Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

Н. Ю. Куранова

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ КВАТЕРНАРНОЙ ФОРМОЙ

Введение

Задачи классификации и представления квадратичных форм являются классическими для теории чисел. Пусть $F = [Q]$ – род целочисленных положительно определённых квадратичных форм размерности n определителя $d = |Q|$; A – квадратичная форма размерности $m < n$ определителя $|A|$. Форма A представляется родом F, если хотя бы для одной формы $Q \in F$ матричное уравнение

$$Q[X] =^t XQX = A, X \in M_{n\times m}(Z), \tag{1}$$

имеет целое решение, где $M_{n\times m}(Z)$ – множество целых $n \times m$ матриц. В [1] В. Г. Журавлевым доказана теорема о числе примитивных представлений формы A с бесквадратной ступенью $a_{\rm st}$ одноклассным родом положительно определённых форм.

В статье рассматривается способ получения формул для нахождения числа примитивных $\operatorname{pr}(A;Q)$ и всех $r(A;Q)$ представлений бинарных положительно определённых квадратичных форм A с нечетной бесквадратной ступенью формой Q, заданной единичной матрицей порядка 4. Особенностью поставленной задачи является несовпадение для формы A её ступени $a_{\rm st}$ и определителя $\det A$, а также четность разности размерностей $n-m$. Случай четной коразмерности рассматривается впервые. Случай нечетной коразмерности рассмотрен А. В. Хорошевой [2, 3] и С. В. Федоровой [4, 5]. Основные результаты работы получены в теоремах 2, 3. Приложения к конкретным квадратичным формам A рассмотрены в §3.

В качестве примера рассмотрим диофантову квадратичную

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 02-01-00368).

систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2a, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 2a, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = a, \end{cases}$$

где $a > 0$ – нечетное и бесквадратное, $3 \nmid a$. В п. 3.2 доказано, что данная система имеет число целых решений, равное

$$r(A; 1_4) = 192 \cdot 2^{\alpha(a)} a_+ \cdot \sigma(a_-),$$

где $\alpha(a)$ – число простых делителей a, $a = a_+ \cdot a_-$ и , если нечетное простое число $p \mid a_\pm$, то $p \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, $\sigma(a_-)$ – сумма делителей a_-.

§1. Примитивные представления формы формой

Для удобства вычислений можно отождествить квадратичную форму с ее матрицей и говорить только о квадратичных формах или, короче, о формах. В случае $m = 1$ равенство (1) означает представление числа A квадратичной формой $Q[X]$ над кольцом целых чисел Z и мы приходим к классической задаче теории чисел о нахождении количества представлений числа суммой трех квадратов целых чисел. Эта задача была впервые решена Гауссом.

Обозначим $d(X)$ НОД миноров порядка m матрицы X из $M_{n\times m}(Z)$. Если $d(X) = 1$, то матрица называется примитивной. Все решения матричного уравнения (1) получаются из примитивных решений.

Пусть a_{st} – ступень формы A. По определению, a_{st} – наименьшее положительное целое число с условием, что матрица $a_{\mathrm{st}} A^{-1}$ целая.

В. Г. Журавлевым в [1] получена формула для числа примитивных представлений формы A с бесквадратной ступенью a_{st} одноклассным родом положительно определенных форм.

Теорема 1 [1]. *Пусть Q, A - целые положительно определенные формы размерностей $n > m$ и пусть определитель $d = |Q|$ взаимно прост со ступенью $a_{\mathrm{st}} > 0$ формы A. Тогда форма A примитивно представляется некоторой формой Q рода F. В этом случае для числа примитивных представлений выполняется формула*

$$\mathrm{pr}\,(A, Q) = o(Q) c(n-m) \mathrm{std}(n-m, d_A) \prod_{p \mid 2 a_{\mathrm{st}} d} \alpha_p(A; Q), \qquad (2)$$

где $o(Q)$ *– число автоморфизмов формы* Q, $\mathrm{std}(n-m, d_A)$ *– стандартная масса, равная произведению* ζ*-функции Римана и* L*-функции Дирихле,* $d_A = a_{\mathrm{st}}^{n-m} d/|A|$, $c(n-m)$ *– простой коэффициент, зависящий только от разности размерностей* $n-m$, $\alpha_p(A;Q)$ *– локальные множители, зависящие только от* p*-адических инвариантов формы* A *и рода* F.

Любая целая матрица A имеет над кольцом целых p-адических чисел Z_p жорданово разложение $A =_p \sum_q qA_q$, где составляющая A_q имеет размерности $n_q(A)$ и знаки $\varepsilon_q(A) = (\frac{|A_q|}{p})$ (здесь $(\frac{\bullet}{p})$ – символ Лежандра). Слагаемые qA_q называются жордановыми составляющими масштаба q.

С помощью этого для нечетного p и невырожденной формы $A \in M_m(Z_p)$ можно определить p-адический символ

$$p_A = \prod_q q^{\varepsilon_q(A) n_q(A)}, q = p^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Из формулы (2) видно, что число представлений формы A формой Q есть конечное произведение множителей α_p, которое определяется p-адическими инвариантами форм A и Q. Например,для нечетного p, делящего степень a_{st}, локальный множитель равен [1]

$$\begin{aligned}\alpha_p(A;Q) = p^{\alpha(A)(n-m-1)/2} \mathrm{std}_p(n-2m+n_1(A); E_{q(A)}(G))\cdot \\ \cdot \mathrm{std}_p(n-m, d_A)^{-1},\end{aligned} \tag{4}$$

где $p^{\alpha(A)}$ – p-составляющая определителя $\det A$, $n_1(A)$ – размерность составляющей A_1, $E_{q(A)}(G) = (\frac{-1}{p})^{n-2m+n_1(A)/2} \varepsilon_{q(A)}(G)$. При этом $\varepsilon_{q(A)}(G)$ – знак составляющей $q(A)$-блока в разложении Жордана произвольной формы G, и $q(A)$ – p-составляющая ступени a_{st}. Обратная величина второго сомножителя в (4) равна

$$\mathrm{std}_p(n-2m+n_1(A); E_{q(A)}(G))^{-1} = 2(1-p^{-2}) \dots (1-p^{-2(s-1)}),$$

$$2(1-p^{-2}) \dots (1-p^{-2(s-1)})(1-E_{q(A)}(G) p^{-s})$$

для $n-2m+n_1(A) = 2s-1$ и $2s$, соответственно. Третий сомножитель в (4) равен

$$\mathrm{std}_p(n-m, d_A)^{-1} = 2(1-p^{-2}) \dots (1-p^{-2(s-1)})(1-\varepsilon p^{-s}) \tag{5}$$

для $n-m=2s-1$ или $2s$, при этом $\varepsilon=0$, если $n-m$ нечетное или p делит $d_A=a_{\rm st}d/\det A$, и $\varepsilon=(\frac{(-1)^{(n-m)/2}d_A}{p})$, если $n-m$ четное.

Отдельно рассматривается случай, когда $p=2, p\nmid a_{\rm st}$.

Невырожденная форма Q имеет над кольцом Z_2 жорданово разложение $Q\sim_2 \sum_q qQ_q$ с масштабами $q=2^\alpha, \alpha=0,1,2,\ldots$. 2-адический символ равен

$$2_Q=\prod_q q^{\varepsilon_q(Q)n_q(Q)}_{\xi_q(Q)t_q(Q)};$$

при этом $n_q(Q)=\dim Q_q$ и $\varepsilon_q(Q)=(\frac{|Q_q|}{2})$ – соответственно размерность и знак жордановой составляющей qQ_q; $\xi_q(Q)=I$ или II для четной или нечетной Q_q, соответственно, и называется типом Q_q; $t_q(Q)$ называется странностью Q_q и определяется по $\bmod 8$. Так, например,

$$t_q(Q)\equiv 0 (\bmod 8), \quad \text{если} \quad \xi_q(Q)=II.$$

Локальный множитель для $p=2, p\nmid a_{\rm st}$ вычисляется по формуле

$$\alpha_2(A;Q,G)=m_2(G)/{\rm std}_2(n-m,d_A). \tag{6}$$

Пусть даны $Q=1_4$ – единичная матрица порядка $n=4$ и $A=a\binom{e\ f}{f\ e}$ – целая симметрическая положительно определенная матрица порядка $m=2$ с нечетной бесквадратной ступенью и $(a,\det A)=1$, где $\det A=e^2-f^2$. В координатах x_i, y_i $(x_i,y_i\in Z)$ уравнение (1) принимает вид квадратичной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=ae,\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=ae,\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=af. \end{cases} \tag{7}$$

Задача заключается в нахождении числа всех решений r уравнения (7). Согласно сказанному выше, прежде всего необходимо найти число примитивных представлений ${\rm pr}\,(A;Q)$. Для этого вычислим все локальные множители в формуле (2).

Род $[Q]$ одноклассный, число автоморфизмов равно $o(Q)=2^4 4!$ (см. [1], с. 103), множитель $c(n-m)=c(2)=1$, ступень формы A равна $a_{\rm st}=ad_A, d_A=\det A$. Как было сказано выше, стандартная масса ${\rm std}(n)$ выражается через числа Бернулли и Эйлера [6]. Отношение

$${\rm std}(n)={\rm std}(n,d)/(\zeta_D(s)/\pi^s), n=1,2,3,\ldots$$

зависит только от n, где $n = 2s$ или $2s-1$. Значения $\mathrm{std}(n)$ для $n \le 25$ приведены в [6]. Точнее, приведены значения стандартной L-функции Дирихле

$$Z(d,s) = \zeta_D(s) d^{s-1}\sqrt{d}/\pi^s,$$

принимающей рациональные значения.

В результате стандартная масса равна

$$\mathrm{std}(2,d_A) = \frac{\mathrm{std}(2)Z(d_A,1)}{\sqrt{d_A}} = 2\frac{Z(d_A,1)}{\sqrt{d_A}}.$$

Таким образом, число примитивных представлений формы A формой Q равно

$$\mathrm{pr}\,(A;Q) = 2^8\cdot 3\frac{Z(d_A,1)}{\sqrt{d_A}}\alpha_2(A;Q)\prod_{p|a}\alpha_p(A;Q)\prod_{p|d_A}\alpha_p(A;Q). \tag{8}$$

Рассмотрим случаи, когда p нечетное и четное.

Случай 1: $p|a$, $p\dagger d_A$, $p \ne 2$.

Бинарная форма A имеет жорданово разложение

$$A = a\begin{pmatrix} e & f\\ f & e\end{pmatrix} = p\frac{a}{p}\begin{pmatrix} e & f\\ f & e\end{pmatrix}.$$

Следовательно, можно определить p-символ формы A:

$$p_A = 1^{+0}p^{\varepsilon 2},\quad \varepsilon = \left(\frac{d_A}{p}\right),\quad n_1(A) = 0.$$

Локальный множитель (4) равен

$$\alpha_p(A;Q) = p\cdot \mathrm{std}_p(0;E)/\mathrm{std}_p(2,d_A) = p/\mathrm{std}_p(2,d_A)$$
$$= 2p\Big(1-\Big(\frac{-d_A}{p}\Big)p^{-1}\Big) = 2\Big(p-\Big(\frac{-d_A}{p}\Big)\Big).$$

Случай 2: $p|d_A$, $p\dagger a$, $p \ne 2$.

Форма A в данном случае имеет следующее жорданово разложение

$$A = a\begin{pmatrix} e & f\\ f & e\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} e & 0\\ 0 & \frac{d_A}{e}\end{pmatrix} = ae \oplus p\cdot d^{'}ae.$$

Отсюда получаем следующий p-символ для формы A:

$$p_A = 1^{\varepsilon_1 1} p^{\varepsilon_2 1}, \quad \varepsilon_1 = \Bigl(\frac{ae}{p}\Bigr), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \Bigl(\frac{d'}{p}\Bigr), \quad n_1(A) = 1.$$

Согласно (4), локальный множитель равен

$$\alpha_p(A;Q) = \sqrt{p} \cdot \mathrm{std}_p(1;E)/\mathrm{std}_p(2,d_A) = \sqrt{p}\frac{1}{2} \cdot 2 = \sqrt{p}.$$

Здесь $2m - n_1(A) = n$ и, по предложению 6.2 из [1], символ p_G существует, поскольку $\varepsilon_1(A) = (\frac{(-1)^{n-m}d}{p}) = (\frac{(-1)^2 \cdot 1}{p}) = +1$. В результате формула (8) принимает следующий вид:

$$\mathrm{pr}\,(A;Q) = 2^{8+\alpha(a)} \cdot 3\alpha_2 Z(d_A,1) \prod_{p|a} \Bigl(p - \Bigl(\frac{-d_A}{p}\Bigr)\Bigr), \tag{9}$$

где $\alpha(a)$ обозначает количество нечетных простых делителей a.

Случай 3: $p = 2$, $p \dagger a$, $p \dagger d_A$.

Определим, существует ли 2-адический символ 2_G. Для формы Q 2-адический символ равен $2_Q = 1_{I,4}^{+4}$. Форма $A \in GL_m(Z_p)$ отщепляется от формы $Q_G^A(C) \sim_p Q_G^A(0)$ прямым слагаемым $Q_G^A(C) \sim_p A \oplus a_{\mathrm{st}}^{-1} G$ (над Z_p) и нас интересуют формы G, для которых $Q_G^A(C) \sim_p Q$ или

$$Q \sim_p A \oplus a_{\mathrm{st}}^{-1} G.$$

Данная эквивалентность равносильна условию

$$2_A \cdot 2_{a_{\mathrm{st}}^{-1} G} = 2_Q.$$

При этом символ 2_A, в зависимости от четности A, может иметь вид

$$2_A(I) = 1_{I,t_1(A)}^{\varepsilon_1(A) n_1(A)} \quad \text{или} \quad 2_A = 1_{II,0}^{\varepsilon_1(A) n_1(A)},$$

где $\varepsilon_1(A) = (\frac{|A|}{2}), n_1(A) = m$, $t_1(A)$ – странность (сумма диагональных элементов диагональной матрицы A) и во втором случае $m \geq 2$ четное.

Теперь рассмотрим два случая, когда форма A четная или нечетная, и отдельно для каждого случая определим локальный множитель α_2.

Случай 3.1. $A = A_I$ (форма нечетная).

2-адический символ формы A равен $2_A = 1^{\varepsilon 2}_{I,ae(d_A+1)}$, где знак равен $\varepsilon = (\frac{d_A}{2})$, $2_{a_{\rm st}^{-1}G} = 1^{\varepsilon 2}_{I,4-t(A)}$. Таким образом, символ 2_G принимает значения

$$2_G = 1^{\varepsilon 2}_{I,a_{\rm st}(4-t(A))} = \begin{cases} 1^{+2}_{I;0,\pm 2}, \left(\dfrac{d_A}{2}\right) = +1; \\ 1^{-2}_{I;4,\pm 2}, \left(\dfrac{d_A}{2}\right) = -1. \end{cases}$$

Согласно условиям существования множителей для $p \neq 2$ ([1], с. 70), символ 2_G существует. Для вычисления локального множителя α_2 применим формулы (6) и (5), а также тот факт, что если $G \sim_p \sum_p qG_q$, то ее p-масса равна $m_p(G) = \prod_q M_p(G_q)$. Локальный множитель равен

$$\alpha_2 = m_2(G)/\mathrm{std}_2(2, d_A) = 2m_2(G) = 2 \cdot M_2(G_{1/2})M_2(G_1)M_2(G_1)$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{4} M_2(G_1) = \frac{1}{2} M_2(G_1).$$

Если

$$G \sim_p p^{-1}G_{p^{-1}} \oplus 1G_1 \oplus pG_p \oplus \ldots (p = 2),$$

то составляющая G_q с $n_q(G) = 0$ называется нулевой формой (она имеет значение 0 и определитель 1). Ограниченные нулевые формы привносят в формулу множитель 1/2 и поэтому должны учитываться. Для определения множителя $M_p(G_g)$ необходимо использовать тот факт, что составляющая G_q имеет ряд характеристик. Ее октановое число равно

$$\mathrm{oct}_q = \mathrm{oct}_q(G) = \mathrm{oct}(g_q) \equiv t_q(G) + (4) (\mathrm{mod}\, 8),$$

где $t_q(G)$ – странность $G_q, (4) = 0$ или 4, если $\varepsilon_q(G) = +1$ или -1, соответственно. Статус $\mathrm{st}_q = \mathrm{st}_q(G) = \mathrm{st}(G_q)$ считается свободным, если обе смежные составляющие $G_{q/2}$ и G_{2q} имеют тип II, в противном случае статус st_q ограниченный. Кратко это будем обозначать $\mathrm{st}_q = f$ и $\mathrm{st}_q = b$ (см. [1], с. 85). Если вид $sp_q(G) = 2s{-}1$ или $2s\pm$, то $M_p(G_q)$ определяется равенствами

$$M_p(2s-1)^{-1} = 2(1-p^{-2}) \ldots (1-p^{-2(s-1)}),$$
$$M_p(2s\pm)^{-1} = 2(1-p^{-2}) \ldots (1-p^{-2(s-1)})(1 \mp p^{-s}),$$

где $M_2(0+) = 1$, если $sp_q(G) = 0+$ и $\mathrm{st}_q(G) = f$ (см. [1], с. 84–85). Так, по определению, составляющие имеют статусы b, f, b, соответственно. Определим характеристики для составляющей $G_1 = G$. Для $G_1 = G$ имеем: тип I_2, $2 = 2t + 2$, статус $\mathrm{st}(G_1) = f$, октановое число $\mathrm{oct} \equiv 0, \pm 2$ для $\varepsilon = \pm 1$. В результате, множитель равен $M_2(0+) = 1$, если $\mathrm{oct} \equiv 0$, и $M_2(2s-1) = \frac{1}{2}$, если $\mathrm{oct} \equiv \pm 2$. Следовательно, локальный множитель равен $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, если $\mathrm{oct} \equiv 0$,и $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, если $\mathrm{oct} \equiv \pm 2$. Подставляя эти значения в (9), приходим к формуле

$$\mathrm{pr}\,(A; 1_4) = \begin{cases} 2^{7+\alpha(a)} \cdot 3Z(d_A, 1) \prod\limits_{p|a} \left(p - \left(\dfrac{-d_A}{p}\right)\right), & \mathrm{oct} \equiv 0; \\ 2^{6+\alpha(a)} \cdot 3Z(d_A, 1) \prod\limits_{p|a} \left(p - \left(\dfrac{-d_A}{p}\right)\right), & \mathrm{oct} \equiv \pm 2. \end{cases}$$

Случай 3.2. $A = A_{II}$ (форма четная).

Применяя рассуждения, аналогичные проведенным выше, получаем, что $2_A = 1_{II,0}^{\varepsilon 2}$, где $\varepsilon = (\frac{d_A}{2})$, $2_{a_{\mathrm{st}}^{-1}G} = 1_{II,0}^{\varepsilon 2}$. Таким образом, 2-адический символ 2_G принимает значение

$$2_G = 1_{I,4}^{\varepsilon 2}.$$

По третьему условию ([1], с. 70), символ 2_G существует, если $\varepsilon = (\frac{d_A}{2}) = -1$.

Определим характеристики для составляющей $G_1 = G$. Имеем: тип I_2, $2s+ = 0+ \Rightarrow s = 0$, статус $\mathrm{st}(G_1) = f$, октановое число $\mathrm{oct} \equiv 0$ для $\varepsilon = -1$. В результате, $M_2(0+) = 1$. Следовательно, локальный множитель $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Он определен для $\mathrm{oct} \equiv 0$. Теперь, подставляя эти значения в (9), получаем , что число примитивных представлений формы A формой Q равно

$$\mathrm{pr}\,(A; 1_4) = 2^{7+\alpha(a)} \cdot 3Z(d_A, 1) \prod_{p|a} \left(p - \left(\frac{-d_A}{p}\right)\right), \mathrm{oct} \equiv 0.$$

Объединяя полученные результаты, приходим к следующей формуле

$$\mathrm{pr}\,(A; 1_4) = \begin{cases} 2^{7+\alpha(a)} \cdot 3Z(d_A, 1) \prod\limits_{p|a} \left(p - \left(\dfrac{-d_A}{p}\right)\right), & \mathrm{oct} \equiv 0; \\ 2^{6+\alpha(a)} \cdot 3Z(d_A, 1) \prod\limits_{p|a} \left(p - \left(\dfrac{-d_A}{p}\right)\right), & \mathrm{oct} \equiv \pm 2, A = A_I \end{cases} \tag{10}$$

для числа примитивных решений матричного уравнения

$$^tX \cdot X = a\begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix}, \quad X \in M_{4,2}(Z).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $a > 0$ нечетно и свободно от квадратов, A – целая положительно определенная форма размерности 2, и пусть определитель $|A|$ взаимно прост с a. Тогда число примитивных представлений формы $a \cdot A$ формой $Q = 1_4$ определяется формулой* (10).

§2. Количество представлений бинарных форм

Чтобы найти число всех решений данного уравнения, применим следующее утверждение (предложение 4.1 [1]).

Предложение 1. *Пусть квадратичная форма Q положительно определенная, а форма A невырожденная. Тогда число всех представлений $X : Q[X] = A$, отвечающих собственным классам $G(b)^+$ из рода J, равно сумме следующего числа примитивных представлений:*

$$r^+(A; F, J) = \sum_{\Lambda^+_{M|A}} \mathrm{pr}^+(A[M^{-1}]; F, J).$$

Введем обозначения:$\Lambda_n = GL_n(Z)$, $\Lambda_n^+ = SL_n(Z)$, $M^r_{n,m}(Z)$ – множество матриц из $M_m(Z)$ с положительным определителем. Любую матрицу $X \in M^m_{n,m}(Z)(m \leq n)$ можно разложить в произведение $X = M_1\binom{M}{0}$, где $M_1 \in GL_n(Z)$, $M \in M^+_m(Z)$ ([1], п. 1.2.) Класс смежности $\Lambda_2^+ M$, где $\Lambda_2^+ = SL_2(Z)$ и $M \in m_2^+(Z)$, содержит треугольную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad a_1,\ a_2 > 0, \tag{11}$$

и

$$\Lambda_2^+ \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \Lambda_2^+ \begin{pmatrix} a_1 & b' \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b \equiv b' (\operatorname{mod} a_2).$$

Поэтому можем считать, что M имеет вид (11), и пусть $\Lambda_2^+ M$ делит A (доказательство приведено в [1], с. 46).

Тогда $a_1a_2|a$ и матрица $A^{'}=A[M^{-1}]=a^tM^{-1}AM^{-1}$. Матрица

$$A^{'}=a\begin{pmatrix} a_1^{-2}e & a_1^{-1}a_2^{-1}(-bea_1^{-1}+f) \\ a_1^{-1}a_2^{-1}(-bea_1^{-1}+f) & a_2^{-2}(b^2ea_1^{-2}-2fba_1^{-1}+e)\end{pmatrix} \qquad (12)$$

целая. А поскольку a бесквадратное, то $a_1=1$ и

$$(eb-f^2)^2\equiv -d_A(\operatorname{mod} a_2). \qquad (13)$$

Следовательно, $(\frac{-d_A}{p})=+1$. Пусть $a=a_+\cdot a_-$ и, если простое $p|a_\pm$, то $p^{\frac{d_A-1}{2}}\equiv\pm1(\operatorname{mod} d_A)$ (по свойствам символа Якоби–Лежандра и (13)). Из (13) следует, что $a_2|a_+$ и сравнение (13) имеет $2^{\alpha(a_2)}$ решений. Отсюда и из предложения 1 получаем

$$r(A;Q)=\sum_{\delta|a_+}2^{\alpha(a_+/\delta)}\mathrm{pr}\,(A^{'};Q),$$

где, по (10),

$$\mathrm{pr}\,(A^{'};Q)$$
$$=\begin{cases} 2^{7+\alpha(a\delta a_-)}\cdot 3Z(d_A,1)\prod\limits_{p|a_-}(p+1)\prod\limits_{p|\delta}(p-1), & \mathrm{oct}\equiv 0; \\ 2^{6+\alpha(a\delta a_-)}\cdot 3Z(d_A,1)\prod\limits_{p|a_-}(p+1)\prod\limits_{p|\delta}(p-1), & \mathrm{oct}\equiv \pm2, A_I. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что $\alpha(a_+/\delta)+\alpha(\delta a_-)=\alpha(a_+\cdot a_-)=\alpha(a)$ и

$$\sigma(a_-)=\sum_{d|a_-}d=\prod_{p|a_-}(p+1).$$

Поэтому можно записать

$$r(A;Q)=$$
$$\begin{cases} 2^{7+\alpha(a)}\cdot 3Z(d_A,1)\sigma(a_-)\sum\limits_{\delta|a_+}f(\delta), & \mathrm{oct}\equiv 0; \\ 2^{6+\alpha(a)}\cdot 3Z(d_A,1)\sigma(a_-)\sum\limits_{\delta|a_+}f(\delta), & \mathrm{oct}\equiv \pm2, A=A_I, \end{cases} \qquad (14)$$

где $f(\delta)=\prod_{p|\delta}(p-1)$ – мультипликативная функция. Следовательно, сумма в (14) равна a_+ и по формуле

$$r(A;Q)=\begin{cases} 2^{7+\alpha(a)}\cdot 3Z(d_A,1)a_+\cdot\sigma(a_-), & \mathrm{oct}\equiv 0; \\ 2^{6+\alpha(a)}\cdot 3Z(d_A,1)a_+\cdot\sigma(a_-), & \mathrm{oct}\equiv \pm2, A=A_I, \end{cases} \qquad (15)$$

где a – нечетное бесквадратное число, вычисляется число решений системы уравнений (7).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $a > 0$ нечетно и свободно от квадратов, A – целая положительно определенная форма размерности 2, и пусть определитель* $\det = |A|$ *взаимно прост с a. Тогда число представлений формы $a \cdot A$ формой $Q = 1_4$ определяется формулой* (15).

§3. Приложения к конкретным формам

Рассмотрим применение результатов, полученных в §§1, 2, к случаям, когда A – конкретная бинарная форма с $d_A = 1, 3, 5$, а форма $Q = 1_4$. Для нахождения числа примитивных и всех решений определим инварианты форм A и Q.

3.1. Пусть форма $A = a\binom{1\ 0}{0\ 1}$. В этом случае нечетная бесквадратная ступень равна $a_{\text{st}} = a, d_A = 1$, род $[1_4]$ одноклассный, число автоморфизмов $o(1_4) = 2^4 \cdot 4$, множитель $c(n-m) = c(2) = 1$, стандартная масса $\operatorname{std}(2,1) = \operatorname{std}(2)Z(1,1) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Для нечетных p, делящих ступень, p-адический символ равен $p_A = 1^0 p^{+2}$, т.е. $n_1(A) = 0$, $\varepsilon_1(A) = \varepsilon_p(A) = +1$. Для $p = 2$, не делящего a, имеем следующие 2-адические символы для форм A и Q: $2_A = 1^{+2}_{I,2a}$, $2_Q = 1^{+4}_{I,4}$. Если теперь следовать алгоритму, приведенному для доказательства теоремы 2, то получим следующие формулы:

$$\operatorname{pr}(A; 1_4) = 2^4 \cdot 3 \cdot 2^{\alpha(a)} \prod_{p|a} \left(p - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) = 48 \cdot 2^{\alpha(a)} \prod_{p|a} \left(p - \left(\frac{-1}{p}\right)\right),$$

$$r(A; 1_4) = 2^{4+\alpha(a)} \cdot 3 \cdot a_+ \cdot \sigma(a_-) = 48 \cdot 2^{\alpha(a)} \cdot 3 \cdot a_+ \cdot \sigma(a_-)$$

для числа решений квадратичной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = a, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0, \end{cases}$$

где параметр $a = a_+ \cdot a_-$ и , если нечетное простое число $p \mid a_\pm$, то $p \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} 4)$.

3.2. Пусть форма $A = a\binom{2\ 1}{1\ 2}$, $3 \nmid a$. Форма имеет нечетную бесквадратную ступень $a_{\text{st}} = 3a$, $d_A = 3$, род $[1_4]$ одноклассный,

$o(1_4) = 2^4 \cdot 4!$, $c(n-m) = c(2) = 1$, $\mathrm{std}(2,3) = \mathrm{std}(2)Z(3,1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Для нечетных $p \neq 3$, делящих параметр a, символ $p_A = 1^{+0}p^{\varepsilon 2}$, где $\varepsilon = (\frac{3}{p})$, т.е. $n_1(A) = 0$. Для $p = 2$, не делящего a, 2-адические символы равны $2_A = 1^{+2}_{II,0}, 2_Q = 1^{+4}_{I,4}$. В последнем случае, когда $p = 3$, символ $3_A = 1^{\varepsilon 1}3^{\varepsilon 1}$, где знак равен $\varepsilon = -(\frac{a}{3})$, $n_1(A) = 1$. В результате для квадратичной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2a, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 2a, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = a \end{cases}$$

получаем формулы для нахождения числа решений:

$$\mathrm{pr}\,(A; 1_4) = 2^6 \cdot 3 \cdot 2^{\alpha(a)} \prod_{p|a} \Big(p - \Big(\frac{-3}{p}\Big)\Big) = 192 \cdot 2^{\alpha(a)} \prod_{p|a} \Big(p - \Big(\frac{-3}{p}\Big)\Big),$$

$$r(A; 1_4) = 2^{6+\alpha(a)} a_+ \cdot \sigma(a_-) = 192 \cdot 2^{\alpha(a)} a_+ \cdot \sigma(a_-),$$

где параметр $a = a_+ \cdot a_-$ и , если нечетное простое число $p \mid a_\pm$, то $p \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 3)$.

3.3. Пусть форма $A = a\binom{3\ 2}{2\ 3}$, $5 \nmid a$. Форма имеет нечетную бесквадратную ступень $a_{\mathrm{st}} = 5a, d_A = 5$. Стандартная масса равна $\mathrm{std}(2,5) = \mathrm{std}(2)Z(5,1) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Для нечетных $p \neq 5$, делящих параметр a, p-адический символ равен $p_A = 1^{+0}p^{\varepsilon 2}$, где $\varepsilon = (\frac{5}{p})$, т.е. $n_1(A) = 0$. Для $p = 2$, не делящего a, имеем следующие 2-адические символы для форм A и Q: $2_A = 1^{+2}_{I,2a}, 2_Q = 1^{+4}_{I,4}$. В последнем случае, когда $p = 5$, символ $5_A = 1^{\varepsilon 1}5^{\varepsilon 1}$, где $\varepsilon = -(\frac{a}{5})$, $n_1(A) = 1$. Для квадратичной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3a, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 3a, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 2a \end{cases}$$

число примитивных и всех решений вычисляется по следующим формулам:

$$\mathrm{pr}\,(A; 1_4) = 2^6 \cdot 3 \cdot 2^{\alpha(a)} \prod_{p|a} \Big(p - \Big(\frac{-5}{p}\Big)\Big) = 192 \cdot 2^{\alpha(a)} \prod_{p|a} \Big(p - \Big(\frac{-3}{p}\Big)\Big),$$

$$r(A; 1_4) = 2^{6+\alpha(a)} a_+ \cdot \sigma(a_-) = 192 \cdot 2^{\alpha(a)} a_+ \cdot \sigma(a_-),$$

где $a = a_+ \cdot a_-, p \mid a_\pm \Rightarrow p \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 5)$.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Представление формы родом квадратичных форм*, Алгебра и анализ **8**, вып. 1 (1996), 21–112.
2. А. В. Хорошева, *Представление чисел родом одноклассных кватернарных форм*, Вестн. Владимирск. гос. пед. ун-та, No. 5 (2000), 338–346.
3. А. В. Хорошева, *Число представлений p-одномерных форм родом,* Зап. научн. семин. ПОМИ, **276** (2001), 334–348.
4. С. В. Федорова, *Представление форм квадратичными формам*, VII международная конференция. Математика. Экономика. Экология. Образование. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону (1999), 107-108.
5. С. В. Федорова, *Представление p-элементарной формы родом*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **276** (2001), 276–290.
6. J. Conway, N. Sloan, *Low-dimensional lattices.* IV. The mass formula, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **419**, No. 1857 (1988), 259–286.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 12 сентября 2003 г.