant m}\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{p>m}\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right).$$

Тогда для $p \leqslant m$

$$1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}=1+\sum_{s\leqslant\frac{m}{2}}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}+$$
$$+\sum_{s>\frac{m}{2}}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\ll$$
$$\ll 1+(\frac{m}{2}+1)\sum_{s\leqslant\frac{m}{2}}\left(\max_{\xi\geqslant 2}\left(\frac{Am}{\xi}\right)^{\xi}\right)^{1/p}+$$
$$+\sum_{s>\frac{m}{2}}\frac{(s+1)(\frac{A2s}{m})^{2m}}{p^{2s}}\ll m^2A_1^{m/p}+A_1^m/p^m$$

с некоторым $A_1 > 1$. Следовательно,

$$\prod_{p\leqslant m}\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right)=$$
$$=\prod_{p\leqslant A_1}\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{A_1<p\leqslant m}\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right)\ll$$
$$\ll e^{c_1m}e^{c_2(m+m\log\log m)}\ll e^{cm\log\log m}.$$

С другой стороны, если $p > m$, то мы используем неравенства (7) и $\log(1+x)\leqslant x$ $(x>0)$. Имеем при $s\leqslant m/2$

$$b_m(p^{2s})\ll(\frac{Am}{2s})^{2s}\ll(\frac{m}{A})^{2s},$$

а при $s > m/2$

$$b_m(p^{2s})\leqslant A^{2s}.$$

Простое вычисление тогда показывает, что

$$\prod_{p>m}\left(1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(s+1)b_m(p^{2s})}{p^{2s}}\right)\ll e^{cm}.$$

Тем самым,

$$B_m<B'_m\ll e^{cm\log\log m},$$

где c – абсолютная положительная константа.

§3. Окончание доказательства теоремы 1

Оценим член $\sum_f I_f$ в соотношении (6). Определим для $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ величину

$$N(\sigma, H, f) = \#\{\rho = \beta + i\gamma | L(\rho, f) = 0, \quad \beta \geqslant \sigma, \quad |\gamma| \leqslant H\}.$$

Лемма 2. *Для $\sigma \geqslant 3/4$, $Q \geqslant 2$ и некоторой положительной константы b имеем*

$$\sum_{f \in S_2'(\leqslant Q)^+} N(\sigma, \log^3 Q, f) \ll_\varepsilon Q^{b(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Доказательство леммы следует известным образцам (см. доказательство леммы 1 [9], а также более раннее доказательство аналогичного факта для L-функций Дирихле в [10]) и здесь не приводится. Отметим только, что нам необходимо следующее неравенство большого решета (см. [11]): если $M = Q^\beta$ и $\beta > 6$, то

$$\sum_{f \in S_2'(\leqslant Q)^+} \Big| \sum_{n \leqslant M} a_n \lambda_f(n) \Big|^2 \ll M^{1+\varepsilon} \sum_{n \leqslant M} |a_n|^2$$

для любой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}_{1 \leqslant n \leqslant M}$ и любого $\varepsilon > 0$.

Лемма 3. *Пусть $0 < \eta < \frac{1}{2}$. Если $L(s, f)$ $(f \in S_2'(\leqslant Q)^+)$ не имеет нулей в области*

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta, \quad |t| \leqslant \log^3 Q,$$

то в области

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta/2, \quad |t| \leqslant \log^2 Q$$

для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$L(s, f) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon.$$

Доказательство получается применением теоремы Бореля–Каратеодори и теоремы Адамара о трех кругах (ср. доказательство леммы 2 [9]).

Переходим непосредственно к оценке суммы $\sum_f I_f$. Разделим множество форм $S_2'(\leqslant N)^+$ на части

$$S_2'(\leqslant N)^+ = J_1 \cup J_2.$$

К J_1 отнесем все f, у которых $L(s,f)$ не имеет нулей в области

$$1 > \sigma \geqslant 1-\eta, \quad |t| \leqslant \log^3 N,$$

а к J_2 отнесем все формы f, у которых $L(s,f)$ имеет нули в этой области.

Если $f \in J_1$, то возьмем в (4) $\gamma = -\eta/2$. Из леммы 3 следует оценка

$$L(s,f) \ll_\varepsilon N^\varepsilon$$

в области $\sigma \geqslant 1-\eta/2$, $|t| \leqslant \log^2 N$. Если же $\sigma \geqslant 1-\eta/2$, $|t| \geqslant \log^2 N$, то

$$L(s,f) \ll (N|t|)^{c_1}$$

с некоторым $c_1 > 0$. Используя формулу Стирлинга, имеем

$$I_f \ll N^{\eta/20} x^{-\eta/2} + N^{-A}$$

для $f \in J_1$ и любого $A > 0$. Напомним, что $x = N$. Следовательно,

$$\sum_{f \in J_1 \cap S_2(N)^+} |I_f| \ll N^{-\frac{9}{20}\eta} \cdot N = N^{1-\frac{9}{20}\eta}.$$

В случае $f \in J_2$ берем в (4) $\gamma = -\varepsilon$ и получаем

$$\sum_{f \in J_2} |I_f| \ll N^{1/20} |J_2|,$$

где $|J_2| = \operatorname{card} J_2$. По лемме 2, $|J_2| \ll N^{1/5}$, если η достаточно мало. Поэтому

$$\sum_{f \in J_2} |I_f| \ll N^{1/4}.$$

Следовательно,

$$\sum_f |I_f| \ll N^{1-\frac{9}{20}\eta},$$

и теорема 1 доказана.

§4. Доказательство теоремы 2

Для вывода теоремы 2 из теоремы 1 применим следующий известный факт.

Теорема моментов. 1) *Если все* $F_n(x)$ *из последовательности функций распределения* $\{F_n(x)\}$ *обладают конечными моментами* $\alpha_k(n)$ *любого порядка и если* $\alpha_k(n) \to \beta_k(n \to \infty)$ *при каждом* k, *то* β_k *– моменты некоторой функции распределения* $F(x)$. *Если, кроме того,* $F(x)$ *своими моментами определяется однозначно, то при* $n \to \infty$ *последовательность* $F_n(x)$ *сходится к* $F(x)$ *в каждой точке непрерывности* $F(x)$.

2) *Пусть* $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ *– моменты некоторой функции распределения* $F(x)$, *каждый из которых предполагается конечным, и пусть ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \tau_0^k$$

абсолютно сходится при некотором $\tau_0 > 0$. *Тогда* $F(x)$ *есть единственная функция распределения, обладающая моментами* α_0, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, *причем соответствующая характеристическая функция* $f(t)$ *при* $|t| < \tau_0$ *определяется равенством*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} (it)^k$$

с последующим, всегда осуществимым, аналитическим продолжением.

Пункт 1) теоремы – это лемма 5.1 обзора М. Б. Барбана [4], которая представляет собой результат Фреше–Шохата (1931). Пункт 2) является леммой 5.7 обзора [4]; это стандартный факт математической статистики.

Теорема 2 является следствием теоремы 1 и теоремы моментов, причем для обоснования применимости пункта 1) используется пункт 2) и оценка роста (1).

Литература

1. A. P. Ogg, *On a convolution of L-series*, Invent. Math. **7**, No. 4 (1969), 297–312.
2. J. Hoffstein and D. Ramakrishnan, *Siegel zeros and cusp forms*, Internat. Math. Research Notices No. 6 (1995), 279–308.
3. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, *Значения рядов Дирихле, ассоциированных с модулярными формами, в точках* $s = 1/2$, 1, Зап. научн. семин. ЛОМИ **134** (1984), 117–137.
4. М. Б. Барбан, *Метод "большого решета" и его применения в теории чисел*, Успехи мат. наук **21**, No. 1 (1966), 51–102.

5. M. Eichler, *Quadratische Formen und Modulfunktionen*, Acta Arithm. **4**, No. 3 (1958), 217–239.
6. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20**, No. 1–3 (1956), 47–87.
7. A. Brumer, *The rank of* $J_0(N)$ in Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992); Astérisque **228** (1995), 41–68.
8. J. M. Vanderkam, *The rank of quotients of* $J_0(N)$, Duke Math. J. **97**, No. 3 (1999), 545–577.
9. W. Luo, *Values of symmetric square* L*-functions at* 1, J. reine und angew. Math. **506** (1999), 215–235.
10. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел*, М., 1974.
11. W. Duke, E. Kowalski, *A problem of Linnik for elliptic curves and mean-value estimates for automorphic representations*, Invent. Math. **139** (2000), 1–39.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 12 ноября 2003 г.