Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

Л. Б. Бейненсон

МОНОТОННО НЕВОЗРАСТАЮЩИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ. I

1. Введение

Пусть H – частично упорядоченное множество (ЧУМ), (Ω, Σ, μ) – вероятностное пространство. Случайным полем на H будем называть отображение $\xi: H \to \mathcal{Z}(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $\mathcal{Z}(\Omega, \Sigma, \mu)$ – множество всех случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ).

Будем называть случайное поле ξ монотонно невозрастающим, если для любых элементов $a < b$ из H с вероятностью единица имеет место равенство $\xi(a) \geq \xi(b)$.

В статье [1] М. А. Антонца и И. А. Шерешевского были построены меры на множестве идеалов частично упорядоченного множества (подмножество ЧУМ называется идеалом, если вместе с каждым элементом в него входят все элементы меньшие его – см. п. 2.1). В частном случае, когда частично упорядоченное множество – положительный квадрант плоскости, границу идеала можно отождествить с монотонно невозрастающей функцией на действительной оси, а значит, мера на множестве идеалов однозначно определяет монотонно невозрастающий случайный процесс.

В данной работе предложен метод построения случайных полей на ЧУМ произвольного вида. А именно, для любого частично упорядоченного множества H по мере ρ на произведении $H \times \mathbf{R}$ строится случайное поле η_ρ на H.

В частном случае, когда мера ρ на $H \times \mathbf{R}$ является произведением произвольной конечно-аддитивной меры γ на ЧУМ H и ограничения λ_+ меры Лебега на множество положительных чисел $\mathbf{R}_+$, вычислены конечномерные распределения поля η_ρ и такие его численные характеристики, как математическое ожидание значения поля в точке, дисперсия значения поля в точке, вероятность того, что значения поля в двух заданных точках равны, а также корреляционная функция случайного поля.

Так как корреляционная функция случайного поля положительно определена, то мы получаем способ построения положительно определенных функций на частично упорядоченных множествах.

А именно, по теореме 2.6 для произвольной неотрицательной конечно-аддитивной меры γ на H, такой, что для любого главного идеала $\mathcal{I}_H(a) \stackrel{df}{=} \{a' \in H: \ a' \le a\}$ определена и конечна мера $\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big)$, функция $K(a,b)$ на $H \times H$, задаваемая формулой

$$K(a,b) = \frac{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cap \mathcal{I}_H(b)\Big)}{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cup \mathcal{I}_H(b)\Big)},$$

является положительно определенной.

Применяя эту теорему, получаем, что положительно определена функция $K(m,n)$, задаваемая на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ по формуле

$$K(m,n) = \frac{\tau(m,n)}{\tau(m) + \tau(n) - \tau(m,n)},$$

где $\tau(m)$ – количество натуральных делителей числа m, а $\tau(m,n)$ – количество общих делителей чисел m и n.

Из теоремы 2.6 следует также положительная определенность функции $K(a,b)$ на множестве всех положительных чисел $\mathbf{R}_+$, определяемой для любых $a > 0$ и $b > 0$ по формуле

$$K(a,b) = \frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}.$$

Эти и другие примеры рассмотрены в п. 2.5.

При посторении случайного поля η_ρ используется конструкция геометрической меры из работы [1]. Эта конструкция не использует конечномерных распределений и не дает метода их вычисления.

Для доказательства теоремы 2.3, дающей описание конечномерных распределений монотонно невозрастающего случайного поля, возникла необходимость в исследовании структуры вероятностных мер, сосредоточенных на многогранных конусах в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$.

Это исследование и составляет основное содержание второй части статьи.

2. Основные определения и утверждения

2.1. Построение случайного монотонно невозрастающего поля на ЧУМ.

Подмножество произвольного частично упорядоченного множества будем называть идеалом, если вместе с каждым элементом в него входят все элементы меньшие его; подмножество ЧУМ будем называть фильтром, если вместе с каждым элементом в него входят все элементы большие его.

Для любого элемента a из ЧУМ S обозначим через $\mathcal{I}_S(a)$ и $\mathcal{F}_S(a)$ соответственно главный идеал и главный фильтр для элемента a в S, то есть минимальный идеал и фильтр, содержащие a: $\mathcal{I}_S(a) = \{a' \in S :\ a' \le a\}$, $\quad \mathcal{F}_S(a) = \{a' \in S :\ a' \ge a\}$.

Для любого подмножества A ЧУМ S обозначим через

$$\mathcal{I}_S(A) = \bigcup_{a\in A} \mathcal{I}_S(a) \quad \text{и} \qquad \mathcal{F}_S(A) = \bigcup_{a\in A} \mathcal{F}_S(a)$$

соответственно идеал и фильтр, порожденные множеством A. Идеалы и фильтры, порожденные конечным множеством, будем называть конечнопорожденными.

Пусть $\mathcal{L}(S)$ – множество всех идеалов ЧУМ S, $\mathcal{L}^*(S)$ – множество всех фильтров ЧУМ S, $\mathcal{L}_0(S)$ – множество всех конечнопорожденных идеалов ЧУМ S, $\mathcal{L}_0^*(S)$ – множество всех конечнопорожденных фильтров ЧУМ S. Будем рассматривать все эти множества как ЧУМы относительно теоретико-множественного включения.

Будем говорить, что у элементов a и b произвольного ЧУМ S есть решеточное пересечение, если существует такое c из S, что $\mathcal{I}_S(c) = \mathcal{I}_S(a) \cap \mathcal{I}_S(b)$; будем записывать это как $c = a \wedge b$. Операция решеточного пересечения является ассоциативной и коммутативной на своей области определения. Частично упорядоченное множество называется $\wedge$-полурешеткой, если для любых двух его элементов существует решеточное пересечение.

Для любых частично упорядоченных множеств S_1 и S_2 их декартово произведение $S_1 \times S_2$ также будем считать частично упорядоченным множеством с порядком, определенным следующим образом:

для любых z_1, z_2 из $S_1 \times S_2$, таких, что $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, неравенство $z_1 \le z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$.

Кроме того, для любого частично упорядоченного множества S и произвольного множества A множество S^A всех функций с областью определения A и областью значений S также будем считать частично упорядоченным с порядком, определенным следующим образом:
для любых $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ из S^A неравенство $\mathbf{z}_1 \le \mathbf{z}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого элемента a из A имеет место неравенство $\mathbf{z}_1(a) \le \mathbf{z}_2(a)$.

Пусть H – произвольное частично упорядоченное множество, $\widehat{H} \stackrel{df}{=} H \times \mathbf{R}$ – декартово произведение частично упорядоченного множества H и упорядоченного множества действительных чисел $\mathbf{R}$.

Определим на $\widehat{H}$ топологию произведения топологии $\mathbf{R}$ и тривиальной топологии на H, в которой все подмножества H являются одновременно открытыми и замкнутыми. Для любого подмножества M множества $\widehat{H}$ обозначим через M^c и M^{int} соответственно замыкание M и его внутренность в топологии $\widehat{H}$.

Обозначим через $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ множество всех замкнутых идеалов ЧУМ $\widehat{H}$.

Из определения топологии в $\widehat{H}$ следует, что идеал J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ является замкнутым в топологии $\widehat{H}$ в том и только в том случае, когда для любого элемента a из H множество $\{y \in \mathbf{R} : \ (a, y) \in J\}$ замкнуто в $\mathbf{R}$; аналогично, J будет открытым, если и только если для любого элемента a из H множество $\{y \in \mathbf{R} : \ (a, y) \in J\}$ открыто в $\mathbf{R}$. Поскольку любой конечнопорожденный идеал в $\widehat{H}$ замкнут, то $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$ содержится в $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$

Для любого ЧУМ S обозначим через $\mathcal{A}(S)$ алгебру множеств на S, порожденную множеством всех идеалов $\mathcal{L}(S)$, и через $\mathcal{A}_0(S)$ – алгебру множеств на S, порожденную множеством конечнопорожденных идеалов $\mathcal{L}_0(S)$. Для любой меры ρ на $\mathcal{A}_0(S)$ определим функцию распределения F_ρ на S, полагая $F_\rho(a) \stackrel{df}{=} \rho\Big(\mathcal{I}_S(a)\Big)$.

Определение 2.1. *Для любой алгебры множеств $\mathcal{H}$ на $\widehat{H}$ и для любой конечно-аддитивной неотрицательной меры ρ на $\mathcal{H}$ будем говорить, что мера ρ непрерывна снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, если для любого* *идеала J из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})\cap\mathcal{H}$ выполняется следующее соотношение:*

$$\rho(J)=\sup_{\substack{J'\in\mathcal{L}_0(\widehat{H})\cap\mathcal{H}\\ J'\subset J^{int}}}\rho(J'). \tag{1}$$

Аналогично, будем говорить, что мера ρ непрерывна снизу на $\mathcal{L}(\widehat{H})$, если соотношение (1) выполняется для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})\cap\mathcal{H}$.

Для любого конечного подмножества Λ множества H, для любой функции $\mathbf{x}$ из $\mathbf{R}^\Lambda$ определим конечнопорожденный идеал $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, полагая

$$\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}=\bigcup_{a\in\Lambda}\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,\mathbf{x}(a)).$$

Множество $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ является обобщенной диаграммой Юнга, порожденной точками $\{(a,\mathbf{x}(a)),\ a\in\Lambda\}$.

Отображение $\mathbf{Y}_\Lambda$ задает вложение множества $\mathbf{R}^\Lambda$ в множество $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$.

Пусть ρ – конечно-аддитивная неотрицательная мера на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$.

Определим функцию $g_{\rho,\Lambda}$ на $\mathbf{R}^\Lambda$, полагая для любого вектора $\mathbf{x}$ из $\mathbf{R}^\Lambda$

$$g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x})=\exp\Big(-\rho(\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x})\Big)$$

(выражение в правой части данного равенства имеет смысл, поскольку множество $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ является конечнопорожденным идеалом, а значит, оно принадлежит и $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, и $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$).

Определим для любого элемента a из H функцию $Q_{\rho,a}$ на $\mathbf{R}$, полагая для любого числа y из $\mathbf{R}$

$$Q_{\rho,a}(y)=F_\rho(a,y)=\rho\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)\Big),$$

где $F_\rho(a,y)$ – функция распределения меры ρ на $\widehat{H}$.

Теорема 2.1. *Пусть ρ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, такая, что для любого элемента a из H выполняется соотношение*

$$\lim_{y\to+\infty}Q_{\rho,a}(y)=+\infty.$$

Тогда существует случайное монотонно невозрастающее поле η_ρ на H, такое, что для любого конечного подмножества Λ множества H и для любой функции $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_\rho(a) \geq \mathbf{x}(a)\ \forall a \in \Lambda\Big\} = g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Замечание. Из соотношения (2) следует, что конечномерное распределение случайного поля η_ρ на Λ однозначно определяется функцией $g_{\rho,\Lambda}$.

Следующая теорема позволяет упростить условия, налагаемые на меру ρ в теореме 2.1, в случае, когда H – $\wedge$-полурешетка.

Теорема 2.2. *Пусть H — $\wedge$-полурешетка.*

Тогда для того, чтобы произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера ρ на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$ являлась непрерывной снизу, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента a из H функция $Q_{\rho,a}$ была непрерывна снизу.

Пример 2.1.1. Пусть $H = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ – множество всех положительных чисел.

Для любого множества A из $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$ положим $\rho(A) = \lambda^2(A \cap \mathbf{R}_+^2)$, где λ^2 – мера Лебега на $\mathbf{R}^2$. Поскольку все конечнопорожденные идеалы в $\widehat{H} = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ измеримы по Лебегу, то выражение в правой части данного равенства имеет смысл, а ρ будет мерой на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$.

По теореме 2.2 мера ρ является непрерывной снизу на множестве конечнопорожденных идеалов $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$. Кроме того, по определению для любого a из $\mathbf{R}_+$ и любого действительного y имеет место равенство

$$Q_{\rho,a}(y) = \begin{cases} a \cdot y, & \text{если} \quad y > 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

Мера ρ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, поскольку для любого a имеет место соотношение $\lim\limits_{y \to +\infty} Q_{\rho,a}(y) = +\infty$. Отсюда получаем, что существует случайное монотонно невозрастающее поле η_ρ на H, такое, что для любого конечного подмножества Λ множества $\mathbf{R}_+$ и для любой функции $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство (2).

2.2. Конечномерные распределения случайного поля на ЧУМ.

Пусть ξ – некоторое случайное поле на H, Λ – произвольное конечное подмножество H.

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\Lambda)$ борелевскую σ-алгебру на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^\Lambda$.

Обозначим через $\mu_{\xi,\Lambda}$ конечномерное распределение случайного поля ξ на множестве Λ; $\mu_{\xi,\Lambda}$ является мерой на $(\mathbf{R}^\Lambda, \mathcal{B}(\mathbf{R}^\Lambda))$.

В дальнейшем в случаях, где это не вызовет недоразумений, мы будем использовать обозначение μ_Λ вместо $\mu_{\xi,\Lambda}$.

Из определения вытекает, что случайное поле ξ будет монотонно невозрастающим тогда и только тогда, когда для любого конечного подмножества Λ множества H мера $\mu_{\xi,\Lambda}$ будет сосредоточена на множестве всех монотонно невозрастающих функций из $\mathbf{R}^\Lambda$.

Зададимся вопросом о строении конечномерного распределения $\mu_{\xi,\Lambda}$ случайного поля ξ на Λ.

Обозначим через $\mathcal{M}_\Lambda$ множество всех монотонно невозрастающих действительных функций на Λ.

Очевидно, имеет место равенство

$$\mathcal{M}_\Lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\Lambda : \ \forall a, b \in \Lambda \quad \text{если } a < b, \quad \text{то} \quad \mathbf{x}(a) \geq \mathbf{x}(b)\}, \quad (4)$$

и поэтому $\mathcal{M}_\Lambda$ является многогранным конусом как множество решений системы однородных линейных неравенств в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^\Lambda$ (см. [3]).

Полупространство P называется опорным для многогранного конуса C, если C содержится в P; граница опорного полупространства называется опорной гиперплоскостью конуса C.

Гранью конуса C называется пересечение конуса с некоторой его опорной гиперплоскостью. Для удобства будем считать, что пустое множество и сам конус C всегда являются гранями конуса C.

В случае, если Γ_1 и Γ_2 – некоторые грани и Γ_1 содержится в Γ_2, то Γ_1 называется подгранью Γ_2, а Γ_2 называется надгранью Γ_1.

Точка $\mathbf{x}$ грани Γ называется внутренней, если она не принадлежит никакой ее подграни. Множество всех внутренних точек грани Γ обозначается Γ^{int}.

Поскольку внутренние части различных граней многогранного конуса не пересекаются и любой многогранный конус может быть представлен в виде объединения внутренних частей его граней (см. [3] и [5]), то имеет место равенство

$$\mathcal{M}_\Lambda = \bigcup_\Gamma \Gamma^{int}, \tag{5}$$

где объединение в правой части равенства производится по всем граням конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.

Отсюда получаем, что выполняется соотношение

$$\mu_\Lambda = \sum_\Gamma \mu_\Lambda\Big|_{\Gamma^{int}}, \tag{6}$$

где $\mu_\Lambda\Big|_{\Gamma^{int}}$ есть ограничение меры μ_Λ на внутреннюю часть Γ^{int} грани Γ.

Любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ можно сопоставить отношение эквивалентности k_Γ на множестве Λ, полагая элементы a и b эквивалентными в том и только в том случае, когда для всех $\mathbf{x}$ из $V(\Gamma)$ имеет место равенство $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$.

Определение 2.2. *Обозначим через $\mathcal{K}_\Lambda$ множество всех граней Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, у которых для любого класса эквивалентности $\overline{a}$ отношения k_Γ мощность множества $\inf \overline{a}$ равна единице.*

Определим для любого элемента a из множества Λ функцию $\mathbf{e}^a$ из $\mathbf{R}^\Lambda$, полагая для любого b из Λ

$$\mathbf{e}^a(b) \overset{df}{=} \delta_{ab},$$

где δ – символ Кронекера. Множество функций $(\mathbf{e}^a,\ a \in \Lambda)$ будет ортонормированным базисом в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^\Lambda$.

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ производную по направлению $\mathbf{v}$ и положим для любого подмножества M множества Λ

$$\frac{\partial^{|M|}}{\partial \mathbf{e}^M} \overset{df}{=} \prod_{a \in M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}^a}.$$

Определим для любого вектора $\mathbf{v}$ из $\mathbf{R}^\Lambda$ одностороннюю производную $\frac{\partial}{\partial^+ \mathbf{v}}$, полагая

$$\frac{\partial f}{\partial^+ \mathbf{v}}(\mathbf{x}) \overset{df}{=} \lim_{h \to +0} \frac{f(\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

и для любого подмножества A множества Λ положим

$$\frac{\partial^{|A|}}{\partial^+\mathbf{e}^A} \stackrel{df}{=} \prod_{i\in A} \frac{\partial}{\partial^+\mathbf{e}^i}.$$

Для любого подмножества M евклидова пространства $\mathbf{R}^\Lambda$ обозначим через $V(M)$ минимальное линейное подпространство $\mathbf{R}^\Lambda$, содержащее M.

Для любого подмножества A некоторого частично упорядоченного множества S будем обозначать через $\inf A$ и $\sup A$ множество минимальных элементов множества A и множество максимальных элементов множества A соответственно:

$$\inf A = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' < a\}, \quad \sup A = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' > a\}.$$

Определим для любого отношения эквивалентности k на Λ множество $\mathrm{Inf}(k)$ минимальных элементов классов эквивалентности отношения k, полагая

$$\mathrm{Inf}(k) = \bigcup_{\overline{a}\in\Lambda/k} \inf \overline{a}.$$

Для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ определим действительное число $\mathbf{q}_\Lambda(\Gamma)$, полагая

$$\mathbf{q}_\Lambda(\Gamma) = \prod_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} \frac{1}{\sqrt{|\overline{a}|}}.$$

Определим инвертированную функцию распределения $G_{\mu,\xi,\Lambda}$ меры $\mu_{\xi,\Lambda}$, полагая для любого $\mathbf{x}$ из $\mathbf{R}^\Lambda$

$$G_{\mu,\xi,\Lambda} = \mu_{\xi,\Lambda}\{\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^\Lambda :\ \mathbf{x}' \geq \mathbf{x}\}.$$

Непосредственно из определения видно, что инвертированная функция распределения $G_{\mu,\xi,\Lambda}$ является монотонно невозрастающей и непрерывной снизу; также, как и обычная функция распределения в евклидовом пространстве, она однозначно определяет меру $\mu_{\xi,\Lambda}$. Там, где это не вызовет недоразумений, мы будем писать $G_{\mu,\Lambda}$ вместо $G_{\mu,\xi,\Lambda}$.

Применяя теорему 2.1 из второй части статьи к конечномерному распределению $\mu_{\xi,\Lambda}$ случайного поля ξ на Λ, получаем следующую теорему, описывающую структуру меры $\mu_{\xi,\Lambda}$.

Теорема 2.3. *Пусть H – произвольное частично упорядоченное множество, ξ – конечнозначное монотонно невозрастающее случайное поле на H с вероятностями, определяемыми мерой μ, Λ – произвольное конечное подмножество H, μ_Λ – конечномерное распределение случайного поля ξ.*

Пусть U_Λ – открытое подмножество множества $\mathbf{R}^\Lambda$, такое, что на множестве $U_\Lambda \cap \mathcal{M}_\Lambda$ функция $G_{\mu,\Lambda}$ непрерывна, а во всех внутренних точках множества $U_\Lambda \cap \mathcal{M}_\Lambda$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^{|\Lambda|} G_{\mu,\Lambda}}{\partial \mathbf{e}^\Lambda}(\mathbf{x})$, которая непрерывно продолжается вплоть до границ множества $U_\Lambda \cap \mathcal{M}_\Lambda$.

Тогда для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ ограничение $\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}}$ меры μ_Λ на множестве $U_\Lambda \cap \Gamma^{int}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на линейном подпространстве $V(\Gamma)$, причем имеют место следующие соотношения:

1) если Γ не принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то $\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}} = 0$;

2) если Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то на множестве $U_\Lambda \cap \Gamma^{int}$ существует производная $\frac{\partial^{|\operatorname{Inf}(k_\Gamma)|} G_{\mu,\Lambda}}{\partial^+ \mathbf{e}^{\operatorname{Inf}(k_\Gamma)}}$, и для любого $\mathbf{x}$ из $U_\Lambda \cap \Gamma^{int}$ имеет место соотношение

$$\frac{d\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathbf{x}) = (-1)^{|\Lambda/k_\Gamma|} \mathbf{q}_\Lambda(\Gamma) \frac{\partial^{|\operatorname{Inf}(k_\Gamma)|} G_{\mu,\Lambda}}{\partial^+ \mathbf{e}^{\operatorname{Inf}(k_\Gamma)}}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Следствие 2.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2.3.*

Тогда мера μ_Λ на множестве U_Λ представима в виде

$$\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{K}_\Lambda} \mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}}. \tag{8}$$

Замечание. При $U_\Lambda = \mathbf{R}^\Lambda$ соотношение (8) является усилением соотношения (6).

2.3. Конечномерные распределения случайного поля η_ρ.

Обозначим через $\mu_\Lambda(\rho)$ конечномерное распределение случайного поля η_ρ на Λ. Из соотношения (2) вытекает, что функция $g_{\rho,\Lambda}$ является инвертированной функцией распределения меры $\mu_\Lambda(\rho)$.

Будем говорить, что подмножество Λ ЧУМ H замкнуто относительно решеточных пересечений, если для любых элементов a и b из Λ в ЧУМ H существует их решеточное пересечение $c = a \wedge b$

и это пересечение также принадлежит Λ (при этом не обязательно, чтобы решеточное пересечение существовало для всех пар элементов множества H).

Пусть теперь Λ – замкнутое относительно решеточных пересечений подмножество ЧУМ H, ρ – произвольная конечно-аддитивная неотрицательная мера на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$.

Определим для любого частично упорядоченного множества S и любого элемента a из S

$$B(S;a) \stackrel{df}{=} \sup\Big(\mathcal{I}_S(a)\backslash\{a\}\Big);$$

множество $B(S;a)$ назовем базой элемента a в множестве S.

Для любого a из H определим открытое подмножество $W_{\rho,a}$ множества $\mathbf{R}$ как множество всех точек из $\mathbf{R}$, в которых производная $Q'_{\rho,a}$ действительной функции $Q_{\rho,a}$ существует и непрерывна.

Для любого конечного подмножества Λ множества H определим открытое подмножество $U_{\rho,\Lambda}$ евклидова пространства $\mathbf{R}^{\Lambda}$, полагая

$$U_{\rho,\Lambda} = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\Lambda} : \ \forall a \in \Lambda \qquad \mathbf{x}(a) \in \bigcap_{b \in \mathcal{I}_{\Lambda}(a)} W^{int}_{\rho,b}\Big\},$$

где $W^{int}_{\rho,b}$ – внутренность множества $W_{\rho,b}$.

Теорема 2.4. *Пусть ρ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, такая, что для любого a из H выполняется соотношение*

$$\lim_{y \to +\infty} Q_{\rho,a}(y) = +\infty.$$

Тогда для любого конечного подмножества Λ множества H, замкнутого относительно решеточных пересечений, имеют место следующие соотношения:

(1) *для любого $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}_{\Lambda}$ имеет место равенство*

$$g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\sum_{a \in \Lambda}\Big(Q_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset \neq A \subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a))\Big)\right),$$

где $\bigwedge A = \bigwedge_{a' \in A} a'$ – решеточное пересечение всех элементов из A, а сумма по пустому множеству считается равной нулю;

(2) *для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, не принадлежащей $\mathcal{K}_\Lambda$, имеет место равенство $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{\Gamma^{int} \cap U_{\rho,\Lambda}} = 0$;*

(3) *для любой грани Γ из $\mathcal{K}_\Lambda$ ограничение $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{\Gamma^{int} \cap U_{\rho,\Lambda}}$ меры $\mu_\Lambda(\rho)$ на множество $\Gamma^{int} \cap U_{\rho,\Lambda}$ является абсолютно непрерывным на $\Gamma^{int} \cap U_{\rho,\Lambda}$ относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на евклидовом пространстве $V(\Gamma)$, причем для любого $\mathbf{x}$ из $\Gamma^{int} \cap U_{\rho,\Lambda}$ имеет место соотношение*

$$\frac{d\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_{\rho,\Lambda} \cap \Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_\Lambda(\Gamma) g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) \times$$
$$\times \prod_{a \in \mathrm{Inf}(k_\Gamma)} \Big(Q'_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset \neq A \subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q'_{\rho, \wedge A}(\mathbf{x}(a)) \Big).$$

Пример 2.3.1. Вернемся к примеру 2.1.1 из п. 2.1.

Построенная в этом примере мера ρ удовлетворяет условиям как теоремы 2.1, так и теоремы 2.4.

Пусть $\Lambda = \{a_1, \dots, a_n\}$ – произвольное конечное подмножество $\mathbf{R}_+$; не ограничивая общности будем считать, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда, поскольку для любого i от 2 до n $B(\Lambda, a_i) = \{a_{i-1}\}$, а $B(\Lambda, a_1) = \emptyset$, то, по теореме 2.4, для любого $\mathbf{x}$ из $\mathbf{R}^\Lambda$ имеет место равенство

$$g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) = \exp\left(-Q_{\rho,a_1}(\mathbf{x}(a_1)) - \sum_{i=2}^{n} \Big(Q_{\rho,a_i}(\mathbf{x}(a_i)) - Q_{\rho,a_{i-1}}(\mathbf{x}(a_i)) \Big) \right).$$

Учитывая равенство (3), отсюда получаем следующее соотношение:

$$g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) = \exp\left(-a_1 \mathbf{x}(a_1) - \sum_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1}) \mathbf{x}(a_i) \right).$$

2.4. Вычисление характеристик случайного поля η_ρ.

Пусть H – $\wedge$-полурешетка, то есть для всех пар элементов a и b из H существует их решеточное пересечение $a \wedge b$. И пусть

γ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}_0(H)$. Обозначим через $F_\gamma(a) = \gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big)$ функцию распределения меры γ на частично упорядоченном множестве H.

Пусть $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R},\ x > 0\}$ – множество всех положительных чисел.

Обозначим через $\lambda_+ = \lambda\Big|_{\mathbf{R}_+}$ ограничение меры Лебега λ на $\mathbf{R}_+$.

Так как конечнопорожденный идеал есть объединение конечного числа главных идеалов, то для любого частично-упорядоченного множества S алгебра множеств $\mathcal{A}_0(S)$ порождается множеством всех главных идеалов в S.

Но поскольку $\widehat{H} = H \times \mathbf{R}$, то любой главный идеал ЧУМ $\widehat{H}$ есть декартово произведение главных идеалов в H и $\mathbf{R}$; отсюда получаем, что алгебра множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$ есть прямое произведение алгебр $\mathcal{A}_0(H)$ и $\mathcal{A}_0(\mathbf{R})$.

Определим меру ρ_0 на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\widehat{H})$ как прямое произведение меры γ и меры λ_+ на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. По определению, для любого элемента a из H функция $Q_{\rho_0,a}$ может быть вычислена следующим образом:

$$Q_{\rho_0,a}(y) = \begin{cases} y \cdot F_\gamma(a), & \text{если } y > 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Из этого соотношения получаем, что $Q_{\rho_0,a}(y) = \max\{y, 0\} \cdot F_\gamma(a)$.

Отсюда вытекает, что для любого a из H функция $Q_{\rho_0,a}$ будет непрерывна снизу, а значит, по теореме 2.2 и мера ρ_0 будет непрерывна снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$.

Тогда, поскольку для любого a из H при возрастании y функция $Q_{\rho_0,a}$ стремится к бесконечности, то по теореме 2.1 на σ-алгебре $\Sigma^c(\widehat{H})$ существует случайное поле η_{ρ_0}, такое, что для любого конечного подмножества Λ множества H и для любого $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство (2):

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_{\rho_0}(a) \geq \mathbf{x}(a)\ \forall a \in \Lambda\Big\} = g_{\rho_0,\Lambda}(\mathbf{x}).$$

Теорема 2.5. *Пусть γ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}_0(H)$, $\lambda_+ = \lambda\Big|_{\mathbf{R}_+}$ – ограничение меры Лебега λ на $\mathbf{R}_+$ и $\rho_0 = \gamma \times \lambda_+$ – мера на $\mathcal{B}(\widehat{H})$, являющаяся прямым произведением меры γ и меры λ_+ на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.*

Тогда имеют место следующие соотношения:

(1) *для любого элемента a из H математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\eta_{\rho_0}(a)$ вычисляются как*

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a) = \frac{1}{F_\gamma(a)}, \tag{10}$$

$$\mathbf{D}\eta_{\rho_0}(a) = \frac{1}{F_\gamma(a)^2}; \tag{11}$$

(2) *для любых несовпадающих элементов a и b из H корреляционная функция $K(a, b)$ случайного поля η_{ρ_0} дается соотношением*

$$K(a, b) = \frac{F_\gamma(a \wedge b)}{F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(a \wedge b)}; \tag{12}$$

(3) *для любого a из H с вероятностью единица имеет место неравенство $\eta_{\rho_0}(a) > 0$;*

(4) *для любых несовпадающих элементов a и b из H вероятность выполнения соотношения $\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) \neq \eta_{\rho_0}(a \wedge b)$ равна нулю;*

(5) *для любых несовпадающих элементов a и b из H вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a \wedge b)$, вычисляется по формуле*

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a \wedge b)\Big\} = \frac{F_\gamma(a \wedge b)}{F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(a \wedge b)}. \tag{13}$$

Замечание. Из принципа включения и исключения получаем, что правая часть равенств (13) и (12) может быть вычислена как

$$\frac{F_\gamma(a \wedge b)}{F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(a \wedge b)} = \frac{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cap \mathcal{I}_H(b)\Big)}{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cup \mathcal{I}_H(b)\Big)}.$$

Доказательство теоремы 2.5 дано ниже в п. 6.

Пример 2.4.1. Пусть $H = \mathbf{R}_+$, $\gamma = \lambda_+$ – мера Лебега, ограниченная на $\mathbf{R}_+$, и $\rho_0 = \lambda_+ \times \lambda_+$ – мера на $\widehat{H} = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Как было показано выше, мера ρ_0 удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и на σ-алгебре $\Sigma^c(\widehat{H})$ существует соответствующее случайное поле η_{ρ_0}.

Так как для любых a и b из $\mathbf{R}_+$ имеет место равенство $a \wedge b = \min\{a, b\}$, то по теореме 2.5 имеют место следующие утверждения о конечномерных распределениях случайного поля η_{ρ_0}:

(1) для любых несовпадающих элементов a и b из H вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b)$, вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b)\Big\} = \frac{\min\{a, b\}}{\max\{a, b\}};$$

(2) для любого элемента a из H математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\eta_{\rho_0}(a)$ равны

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a) = \frac{1}{a},$$
$$\mathbf{D}\eta_{\rho_0}(a) = \frac{1}{a^2};$$

(3) для любых несовпадающих элементов a и b из H корреляционная функция $K(a, b)$ случайного поля η_{ρ_0} равна

$$K(a, b) = \frac{\min\{a, b\}}{\max\{a, b\}}. \tag{14}$$

Из свойств корреляционной функции $K(a, b)$ получаем, что выражение в правой части равенства (14) является положительно определенной функцией на $\mathbf{R}_+$.

Для любого положительного h определим симметричный положительно определенный оператор $\mathbf{K}_h$ на множестве $L^2(0, h)$ вещественных функций, суммируемых с квадратом на интервале $(0, h)$, полагая

$$\Big(\mathbf{K}_h \varphi\Big)(y) \stackrel{df}{=} \int\limits_0^h K(x, y)\varphi(x)dx.$$

Собственными значениями оператора $\mathbf{K}_h$ будут числа $\lambda_n = \frac{8h}{\alpha_n^2}$, где α_n – n-й положительный корень функции Бесселя $\mathrm{J}_1(x)$, а соответствующие собственные функции будут иметь вид

$$\varphi_n(x) = \mathrm{J}_2\left(\sqrt{\frac{8x}{\lambda_n}}\right).$$

2.5. Положительно определенные функции на частично упорядоченных множествах.

Применим результаты данной статьи для нахождения положительно определенных функций на частично упорядоченных множествах.

Теорема 2.6. *Пусть H – произвольное частично упорядоченное множество.*

Пусть γ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на H, такая, что для любого a из H определена и конечна мера $\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big)$.

Тогда функция $K(a,b)$ на H, определяемая по формуле

$$K_\gamma(a,b) = \frac{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cap \mathcal{I}_H(b)\Big)}{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cup \mathcal{I}_H(b)\Big)}, \tag{15}$$

является положительно определенной на H.

Замечание. Поскольку корреляционная функция случайного поля всегда положительно определена, то в случае, когда H – $\wedge$-полурешетка, теорема 2.6 непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы 2.5.

Приведем примеры применения теоремы 2.6 для нескольких характерных случаев частично упорядоченных множеств.

Пример 2.5.1. Рассмотрим в качестве примера случай, когда $H = \mathbf{N}$ – множество натуральных чисел с естественным порядком. Тогда для любых a и b из $\mathbf{N}$ имеет место равенство $a \wedge b = \min\{a,b\}$.

Определим конечно-аддитивную меру γ на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(H)$, полагая $\gamma(M) = |M|$ для любого M из $\mathcal{A}_0(H)$.

Тогда для любого элемента a из $\mathbf{N}$ имеет место равенство $\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big) = a$.

Таким образом, из теоремы 2.6 получаем, что функция $K(a,b)$ на $\mathbf{N}$, определяемая по формуле

$$K(a,b) = \frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}, \tag{16}$$

является положительно определенной.

Пример 2.5.2. Обобщим предыдущий пример. Рассмотрим теперь случай, когда H – произвольное частично упорядоченное множество, такое, что для любого a из H главный идеал $\mathcal{I}_H(a)$ содержит конечное число элементов.

Определим конечно-аддитивную меру γ на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(H)$, полагая $\gamma(M) = |M|$ для любого M из $\mathcal{A}_0(H)$.

Так как для любого элемента a из H имеет место равенство $\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big) = \Big|\mathcal{I}_H(a)\Big|$, то из теоремы 2.6 получаем, что функция $K(a,b)$ на H, определяемая по формуле

$$K(a,b) = \frac{\Big|\mathcal{I}_H(a) \cap \mathcal{I}_H(b)\Big|}{\Big|\mathcal{I}_H(a) \cup \mathcal{I}_H(b)\Big|}, \tag{17}$$

является положительно определенной.

Пример 2.5.3. Рассмотрим теперь случай, когда частично упорядоченное множество H есть множество всех натуральных чисел $\mathbf{N}$ с порядком, определенным следующим образом: $a \le b$ в том и только в том случае, когда число b делится без остатка на a.

В этом случае для любых элементов a и b элемент $a \wedge b$ будет равен наибольшему общему делителю чисел a и b.

Обозначим через $\tau(a)$ количество делителей натурального числа a. Тогда $|\mathcal{I}_H(a)| = \tau(a)$.

Определим, как и в предыдущем пункте, конечно-аддитивную меру γ на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(H)$, полагая $\gamma(M) = |M|$ для любого M из $\mathcal{A}_0(H)$.

Тогда для любого элемента a из $\mathbf{N}$ имеет место равенство

$$\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big) = \Big|\mathcal{I}_H(a)\Big| = \tau(a).$$

Пусть $\tau(a,b) = \tau(a \wedge b)$ – количество общих делителей чисел a и b. Тогда из теоремы 2.6 получаем, что функция $K(a,b)$ на $\mathbf{N}$, определяемая по формуле

$$K(a,b) = \frac{\tau(a,b)}{\tau(a) + \tau(b) - \tau(a,b)}, \tag{18}$$

является положительно определенной.

Пример 2.5.4. Пусть T – произвольное корневое дерево, и пусть вершина $\mathbf{o}$ – корень дерева T.

Определим на вершинах дерева T порядок, полагая, что соотношение $a < b$ выполняется в том и только в том случае, когда вершина a лежит на минимальном пути, соединяющем вершину b с корнем $\mathbf{o}$ дерева T. Тогда для любой вершины a главный идеал $\mathcal{I}_T(a)$ есть минимальный путь, соединяющий a с корнем $\mathbf{o}$, и для любых вершин a и b вершина $a \wedge b$ есть максимально удаленная от корня $\mathbf{o}$ вершина, меньшая одновременно a и b.

Как и в предыдущих примерах, определим конечно-аддитивную меру γ на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(H)$, полагая $\gamma(M) = |M|$ для любого M из $\mathcal{A}_0(H)$. Тогда для любой вершины a дерева T имеет место равенство $\gamma\Big(\mathcal{I}_T(a)\Big) = \Big|\mathcal{I}_T(a)\Big| = l(a) + 1$, где $l(a)$ – высота элемента a относительно корня $\mathbf{o}$ (при этом мы полагаем, что $l(\mathbf{o}) = 0$).

Тогда из теоремы 2.6 получаем, что функция $K(a, b)$ на $\mathbf{N}$, определяемая по формуле

$$K(a, b) = \frac{l(a \wedge b) + 1}{l(a) + l(b) + 1 - l(a \wedge b)}, \tag{19}$$

является положительно определенной.

Пример 2.5.5. Обобщим предыдущий пример. Пусть G – произвольный неориентированный граф без петель, V_G – множество его вершин, E_G – множество его ребер, и каждому ребру e из E_G приписан некоторый вес $w(e) \geq 0$.

Выделим из всех вершин графа G некоторую вершину $\mathbf{o}$; будем называть вершину $\mathbf{o}$ корнем.

Для любого пути в графе G определим его вес как сумму весов ребер, входящих в этот путь. Путь, соединяющий две вершины, назовем минимальным, если не существует пути, который бы соединял эти вершины и имел меньший суммарный вес (очевидно, может существовать несколько различных минимальных путей, соединяющих одни и те же вершины).

Определим порядок на множестве вершин V_G, полагая, что соотношение $a < b$ выполняется в том и только в том случае, когда существует хотя бы один минимальный путь, соединяющий вершину b с корнем $\mathbf{o}$, который проходит через вершину a.

Для любого подмножества M множества вершин V_G обозначим через $\phi(M)$ суммарный вес всех ребер, оба конца которых принадлежат M. Легко заметить, что $\phi(M)$ не является мерой на V_G, поскольку для любой вершины a имеет место равенство $\phi(\{a\}) = 0$.

Покажем, что функция $K(a,b)$ на V_G, задаваемая соотношением

$$K(a,b) = \frac{\phi\Big(\mathcal{I}_G(a) \cap \mathcal{I}_G(b)\Big)}{\phi\Big(\mathcal{I}_G(a) \cup \mathcal{I}_G(b)\Big)}, \tag{20}$$

является положительно определенной на V_G.

Будем говорить, что ребро e выходит из вершины a, если оно соединяет вершину a с некоторой вершиной, меньшей a. Определим вес $w(a)$ произвольной вершины a из V_G как сумму всех весов ребер, выходящих из a.

Определим меру γ на V_G, полагая $\gamma(M) = \sum\limits_{a \in M} w(a)$ для любого подмножества M множества V_G.

По определению, для любой вершины a' из идеала $\mathcal{I}_G(a)$ и для любого ребра e, выходящего из a', ребро e будет соединять вершины из $\mathcal{I}_G(a)$. Отсюда получаем, что для любого a из V_G мера γ главного идеала $\mathcal{I}_G(a)$ равна суммарному весу всех ребер, оба конца которых принадлежат $\mathcal{I}_G(a)$, а значит, имеет место равенство $\gamma\Big(\mathcal{I}_G(a)\Big) = \phi\Big(\mathcal{I}_G(a)\Big)$. Тогда из теоремы 2.6 получаем, что функция $K(a,b)$ на V_G, определяемая по формуле (20), является положительно определенной.

Пример 2.5.6. Рассмотрим теперь в качестве примера случай, когда $H = \mathbf{R}_+^n$ – декартова степень упорядоченного множества $\mathbf{R}_+$, а γ – мера Лебега на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, ограниченная на подмножество $\mathbf{R}_+^n$.

Тогда для любого элемента $a = (a_1, \dots, a_n)$ из H имеет место равенство

$$\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big) = \gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big) = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Поскольку для любых элементов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ из H неравенство $a \le b$ имеет место в том и только в том случае, когда $a_i \le b_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, то элемент $a \wedge b$ определяется соотношением

$$a \wedge b = \Big(\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \dots, \min\{a_n, b_n\}\Big).$$

Тогда из теоремы 2.6 получаем, что функция $K(a,b)$ на $\mathbf{R}_+^n$, определяемая по формуле

$$K(a,b) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \min\{a_i, b_i\}}{\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i - \prod_{i=1}^{n} \min\{a_i, b_i\}}, \tag{21}$$

является положительно определенной.

3. Доказательство теоремы 2.1

Пусть $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Для любого частично упорядоченного множества S обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_S$ множество всех монотонно невозрастающих функций на S со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$.

Для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ определим функцию $\Delta J : H \to \overline{\mathbf{R}}$, полагая для любого a из H

$$\Delta J(a) = \sup\Big(\{y \in \mathbf{R} \ : \ (a,y) \in J^c \subset \widehat{H}\} \cup \{-\infty\}\Big).$$

Очевидно, что множество пар $\Big\{(a, \Delta J(a)), \ \ a \in H\Big\}$ является границей замкнутого идеала J^c в топологии $\widehat{H}$, а элемент (a,y) будет принадлежать J^c в том и только в том случае, когда $\Delta J(a) \geq y$.

Кроме того, из определения порядка на $\widehat{H}$ следует, что все функции вида ΔJ будут монотонно невозрастающими.

Отсюда получаем, что отображение Δ задает взаимно однозначное соответствие множества всех замкнутых идеалов $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ и множества $\overline{\mathcal{M}}_H$.

Для любой конечно-аддитивной неотрицательной (возможно, неограниченной) меры ρ на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$ определим неотрицательную функцию $\overline{\rho}$ на $\mathcal{L}(\widehat{H})$, полагая для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$

$$\overline{\rho}(J) = \sup_{\substack{J' \in \mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H}) \\ J' \subset J}} \rho\big(J'\big). \tag{22}$$

Тем самым мы доопределяем ρ на все идеалы ЧУМ $\widehat{H}$. По определению, для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H})$ имеет место равенство $\overline{\rho}(J) = \rho\big(J\big)$.

Обозначим через $\Sigma^c(\widehat{H})$ σ-алгебру на множестве всех замкнутых идеалов ЧУМ $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$, порожденную множеством $\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^c(\widehat{H}))$ всех конечнопорожденных фильтров ЧУМ $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$.

Пусть $\Pi_{\widehat{H}}$ – система всех подмножеств P множества $\widehat{H}$, представимых в виде

$$P = J_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{l} J_i,$$

где l – некоторое натуральное число и $J_0, J_1, \ldots, J_l$ – идеалы из $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

Лемма 3.1. *Пусть S – произвольное множество, $\mathcal{L}$ – некоторая система подмножеств S, содержащая пустое множество и замкнутая относительно пересечений.*

Пусть $\Pi(\mathcal{L})$ – система всех подмножеств P множества S, представимых в виде

$$P = J_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{l} J_i,$$

где l – некоторое натуральное число и $J_0, J_1, \ldots, J_l$ —множества из $\mathcal{L}$.

Тогда $\Pi(\mathcal{L})$ есть полукольцо множеств, содержащее $\mathcal{L}$.

Доказательство. 1. Поскольку пустое множество принадлежит $\mathcal{L}$, то для любого J из $\mathcal{L}$ множество $J = J \setminus \emptyset$ принадлежит $\Pi(\mathcal{L})$, а значит, $\Pi(\mathcal{L})$ содержит $\mathcal{L}$.

По определению, система множеств $\Pi(\mathcal{L})$ является полукольцом в том и только в том случае, когда она замкнута относительно образования пересечений и для любых двух множеств P' и P'' из $\Pi(\mathcal{L})$ разность $P' \setminus P''$ можно представить как объединение попарно непересекающихся множеств из $\Pi(\mathcal{L})$.

Пусть P' и P'' – произвольные множества из $\Pi(\mathcal{L})$,

$$P' = J'_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{l'} J'_i, \quad P'' = J''_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{l''} J''_j. \tag{23}$$

Докажем сначала, что $\Pi(\mathcal{L})$ замкнута относительно образования пересечений.

Из формулы (23) получаем, что имеет место следующее равенство:

$$P' \cap P'' = (J_0' \cap J_0'') \backslash \Big(\bigcup_{i=1}^{l'} J_i' \cup \bigcup_{j=1}^{l''} J_j'' \Big).$$

Тогда, поскольку множество $\mathcal{L}$ замкнуто относительно операции пересечения, то множество $P' \cap P''$ принадлежит $\Pi(\mathcal{L})$.

В силу произвольности множеств P' и P'' отсюда получаем, что $\Pi(\mathcal{L})$ замкнуто относительно операции пересечения.

2. Докажем теперь, что разность $P' \backslash P''$ можно представить как объединение попарно непересекающихся множеств из $\Pi(\mathcal{L})$.

Так как $\mathcal{L}$ замкнуто относительно пересечений, то не ограничивая общности можем считать, что множества $J_1'', \dots, J_{l''}''$ содержатся в J_0''.

Пусть $T = \{1, \dots, l''\}$. Для любого непустого подмножества X множества T определим множество D_X из $\Pi(\mathcal{L})$, полагая

$$D_X = \bigcap_{k \in X} J_k'' \setminus \bigcup_{q \in T \setminus X} J_q''.$$

Определим также подмножество P^* множества S, полагая

$$P^* = (P' \backslash J_0'') \cup \bigcup_{\emptyset \neq X \subset T} (P' \cap D_X).$$

Покажем, что P^* – объединение конечного числа попарно непересекающхся множеств из $\Pi(\mathcal{L})$.

Действительно, по определению, для любых несовпадающих подмножеств X и Y множества T имеет место равенство $D_X \cap D_Y = \emptyset$, и, поскольку множества $J_1'', \dots, J_{l''}''$ содержатся в J_0'', то множество D_X также не пересекается с множеством $P' \backslash J_0''$.

Так как система множеств $\Pi(\mathcal{L})$ замкнута относительно операции пересечения, то для любого подмножества X множества T множество $P' \cap D_X$ принадлежит $\Pi(\mathcal{L})$. Кроме того, множество $P' \backslash J_0'' = J_0' \backslash \Big(\bigcup_{i=1}^{l'} J_i' \cup J_0'' \Big)$ принадлежит $\Pi(\mathcal{L})$ по определению.

Отсюда получаем, что множество P^* является объединением конечного числа попарно непересекающихся множеств из $\Pi(\mathcal{L})$.

Докажем, что $P' \backslash P''$ совпадает с P^*.

Пусть a – произвольный элемент из P''. Тогда из соотношения (23) следует, что элемент a принадлежит J_0'' и не принадлежит ни одному из множеств J_j'', $j = 1, \dots, l''$.

Отсюда вытекает, что элемент a не принадлежит множеству $P'\backslash J_0''$ и не принадлежит ни одному из множеств D_X, $X \subset T$, а значит, множество P'' не пересекается с множеством P^*. Так как P^* содержится в P', то отсюда получаем, что множество P^* содержится в $P'\backslash P''$.

Пусть теперь a – произвольный элемент из $P'\backslash P''$. Тогда из соотношения (23) следует, что или a не принадлежит множеству J_0'', или a принадлежит одному из множеств J_j'', $j = 1, \dots, l''$.

Если a не принадлежит множеству J_0'', то оно принадлежит $P'\backslash J_0''$, а значит, оно принадлежит и множеству P^*.

Если же a принадлежит множеству J_0'', то, определив подмножество $X(a)$ множества T как $X(a) = \{i \in T : \ J_i'' \ni a\}$, получаем, что a принадлежит всем множествам J_j'', $j \in X(a)$, и не принадлежит ни одному из множеств J_j'', $j \in T\backslash X(a)$. Так как множество $X(a)$ будет не пусто, то элемент a принадлежит множеству $P' \cap D_{X(a)}$, а значит, он принадлежит и множеству P^*.

Отсюда получаем, что множество $P'\backslash P''$ содержится в P^*.

Таким образом, мы доказали, что множество $P'\backslash P''$ можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств из $\Pi(\mathcal{L})$.

В силу произвольности множеств P' и P'' из $\Pi(\mathcal{L})$ получаем, что $\Pi(\mathcal{L})$ есть полукольцо множеств.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть ρ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$.*

Тогда существует неотрицательная конечно-аддитивная мера $\widehat{\rho}$ на $\mathcal{A}(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}(\widehat{H})$, такая, что для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ выполняется соотношение $\widehat{\rho}(J) = \overline{\rho}(J)$.

Доказательство.

1. Поскольку по лемме 3.1 $\Pi_{\widehat{H}}$ есть полукольцо множеств, содержащее $\mathcal{L}(\widehat{H})$, $\mathcal{A}(\widehat{H})$ есть минимальная алгебра множеств, содержащая $\mathcal{L}(\widehat{H})$, и $\mathcal{A}(\widehat{H})$ очевидно содержит $\Pi_{\widehat{H}}$, то, чтобы построить искомую меру $\widehat{\rho}$, определим ее сначала на полукольце $\Pi_{\widehat{H}}$, а затем продолжим на всю алгебру $\mathcal{A}(\widehat{H})$.

Определим меру $\widehat{\rho}$ на $\Pi_{\widehat{H}}$ следующим образом:

α) для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ определим $\widehat{\rho}(J)$ так, чтобы выполнялось условие данной леммы, то есть положим

$$\widehat{\rho}(J) \stackrel{df}{=} \overline{\rho}(J) = \sup_{\substack{J' \in \mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H}) \\ J' \subset J}} \rho(J'); \tag{24}$$

β) для любого P из $\Pi_{\widehat{H}}$, если $P = J_0 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} J_i$, то определим $\widehat{\rho}(P)$, полагая

$$\widehat{\rho}(P) = \sum_{A \subset \{1,\dots,l\}} (-1)^{|A|} \widehat{\rho}\Big(J_0 \cap \bigcup_{i \in A} J_i\Big); \tag{25}$$

поскольку множество $\mathcal{L}(\widehat{H})$ замкнуто относительно операции объединения конечного числа идеалов, то значение суммы в правой части данного равенства может быть определено из соотношения (24).

Так как равенство (25) согласуется с принципом включения и исключения, то из определения полукольца множеств $\Pi_{\widehat{H}}$ следует, что значение меры $\widehat{\rho}(P)$ определяется однозначно, а мера $\widehat{\rho}$ конечно-аддитивна на $\Pi_{\widehat{H}}$.

2. Докажем, что мера $\widehat{\rho}$ неотрицательна на $\Pi_{\widehat{H}}$.

Пусть $P = J_0 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} J_i$ – произвольный элемент из $\Pi_{\widehat{H}}$, ε – произвольное положительное число.

Из соотношения (24) следует, что существуют такие J'_0, $J'_1, \dots, J'_l$ из $\mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H})$, что для любого i от 0 до l идеал J'_i содержится в J_i и $|\widehat{\rho}(J_i) - \rho(J'_i)| < \varepsilon$.

Пусть $D_i = J_i \setminus J'_i$. По определению, $\widehat{\rho}(J'_i) = \rho(J'_i)$, а значит, выполняется соотношение

$$|\widehat{\rho}(D_i)| = |\widehat{\rho}(J_i) - \widehat{\rho}(J'_i)| < \varepsilon.$$

Тогда из конечной аддитивности меры $\widehat{\rho}$ получаем, что для любого подмножества A множества $\{1, \dots, l\}$ имеет место неравенство

$$\left| \widehat{\rho}\Big(J_0 \cap \bigcup_{i \in A} J_i\Big) - \rho\Big(J'_0 \cap \bigcup_{i \in A} J'_i\Big) \right| \le \sum_{i=0}^{l} |\widehat{\rho}(D_i)| < 2^{l+1}\varepsilon.$$

Учитывая равенство (25), получаем

$$\Big|\widehat{\rho}(P) - \sum_{A\subset\{1,\dots,l\}} (-1)^{|A|}\rho\Big(J_0'\cap\bigcup_{i\in A} J_i'\Big)\Big| <$$
$$< \varepsilon\cdot\sum_{A\subset\{1,\dots,l\}} 2^{l+1} = \varepsilon\cdot 2^{2l+1}. \tag{26}$$

Пусть $P' = J_0'\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{l} J_i'$. Тогда из принципа включения и исключения следует, что

$$\rho(P') = \sum_{A\subset\{1,\dots,l\}} (-1)^{|A|}\rho\Big(J_0'\cap\bigcup_{i\in A} J_i'\Big).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из соотношения (26) получаем, что $\widehat{\rho}(P)$ и $\rho(P')$ имеют одинаковый знак. С другой стороны, поскольку мера ρ на алгебре $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$ неотрицательна, то $\rho(P')\geq 0$.

Значит, определенная выше мера $\widehat{\rho}$ есть неотрицательная конечно-аддитивная мера на $\Pi_{\widehat{H}}$.

Так как по лемме 3.1 $\Pi_{\widehat{H}}$ есть полукольцо множеств, содержащее $\mathcal{L}(\widehat{H})$, а $\mathcal{A}(\widehat{H})$ есть минимальная алгебра множеств, содержащая $\mathcal{L}(\widehat{H})$, то меру $\widehat{\rho}$ можно продолжить с полукольца $\Pi_{\widehat{H}}$ на алгебру $\mathcal{A}(\widehat{H})$.

Таким образом, мы доказали, что существует неотрицательная конечно-аддитивная мера $\widehat{\rho}$ на $\mathcal{A}(\widehat{H})$, удовлетворяющая соотношению $\widehat{\rho}(J) = \overline{\rho}(J)$ для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

3. Докажем теперь, что мера $\widehat{\rho}$ непрерывна снизу на $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

Для этого достаточно доказать, что для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ имеет место равенство

$$\widehat{\rho}(J) = \sup_{\substack{J'\in\mathcal{L}_0(\widehat{H})\\ J'\subset J^{int}}} \widehat{\rho}(J').$$

Но поскольку для любого идеала J' из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$ имеет место равенство $\widehat{\rho}(J') = \rho(J')$, то достаточно доказать, что для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ имеет место равенство

$$\widehat{\rho}(J) = \sup_{\substack{J'\in\mathcal{L}_0(\widehat{H})\\ J'\subset J^{int}}} \rho(J'). \tag{27}$$

Пусть J – произвольный идеал из $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

Так как мера ρ непрерывна снизу на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, то из равенства (24) вытекает следующее соотношение:

$$\widehat{\rho}(J) = \sup_{\substack{J_1 \in \mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H}) \\ J_1 \subset J}} \rho(J_1) = \sup_{\substack{J_1 \in \mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H}) \\ J_1 \subset J}} \sup_{\substack{J_2 \in \mathcal{L}_0(\widehat{H}) \\ J_2 \subset J_1^{int}}} \rho(J_2). \qquad (28)$$

Так как для любого идеала J_1 из соотношения $J_1 \subset J$ следует $J_1^{int} \subset J^{int}$, то для любого J_1 из $\mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H})$ и любого J_2 из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$ из соотношений $J_1 \subset J$ и $J_2 \subset J_1^{int}$ следует соотношение $J_2 \subset J^{int}$.

С другой стороны, для любого конечного множества $\{(a_i, y_i),\ i = 1, \dots, n\}$ элементов $\widehat{H}$ конечнопорожденный идеал $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a_i, y_i)$ содержится в множестве J^{int} в том и только в том случае, когда все элементы (a_i, y_i) принадлежат открытому множеству J^{int}. Тогда, по определению топологии на $\widehat{H}$, если идеал $J_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a_i, y_i)$ содержится в J^{int}, то для некоторого малого $\varepsilon > 0$ идеал $J_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a_i, y_i + \varepsilon)$ также содержится в J^{int}.

Поскольку любой конечнопорожденный идеал из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$ является объединением главных идеалов, то отсюда получаем, что множество всех идеалов J_2 из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, удовлетворяющих соотношению $J_2 \subset J^{int}$, совпадает с множеством всех идеалов J_2 из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, для которых существует такое J_1 из $\mathcal{L}(\widehat{H}) \cap \mathcal{A}_0(\widehat{H})$, что $J_1 \subset J$ и $J_2 \subset J_1^{int}$.

Тогда правые части равенств (28) и (27) совпадают, а значит, соотношение (27) выполняется для идеала J.

В силу произвольности J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$, отсюда получаем, что мера $\widehat{\rho}$ непрерывна снизу на $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

Таким образом, мы доказали, что существует неотрицательная конечно-аддитивная мера $\widehat{\rho}$ на $\mathcal{A}(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}(\widehat{H})$ и удовлетворяющая соотношению $\widehat{\rho}(J) = \overline{\rho}(J)$ для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть ρ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу* *на* $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$.

Тогда существует σ*-аддитивная вероятностная мера* $\mu(\rho)$ *на* σ*-алгебре* $\Sigma^c(\widehat{H})$, *такая, что для любого* J *из* $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ *имеет место соотношение*

$$\mu(\rho)\Big\{J' \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ J' \supset J\Big\} = \exp\Big(-\overline{\rho}(J)\Big). \tag{29}$$

Доказательство. Поскольку мера ρ является неотрицательной конечно-аддитивной мерой на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывной снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, то по лемме 3.2 существует неотрицательная конечно-аддитивная мера $\widehat{\rho}$ на алгебре множеств $\mathcal{A}(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}(\widehat{H})$ и удовлетворяющая соотношению $\widehat{\rho}(J) = \overline{\rho}(J)$ для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$.

Тогда по следствию из теоремы 4.1 работы [1] существует σ-аддитивная вероятностная мера μ^0 на σ-алгебре Σ^0, порожденной множеством $\mathcal{L}^*(\mathcal{L}(\widehat{H}))$ всех конечнопорожденных фильтров ЧУМ $\mathcal{L}(\widehat{H})$, такая, что для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ имеет место соотношение

$$\mu^0\Big(\mathcal{F}_{\mathcal{L}(\widehat{H})}(J)\Big) = \exp\Big(-\widehat{\rho}(J)\Big).$$

Из определения топологии на $\widehat{H}$ следует, что замыкание любого идеала ЧУМ $\widehat{H}$ есть идеал в $\widehat{H}$, и для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ множество всех идеалов, замыкание которых содержит J, совпадает с главным фильтром $\mathcal{F}_{\mathcal{L}(\widehat{H})}(J^{int})$. Кроме того, поскольку для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ выполнено соотношение $J^{int} = (J^c)^{int}$, то из непрерывности снизу меры $\overline{\rho}$ на $\mathcal{L}(\widehat{H})$ вытекает, что для любого идеала J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ имеет место равенство $\overline{\rho}(J^c) = \overline{\rho}(J)$.

Тогда по теореме 6.1 работы [1] существует мера $\mu(\rho)$ на σ-алгебре $\Sigma^c(\widehat{H})$, такая, что для любого замкнутого идеала J из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ выполняется соотношение

$$\mu(\rho)\Big(\mathcal{F}_{\mathcal{L}^c(\widehat{H})}(J)\Big) = \mu^0\Big(\mathcal{F}_{\mathcal{L}(\widehat{H})}(J)\Big) = \exp\Big(-\widehat{\rho}(J)\Big). \tag{30}$$

Поскольку для любого J из $\mathcal{L}(\widehat{H})$ имеет место равенство $\widehat{\rho}(J) = \overline{\rho}(J)$, то правые части равенств (30) и (29) совпадают.

Отсюда получаем, что мера $\mu(\rho)$ – искомая.

Лемма доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2.1.

1. Поскольку мера ρ есть неотрицательная конечно-аддитивная мера на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, то по лемме 3.3 на σ-алгебре $\Sigma^c(\widehat{H})$ существует σ-аддитивная вероятностная мера $\mu(\rho)$, такая, что для любого J из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ имеет место соотношение

$$\mu(\rho)\Big\{J' \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ J' \supset J\Big\} = \exp\Big(-\overline{\rho}(J)\Big).$$

Определим функцию $f:\ \mathcal{L}^c(\widehat{H}) \times H \to \overline{\mathbf{R}}$, полагая для любого идеала J из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ и для любого a из H

$$f(a, J) \stackrel{df}{=} \Delta J\,(a).$$

Пусть a – произвольный элемент из H. По определению, для любого идеала J из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ и любого действительного числа y неравенство $\Delta J(a) \geq y$ выполняется тогда и только тогда, когда элемент (a, y) принадлежит идеалу J, а это возможно в том и только в том случае, когда J содержит идеал $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a, y)$, порожденный элементом (a, y) из $\widehat{H}$. Отсюда получаем, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned}\Big\{J \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ f(a, J) \geq y\Big\} &= \Big\{J \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ J \supset \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a, y)\Big\} = \\ &= \mathcal{F}_{\mathcal{L}^c(\widehat{H})}\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a, y)\Big).\end{aligned} \tag{31}$$

Пусть $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ – минимальная σ-алгебра на $\overline{\mathbf{R}}$, содержащая борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ и одноэлементные множества $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

Тогда, поскольку σ-алгебра $\Sigma^c(\widehat{H})$ порождена главными фильтрами частично упорядоченного множества $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$, то из соотношения (31) вытекает, что отображение $f(a, \cdot):\ \mathcal{L}^c(\widehat{H}) \to \overline{\mathbf{R}}$ является $\Big(\Sigma^c(\widehat{H}), \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})\Big)$-измеримым.

Тогда, используя вероятностное пространство

$$\Big(\mathcal{L}^c(\widehat{H}), \Sigma^c(\widehat{H}), \mu(\rho)\Big),$$

мы можем построить случайное поле η_ρ на H, полагая, что для любого ω из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ и для любого a из H значение $\eta_\rho(a, \omega)$ случайного поля η_ρ в точке a при элементарном исходе ω задается формулой

$$\eta_\rho(a,\omega) \overset{df}{=} \begin{cases} f(a,\omega), & \text{если} \quad f(a,\omega) \neq \pm\infty; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. Пусть a – произвольный элемент из H. Докажем, что почти для всех ω из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ имеет место равенство $\eta_\rho(a,\omega) = f(a,\omega)$.

По определению η_ρ, для этого достаточно доказать соотношение

$$\mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) = \pm\infty\Big\} = 0. \tag{32}$$

Как было показано выше, для любого y из $\mathbf{R}$ и любого замкнутого идеала J из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ неравенство $\Delta J(a) \geq y$ выполняется в том и только в том случае, когда главный идеал $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)$, порожденный элементом (a,y) из $\widehat{H}$, содержится в J.

Тогда для любого действительного y имеют место равенства

$$\begin{aligned}\mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) = +\infty\Big\} &\leq \mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) \geq y\Big\} = \\ &= \mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ \omega \supset \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)\Big\} = \\ &= \exp\Big(-\overline{\rho}(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y))\Big) = \exp\Big(-Q_{\rho,a}(y)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) = -\infty\Big\} &\leq \\ &\leq 1 - \mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) \geq y\Big\} = \\ &= 1 - \mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ \omega \supset \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)\Big\} = \\ &= 1 - \exp\Big(-\overline{\rho}(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y))\Big) = 1 - \exp\Big(-Q_{\rho,a}(y)\Big).\end{aligned}$$

В силу произвольности y из $\mathbf{R}$ имеют место неравенства

$$\mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) = +\infty\Big\} \leq \lim_{y\to+\infty} \exp\Big(-Q_{\rho,a}(y)\Big),$$

$$\mu(\rho)\Big\{\omega \in \mathcal{L}^c(\widehat{H}) : \ f(a,\omega) = -\infty\Big\} \leq 1 - \lim_{y\to-\infty} \exp\Big(-Q_{\rho,a}(y)\Big).$$

Поскольку по определению функции $Q_{\rho,a}(y)$ имеет место равенство $\lim\limits_{y\to-\infty} Q_{\rho,a}(y) = 0$, а по условию имеет место равенство

$\lim\limits_{y\to+\infty} Q_{\rho,a}(y) = +\infty$, то выполняется соотношение (32), а значит, почти для всех ω из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ имеет место равенство $\eta_\rho(a,\omega) = f(a,\omega)$.

3. Докажем теперь, что случайное поле η_ρ – искомое.

Пусть Λ – произвольное конечное подмножество H, $\mathbf{x}$ – произвольная функция из $\mathbf{R}^\Lambda$.

Как было показано ранее, для любого замкнутого идеала J из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ неравенство $\Delta J(a) \geq \mathbf{x}(a)$ будет иметь место для всех a из Λ в том и только в том случае, когда идеал J содержит все идеалы $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,\mathbf{x}(a))$, $a\in\Lambda$.

Поскольку почти для всех ω из $\mathcal{L}^c(\widehat{H})$ имеет место равенство $\eta_\rho(a,\omega) = f(a,\omega)$, то, учитывая определение идеала $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\eta_\rho(a)\geq\mathbf{x}(a)\ \forall a\in\Lambda\Big\} &= \mu(\rho)\Big\{\omega\in\mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ f(a,\omega)\geq\mathbf{x}(a)\ \forall a\in\Lambda\Big\} = \\ &= \mu(\rho)\Big\{\omega\in\mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ \omega\supset\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,\mathbf{x}(a))\ \forall a\in\Lambda\Big\} = \\ &= \mu(\rho)\Big\{\omega\in\mathcal{L}^c(\widehat{H}):\ \omega\supset\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}\Big\} = \\ &= \exp\Big(-\overline{\rho}(\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x})\Big).\end{aligned}$$

А поскольку множество $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ является конечнопорожденным идеалом, то оно принадлежит и $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, и $\mathcal{L}(\widehat{H})$, а значит, $\overline{\rho}(\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x})$. Тогда выражение в правой части данного равенства совпадает с $g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x})$.

Таким образом, мы доказали, что для случайного поля η_ρ выполняется соотношение (2).

Теорема 2.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2.2

Пусть J – произвольный конечнопорожденный идеал из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$. Тогда существуют такие элементы $(a_1,h_1),\ldots,(a_n,h_n)$ из $\widehat{H}$, что имеет место равенство

$$J = \bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a_i,h_i).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ определим конечнопорожденный идеал J_ε, полагая

$$J_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a_i, h_i - \varepsilon).$$

Поскольку H является $\wedge$-полурешеткой, то для любого подмножества M множества $\{1, \ldots, n\}$ существует решеточное пересечение $\bigwedge_{i \in M} (a_i, h_i)$. А поскольку $\widehat{H} = H \times \mathbf{R}$, то для любого подмножества M множества $\{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\bigwedge_{i \in M} (a_i, h_i) = \Big(\bigwedge_{i \in M} a_i,\ \min_{i \in M} h_i \Big).$$

Пусть $a(M) = \bigwedge_{i \in M} a_i, \quad h(M) = \min_{i \in M} h_i$.

Тогда из принципа включения и исключения получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}\rho(J) &= \sum_{\emptyset \neq M \subset \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|M|+1} \rho\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(\bigwedge_{i \in M} (a_i, h_i)\Big) = \\ &= \sum_{\emptyset \neq M \subset \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|M|+1} Q_{\rho, a(M)}\Big(h(M)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(J_\varepsilon) &= \sum_{\emptyset \neq M \subset \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|M|+1} \rho\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(\bigwedge_{i \in M} (a_i, h_i - \varepsilon)\Big) = \\ &= \sum_{\emptyset \neq M \subset \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|M|+1} Q_{\rho, a(M)}\Big(h(M) - \varepsilon\Big).\end{aligned}$$

В силу непрерывности функции $Q_{\rho, a}$ снизу, из этих равенств вытекает, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \rho(J_\varepsilon) = \rho(J).$$

Но, по определению топологии в $\widehat{H}$, для любого $\varepsilon > 0$ идеал J_ε содержится в J^{int}, а значит,

$$\sup_{\substack{J' \in \mathcal{L}_0(\widehat{H}) \\ J' \subset J^{int}}} \rho(J') \geq \sup_{\varepsilon > 0} \rho(J_\varepsilon) = \rho(J).$$

Так как левая часть данного соотношения не может быть больше $\rho(J)$, то отсюда получаем, что имеет место равенство

$$\sup_{\substack{J' \in \mathcal{L}_0(\widehat{H}) \\ J' \subset J^{int}}} \rho(J') = \rho(J).$$

В силу произвольности идеала J из $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$, мера ρ будет непрерывна снизу на $\mathcal{L}_0(\widehat{H})$.

Теорема 2.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 2.4

Лемма 5.1. *Пусть ρ – произвольная неотрицательная конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$.*

Тогда для произвольного подмножества Λ множества H, замкнутого относительно решеточных пересечений, имеет место равенство

$$g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\sum_{a\in\Lambda}\Big(Q_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset\neq A\subset B(\Lambda;a)}(-1)^{|A|}Q_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a))\Big)\right), \tag{33}$$

где $\bigwedge A = \bigwedge_{a'\in A} a'$ – решеточное пересечение всех элементов из A, а сумма по пустому множеству считается равной нулю.

Доказательство.

1. Определим для любого элемента a из Λ и любого действительного y подмножество $D_\Lambda(a)$ множества H и подмножество $D_\Lambda(a,y)$ множества $\widehat{H}$, полагая

$$D_\Lambda(a) = \mathcal{I}_H(a) \setminus \bigcup_{b\in B(\Lambda,a)} \mathcal{I}_H(b),$$

$$\begin{aligned} D_\Lambda(a,y) &= \{(a',y') \in \widehat{H}:\ a' \in D_\Lambda(a),\ y' \le y\} = \\ &= \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y) \setminus \bigcup_{b\in B(\Lambda,a)} \mathcal{I}_{\widehat{H}}(b,y). \end{aligned}$$

(здесь и далее мы обозначаем через $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)$ главный идеал, порожденный элементом (a,y) из $\widehat{H}$).

Покажем сначала, что для любого a из Λ и для любого действительного y имеет место равенство

$$\rho\Big(D_\Lambda(a,y)\Big) = Q_{\rho,a}(y) + \sum_{\emptyset\neq A\subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q_{\rho,\wedge A}(y). \tag{34}$$

Действительно, из определения $D_\Lambda(a,y)$ и принципа включения и исключения получаем соотношение

$$\rho\Big(D_\Lambda(a,y)\Big) = \rho\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)\Big) + \sum_{\emptyset\neq A\subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} \rho\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(\wedge A,y)\Big).$$

Подставляя в это соотношение определение функции $Q_{\rho,a}(y)$, получаем равенство (34).

2. Пусть $\mathbf{x}$ – произвольная функция из $\mathcal{M}_\Lambda$. Докажем, что выполняется соотношение

$$\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x} = \bigcup_{a\in\Lambda} D_\Lambda(a,\mathbf{x}(a)). \tag{35}$$

По определению,

$$\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x} = \bigcup_{a\in\Lambda} \mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,\mathbf{x}(a)),$$

и так как множество $D_\Lambda(a,\mathbf{x}(a))$ содержится в идеале $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,\mathbf{x}(a))$, то правая часть равенства (35) содержится в $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$.

Значит, чтобы доказать равенство (35), достаточно доказать, что любой элемент из $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ принадлежит одному из множеств $D_\Lambda(a,\mathbf{x}(a))$, $a\in\Lambda$.

Определим для любого элемента a_0 из H, для которого множество $\mathcal{F}_H(a_0)\cap\Lambda$ не пусто, элемент $c_\Lambda(a_0)$ из Λ как решеточное пересечение элементов множества $\mathcal{F}_H(a_0)\cap\Lambda$:

$$c_\Lambda(a_0) = \bigwedge_{a\in\mathcal{F}_H(a_0)\cap\Lambda} a;$$

поскольку множество Λ замкнуто относительно решеточных пересечений, элемент $c_\Lambda(a_0)$ существует и принадлежит Λ.

Из этого определения следует, что $c_\Lambda(a_0)\geq a_0$ и не существует элемента b из Λ, который был бы одновременно больше a_0 и меньше $c_\Lambda(a_0)$.

Отсюда получаем, что для любого a_0 из H элемент a_0 принадлежит идеалу $\mathcal{I}_H\Big(c_\Lambda(a_0)\Big)$ и не принадлежит $\mathcal{I}_H(b)$ для всех b из $B\Big(\Lambda, c_\Lambda(a_0)\Big)$ – а значит, элемент a_0 принадлежит $D_\Lambda\Big(c_\Lambda(a_0)\Big)$.

Пусть теперь (a_0, h) – произвольный элемент из $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$.

По определению $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ существует такой a^* из Λ, что элемент (a_0, h) принадлежит идеалу $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a^*, \mathbf{x}(a^*))$, то есть имеют место неравенства $a_0 \leq a^*$ и $h \leq \mathbf{x}(a^*)$. Но тогда элемент a^* принадлежит множеству $\mathcal{F}_H(a_0) \cap \Lambda$; отсюда следует, что элемент $c = c_\Lambda(a_0)$ будет удовлетворять неравенству $a_0 \leq c \leq a^*$.

Поскольку функция $\mathbf{x}$ принадлежит $\mathcal{M}_\Lambda$, то она является монотонно невозрастающей на Λ, а значит, имеет место неравенство $\mathbf{x}(c) \geq \mathbf{x}(a^*) \geq h$. Тогда, так как a_0 принадлежит $D_\Lambda(c)$, а $h \leq \mathbf{x}(c)$, то по определению множества $D_\Lambda(c, \mathbf{x}(c))$ элемент (a_0, h) принадлежит $D_\Lambda(c, \mathbf{x}(c))$.

В силу произвольности элемента (a_0, h) из $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ отсюда получаем, что множество $\mathbf{Y}_\Lambda\mathbf{x}$ содержится в объединении множеств $D_\Lambda(a, \mathbf{x}(a))$, $a \in \Lambda$, а значит, имеет место равенство (35).

3. Докажем, что для любых несовпадающих элементов a_1 и a_2 из Λ множества $D_\Lambda(a_1)$ и $D_\Lambda(a_2)$ не пересекаются.

Будем доказывать это утверждение от противного. Предположим, что существует элемент a' из H, принадлежащий пересечению $D_\Lambda(a_1) \cap D_\Lambda(a_2)$. Тогда по определению этих множеств a' принадлежит и пересечению идеалов $\mathcal{I}_H(a_1) \cap \mathcal{I}_H(a_2)$. Но тогда, в силу замкнутости множества Λ относительно решеточных пересечений, существует такой элемент $c = a_1 \wedge a_2$, что $\mathcal{I}_H(c) = \mathcal{I}_H(a_1) \cap \mathcal{I}_H(a_2)$, а значит, имеют место неравенства $a' \leq c \leq a_1$ и $a' \leq c \leq a_2$, причем, так как $a_1 \neq a_2$, имеет место или строгое неравенство $c < a_1$, или строгое неравенство $c < a_2$.

Не ограничивая общности, предположим, что выполняется неравенство $c < a_1$. Тогда по определению $B(\Lambda, a_1)$ существует такой элемент b из $B(\Lambda, a_1)$, что c принадлежит $\mathcal{I}_H(b)$. Отсюда следует, что и элемент a' принадлежит $\mathcal{I}_H(b)$, а это противоречит нашему предположению, что a' принадлежит $D_\Lambda(a_1)$.

Значит, предположив, что пересечение $D_\Lambda(a_1) \cap D_\Lambda(a_2)$ непусто, мы пришли к противоречию.

Таким образом, мы доказали, что множества $D_\Lambda(a_1)$ и $D_\Lambda(a_2)$ не пересекаются.

По определению множества $D_\Lambda(a, h)$ отсюда следует, что для любых несовпадающих элементов a_1 и a_2 из Λ и любых действительных чисел h_1 и h_2 множества $D_\Lambda(a_1, h_1)$ и $D_\Lambda(a_2, h_2)$ также не пересекаются.

Тогда из соотношения (35) вытекает, что для любой функции $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство

$$\rho(\mathbf{Y}_\Lambda \mathbf{x}) = \sum_{a\in\Lambda} \rho\Big(D_\Lambda(a, \mathbf{x}(a))\Big).$$

Так как $g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) = \exp\Big(-\rho(\mathbf{Y}_\Lambda \mathbf{x})\Big)$, то, в силу равенства (34), отсюда получаем соотношение (33).

Лемма доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2.4.

1. Пусть Λ – некоторое замкнутое относительно решеточных пересечений конечное подмножество H.

По лемме 5.1, для любого элемента $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство (33):

$$g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\sum_{a\in\Lambda}\Big(Q_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset\neq A\subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a))\Big)\right).$$

Отсюда получаем, что выполняется соотношение 1 теоремы 2.4.

Определим для любого a из Λ возрастающую последовательность замкнутых подмножеств $X_n(a)$ множества $W^{int}_{\rho,a}$, так, чтобы имело место равенство

$$W^{int}_{\rho,a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{int}_n(a)$$

(поскольку в $\mathbf{R}$ есть счетное всюду плотное подмножество, такая последовательность $X_n(a)$ существует).

Определим открытые подмножества U_n в $\mathbf{R}^\Lambda$, полагая

$$U_n = \Big\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^\Lambda :\ \forall a\in\Lambda\ \ \mathbf{x}(a)\in \bigcap_{b\in\mathcal{I}_\Lambda(a)} X^{int}_n(b)\Big\}.$$

По определению, имеют место соотношения $U_n \subset U_{n+1}$ и $U_{\rho,\Lambda} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Отсюда получаем, что для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$

(1) если для всех натуральных n имеет место равенство $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_n\cap\Gamma^{int}} = 0$, то $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_{\rho,\Lambda}\cap\Gamma^{int}} = 0;$

(2) если же для всех натуральных n ограничение $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_n\cap\Gamma^{int}}$ меры $\mu_\Lambda(\rho)$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$, то и ограничение $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_{\rho,\Lambda}\cap\Gamma^{int}}$ также будет абсолютно непрерывно относительно $\lambda_{V(\Gamma)}$, причем для любого n и для любого $\mathbf{x}$ из U_n будет иметь место равенство

$$\frac{d\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_{\rho,\Lambda}\cap\Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathbf{x}) = \frac{d\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_n\cap\Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathbf{x}).$$

Тогда достаточно доказать, что для любого натурального n выполняются следующие два соотношения:

А) для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, не принадлежащей $\mathcal{K}_\Lambda$, имеет место равенство $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{\Gamma^{int}\cap U_n} = 0$;

Б) для любой грани Γ из $\mathcal{K}_\Lambda$ ограничение $\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{\Gamma^{int}\cap U_n}$ меры $\mu_\Lambda(\rho)$ на множество $\Gamma^{int}\cap U_n$ является абсолютно непрерывным на $\Gamma^{int}\cap U_n$ относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на евклидовом пространстве $V(\Gamma)$, причем для любого $\mathbf{x}$ из $\Gamma^{int}\cap U_n$ имеет место соотношение

$$\frac{d\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{U_n\cap\Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_\Lambda(\Gamma) g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) \cdot \prod_{a\in\mathrm{Inf}(k_\Gamma)} \Big(Q'_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset\neq A\subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q'_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a))\Big).$$

2. Докажем, что для любого натурального n имеют место описанные выше соотношения А и Б.

Поскольку по теореме 2.1 на $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство (2), то функция $g_{\rho,\Lambda}$ является инвертированной функцией распределения меры $\mu_\Lambda(\rho)$. Тогда из теоремы 2.3 вытекает, что достаточно доказать, что выполняются следующие три условия:

α) на множестве $\mathcal{M}_\Lambda\cap U_n$ функция $g_{\rho,\Lambda}$ непрерывна;

β) на множестве $\mathcal{M}_\Lambda^{int}\cap U_n$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^{|\Lambda|} g_{\rho,\Lambda}}{\partial \mathbf{e}^\Lambda}$, которая непрерывно продолжается вплоть до границ данного множества;

γ) для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ на множестве $\Gamma^{int} \cap U_n$ существует непрерывная и ограниченная односторонняя производная $\frac{\partial^{|\operatorname{Inf}(k_\Gamma)|} g_{\rho,\Lambda}}{\partial^+ \mathbf{e}^{\operatorname{Inf}(k_\Gamma)}}$, удовлетворяющая равенству

$$\frac{\partial^{|\operatorname{Inf}(k_\Gamma)|} g_{\rho,\Lambda}}{\partial^+ \mathbf{e}^{\operatorname{Inf}(k_\Gamma)}}(\mathbf{x}) = g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) \cdot \prod_{a \in \operatorname{Inf}(k_\Gamma)} \Big(Q'_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset \neq A \subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q'_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a)) \Big). \tag{36}$$

Поскольку для любого a из Λ на множестве $W_{\rho,a}$ существует непрерывная и ограниченная производная $Q'_{\rho,a}$ функции $Q_{\rho,a}$, то на замкнутом множестве $X_n(a)$ производная $Q'_{\rho,a}$ будет еще и ограниченной.

Тогда из соотношения (33) вытекает, что на множестве $\mathcal{M}_\Lambda \cap U_n$ функция $g_{\rho,\Lambda}$ будет непрерывна, а значит, выполняется условие α.

Пусть Γ – произвольная грань конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, $\mathbf{x}$ – произвольный элемент из $\Gamma^{int} \cap U_n$, a – произвольный элемент из $\operatorname{Inf}(k_\Gamma)$.

Так как a принадлежит $\operatorname{Inf}(k_\Gamma)$, то, по лемме 4.2 из второй части статьи, вектор $\mathbf{e}^a$ направлен вовнутрь конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, то есть существует такое действительное $h > 0$, что элемент $\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{e}^a$ принадлежит $\mathcal{M}_\Lambda$.

Так как для любого b из Λ на открытом множестве $X_n^{int}(b)$ существует непрерывная и ограниченная производная $Q'_{\rho,b}$ функции $Q_{\rho,b}$, то для любого c из Λ, $c < a$, на множестве $\bigcap_{b \in \mathcal{I}_\Lambda(a)} X_n^{int}(b)$ существует непрерывная и ограниченная производная $Q'_{\rho,c}$.

Тогда, поскольку равенство (33) имеет место и в точке $\mathbf{x}$, и в точке $\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{e}^a$, и поскольку элемент $\mathbf{x}$ принадлежит множеству U_n, то существует следующий предел:

$$\lim_{h \to +0} \frac{g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{e}^a) - g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x})}{h} = g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) \times \times \Big(Q'_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset \neq A \subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q'_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a)) \Big). \tag{37}$$

Отсюда получаем, что для любого a из $\operatorname{Inf}(k_\Gamma)$ на множестве $\Gamma^{int} \cap U_n$ существует непрерывная и ограниченная односторонняя производная $\frac{\partial g_{\rho,\Lambda}}{\partial^{+}\mathbf{e}^{a}}$, удовлетворяющая равенству

$$\frac{\partial g_{\rho,\Lambda}}{\partial^{+}\mathbf{e}^{a}}(\mathbf{x}) = g_{\rho,\Lambda}(\mathbf{x}) \cdot \Big(Q'_{\rho,a}(\mathbf{x}(a)) + \sum_{\emptyset \neq A \subset B(\Lambda;a)} (-1)^{|A|} Q'_{\rho,\wedge A}(\mathbf{x}(a)) \Big).$$

Повторно дифференцируя, получаем, что на множестве $\Gamma^{int} \cap U_n$ существует непрерывная и ограниченная производная $\frac{\partial^{|\operatorname{Inf}(k_\Gamma)|} g_{\rho,\Lambda}}{\partial^{+}\mathbf{e}^{\operatorname{Inf}(k_\Gamma)}}$, удовлетворяющая равенству (36).

Таким образом, мы доказали, что выполняется условие β.

Возьмем в качестве грани Γ весь конус $\mathcal{M}_\Lambda$. Тогда отношение эквивалентности k_Γ тривиально, все классы эквивалентности данного отношения одноэлементны, а значит, $\operatorname{Inf}(k_\Gamma) = \Lambda$. Отсюда, в силу открытости множества $\mathcal{M}_\Lambda^{int} \cap U_n$ в топологии евклидова пространства $\mathbf{R}^\Lambda$, получаем, что на множестве $\mathcal{M}_\Lambda^{int} \cap U_{\rho,\Lambda}$ существует непрерывная и ограниченная производная $\frac{\partial^{|\Lambda|} g_{\rho,\Lambda}}{\partial \mathbf{e}^\Lambda}$. А поскольку эта производная непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{M}_\Lambda^{int} \cap U_n$, то она непрерывно продолжается вплоть до границ данного множества. Отсюда получаем, что выполняется условие γ.

Таким образом, мы доказали, что для любого натурального n выполняются соотношения А и Б.

Теорема 2.4 доказана.

6. Доказательство теоремы 2.5

Для любых элементов a и b из H определим подмножество $\Lambda(a,b)$ множества H, полагая $\Lambda(a,b) = \{a,b\} \cup \{a \wedge b\}$.

Обозначим через $\mathcal{M}(a,b)$ множество $\mathcal{M}_{\Lambda(a,b)}$ всех монотонно невозрастающих функций на $\Lambda(a,b)$.

Определим также подмножества $V_2(a,b)$, $V_2^{+}(a,b)$, $V_3(a,b)$ и $V_3^{+}(a,b)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}$, полагая

$$\begin{aligned} V_2(a,b) &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\Lambda(a,b)} :\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)\}, \\ V_2^{+}(a,b) &= \{\mathbf{x} \in V_2(a,b) :\ \mathbf{x} > 0\}, \\ V_3(a,b) &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\Lambda(a,b)} :\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b) = \mathbf{x}(a \wedge b)\}, \\ V_3^{+}(a,b) &= \{\mathbf{x} \in V_3(a,b) :\ \mathbf{x} > 0\}. \end{aligned}$$

В случае, когда не вызывает недоразумений, для каких элементов a и b определяются эти множества, мы будем использовать обозначения Λ, V_2, V_2^+, V_3 и V_3^+ вместо $\Lambda(a,b)$, $V_2(a,b)$, $V_2^+(a,b)$, $V_3(a,b)$ и $V_3^+(a,b)$ соответственно.

Если элементы a и b сравнимы, то из соотношения

$$\mathcal{M}(a,b) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\Lambda(a,b)} : \ \mathbf{x}(a) \geq \mathbf{x}(a \wedge b), \ \mathbf{x}(b) \geq \mathbf{x}(a \wedge b)\}$$

следует, что единственной нетривиальной гранью конуса $\mathcal{M}(a,b)$ является множество $V_2(a,b)$, при этом внутренней частью грани $V_2(a,b)$ будет сама грань $V_2(a,b)$. Аналогично, в случае, когда a и b несравнимы, нетривиальными гранями конуса $\mathcal{M}(a,b)$ являются множества

$$\Gamma_0 = \mathcal{M}(a,b), \qquad \Gamma_1 = V_2(a,c) \cap \mathcal{M}(a,b),$$
$$\Gamma_2 = V_2(b,c) \cap \mathcal{M}(a,b) \ \text{ и } \ \Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = V_3(a,b),$$

при этом внутренними частями этих граней будут множества

$$\Gamma_1^{int} = \Gamma_1 \backslash \Gamma_{12} = V_2(a,c) \cap \mathcal{M}(a,b) \backslash V_3(a,b), \quad \Gamma_0^{int} = \mathcal{M}^{int}(a,b),$$
$$\Gamma_2^{int} = \Gamma_2 \backslash \Gamma_{12} = V_2(b,c) \cap \mathcal{M}(a,b) \backslash V_3(a,b), \quad \Gamma_{12}^{int} = \Gamma_{12} = V_3(a,b).$$

(Более детально грани конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ будут изучены в §4 второй части статьи.)

Также для любых элементов a и b из H обозначим через $\nu_{a,b}$ конечномерное распределение $\mu_{\Lambda(a,b)}(\rho_0)$ случайного поля η_{ρ_0}.

Разобьем доказательство теоремы 2.5 на следующие пять лемм.

Лемма 6.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5.

Тогда для любого подмножества Λ множества H конечномерное распределение $\mu_\Lambda(\rho_0)$ случайного поля η_{ρ_0} будет сосредоточено на множестве $\mathbf{R}_+^\Lambda$ и, в частности, для любого a из H с вероятностью единица имеет место неравенство $\eta_{\rho_0}(a) > 0$.

Доказательство. Пусть $J_\mathbf{0} = \{(a,h) \in \widehat{H} : \ h \leq 0\}$ – идеал в $\widehat{H}$. Поскольку для любого конечнопорожденного идеала J', содержащегося в $J_\mathbf{0}$, имеет место равенство $\rho_0(J') = 0$, то, по определению, $\overline{\rho}(J_\mathbf{0}) = 0$.

Тогда $g_{\rho_0}(J_\mathbf{0}) = 1$, а значит, вероятность того, что неравенство $\eta_{\rho_0}(a) \geq \Delta J_\mathbf{0}(a)$ выполняется одновременно для всех a из H, равна единице. А поскольку для любого a из H имеет место $\Delta J_\mathbf{0}(a) = 0$, то отсюда получаем, что реализации случайного поля η_{ρ_0} будут неотрицательны с вероятностью единица.

По определению, для любого a из H инвертированная функция распределения $g_{\rho_0,\{a\}}$ меры $\mu_{\{a\}}(\rho_0)$ вычисляется как

$$g_{\rho_0,\{a\}}(\mathbf{x}) = \exp\Big(-Q_{\rho_0,a}(y)\Big) = \exp\Big(-\max\{\mathbf{x}(a), 0\} \cdot F_\gamma(a)\Big).$$

Тогда, поскольку имеет место соотношение $\lim\limits_{y\to+0} g_{\rho_0,\{a\}}(y) = 1$, то с вероятностью единица случайная величина $\eta_{\rho_0}(a)$ будет строго положительна.

Отсюда также получаем, что для любого подмножества Λ множества H конечномерное распределение $\mu_\Lambda(\rho_0)$ случайного поля η_{ρ_0} будет сосредоточено на множестве $\mathbf{R}_+^\Lambda$.

Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5.

Тогда для любых несовпадающих элементов a и b из H вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a\wedge b)$, вычисляется по формуле (13).

Доказательство.

1. Пусть a и b – произвольные несравнимые элементы из H.

Поскольку элемент $c = a \wedge b$ меньше как элемента a, так и элемента b, то множество $\Lambda = \Lambda(a,b)$ состоит из трех различных элементов, $\Lambda(a,b) = \{a,b,c\}$. Тогда имеет место равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a\wedge b)\Big\} = \nu_{a,b}\Big(V_3(a,b)\Big).$$

Так как $c < a$ и $c < b$, то множество $\mathcal{M}(a,b)$ всех монотонно невозрастающих функций на $\Lambda(a,b)$ определяется как

$$\mathcal{M}(a,b) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\Lambda(a,b)} : \ \mathbf{x}(a) \geq \mathbf{x}(c), \ \mathbf{x}(b) \geq \mathbf{x}(c)\}.$$

Подпространство $V_3(a,b)$ является гранью конуса $\mathcal{M}(a,b)$, при этом отношение эквивалентности $k_{V_3(a,b)}$ имеет ровно один класс, совпадающий со всем множеством $\Lambda(a,b)$. Поскольку $\inf\Lambda(a,b) = \{c\}$, то грань $V_3(a,b)$ принадлежит множеству $\mathcal{K}_{\Lambda(a,b)}$.

Поскольку для любого a из H на множестве $\mathbf{R}_+$ существует непрерывная и ограниченная производная $Q'_{\rho_0,a}(y) = F_\gamma(a)$, а $V_3^+(a,b) = V_3(a,b) \cap \mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$, то по теореме 2.4 ограничение $\nu_{a,b}\Big|_{V_3^+(a,b)}$ меры $\nu_{a,b}$ является абсолютно непрерывным на $V_3^+(a,b)$

относительно меры Лебега $\lambda_{V_3(a,b)}$, причем для любого $\mathbf{x}$ из $V_3^+(a,b)$ имеет место соотношение

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_3^+(a,b)}}{d\lambda_{V_3(a,b)}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{\Lambda(a,b)}\Big(V_3(a,b)\Big)Q'_{\rho_0,c}(\mathbf{x}(c)) \cdot g_{\rho_0,\Lambda(a,b)}(\mathbf{x}). \qquad (38)$$

По теореме 2.4 для любого $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}(a,b)$ инвертированная функция распределения $g_{\rho_0,\Lambda(a,b)}$ вычисляется как

$$g_{\rho_0,\Lambda(a,b)}(\mathbf{x}) = \exp\Big(-\Big(F_\gamma(a) - F_\gamma(c)\Big)\max\{\mathbf{x}(a),0\} -$$
$$-\Big(F_\gamma(b) - F_\gamma(c)\Big)\max\{\mathbf{x}(b),0\} - F_\gamma(c)\max\{\mathbf{x}(c),0\}\Big).$$

Тогда, поскольку для любого $\mathbf{x}$ из $V_3(a,b)$ имеет место соотношение $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b) = \mathbf{x}(c) > 0$, а $\mathbf{q}_{\Lambda(a,b)}\Big(V_3^+(a,b)\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то соотношение (38) можем переписать в виде

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_3^+(a,b)}}{d\lambda_{V_3(a,b)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{3}}F_\gamma(c) \cdot \exp\Big(-\mathbf{x}(c)\Big(F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(c)\Big)\Big).$$

Но так как для любого a' из H с вероятностью единица случайная величина $\eta_{\rho_0}(a')$ строго положительна, то мера $\nu_{a,b}$ будет сосредоточена на множестве $\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$, а значит, выполняется следующая цепочка равенств:

$$\nu_{a,b}\Big(V_3(a,b)\Big) = \nu_{a,b}\Big(V_3^+(a,b)\Big) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{V_3^+(a,b)} F_\gamma(c) \cdot \exp\Big(-\mathbf{x}(c)\Big(F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(c)\Big)\Big)\, d\lambda_{V_3(a,b)} =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} F_\gamma(c) \cdot \exp\Big(-y\Big(F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(c)\Big)\Big)\, dy =$$
$$= \frac{F_\gamma(c)}{F_\gamma(a) + F_\gamma(b) - F_\gamma(c)}.$$

Таким образом, мы доказали, что для любых несравнимых элементов a и b из H вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a \wedge b)$, вычисляется по формуле (13).

2. Пусть теперь $a < b$ – произвольные элементы из H. Докажем, что и в этом случае вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a \wedge b)$, вычисляется по формуле (13).

Так как $a < b$, то $a \wedge b = a$, множество $\Lambda(a,b)$ состоит из двух элементов и $V_3(a,b) = V_2(a,b)$, а значит, имеет место равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_{\rho_0}(a) = \eta_{\rho_0}(b) = \eta_{\rho_0}(a \wedge b)\Big\} = \nu_{a,b}\Big(V_2(a,b)\Big).$$

Так как множество $\mathcal{M}(a,b)$ всех монотонно невозрастающих функций на $\Lambda(a,b)$ имеет вид

$$\mathcal{M}(a,b) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\Lambda(a,b)} : \ \mathbf{x}(a) \geq \mathbf{x}(b)\},$$

то подпространство $V_2(a,b)$ является гранью конуса $\mathcal{M}(a,b)$, при этом отношение эквивалентности $k_{V_2(a,b)}$ имеет ровно один класс, совпадающий со всем множеством $\Lambda(a,b)$. А поскольку $\inf \Lambda(a,b) = \{a\}$, то грань $V_2(a,b)$ принадлежит множеству $\mathcal{K}_{\Lambda(a,b)}$.

Поскольку для любого a из H на множестве $\mathbf{R}_+$ существует непрерывная и ограниченная производная $Q'_{\rho_0,a}(y) = F_\gamma(a)$, а $V_2^+(a,b) = V_2(a,b) \cap \mathbf{R}_+$, то по теореме 2.4 ограничение $\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,b)}$ меры $\nu_{a,b}$ является абсолютно непрерывным на $V_2^+(a,b)$ относительно меры Лебега $\lambda_{V_2(a,b)}$, причем для любого $\mathbf{x}$ из $V_2^+(a,b)$ имеет место соотношение

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,b)}}{d\lambda_{V_2(a,b)}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{\Lambda(a,b)}\Big(V_2(a,b)\Big)Q'_{\rho_0,a}(\mathbf{x}(a)) \cdot g_{\rho_0,\Lambda(a,b)}(\mathbf{x}). \qquad (39)$$

По теореме 2.4 для любого $\mathbf{x}$ из $\mathcal{M}(a,b)$ инвертированная функция распределения $g_{\rho_0,\Lambda(a,b)}$ вычисляется как

$$g_{\rho_0,\Lambda(a,b)}(\mathbf{x}) = \exp\Big(-\Big(F_\gamma(b) - F_\gamma(a)\Big)\max\{\mathbf{x}(b),0\} - \\ - F_\gamma(a)\max\{\mathbf{x}(a),0\} \Big).$$

Тогда, поскольку для любого $\mathbf{x}$ из $V_2(a,b)$ имеет место соотношение $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b) > 0$, а $\mathbf{q}_{\Lambda(a,b)}(V_2^+(a,b)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то соотношение (39) мы можем переписать в виде

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,b)}}{d\lambda_{V_2(a,b)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}F_\gamma(a) \cdot \exp\Big(-\mathbf{x}(b)F_\gamma(b)\Big).$$

Но так как для любого a' из H с вероятностью единица случайная величина $\eta_{\rho_0}(a')$ строго положительна, то мера $\nu_{a,b}$ будет сосредоточена на множестве $\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$, а значит, выполняется следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\nu_{a,b}\Big(V_2(a,b)\Big) = \nu_{a,b}\Big(V_2^+(a,b)\Big) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{V_2^+(a,b)} F_\gamma(a)\cdot\exp\Big(-\mathbf{x}(b)F_\gamma(b)\Big)\,d\lambda_{V_2(a,b)} = \\ &= \int\limits_0^{+\infty} F_\gamma(a)\cdot\exp\Big(-yF_\gamma(b)\Big)\,dy = \\ &= \frac{F_\gamma(a)}{F_\gamma(b)} = \frac{F_\gamma(a\wedge b)}{F_\gamma(a)+F_\gamma(b)-F_\gamma(a\wedge b)}.\end{aligned}$$

А значит, для элементов $a<b$ из H вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a)=\eta_{\rho_0}(b)=\eta_{\rho_0}(a\wedge b)$, также вычисляется по формуле (13).

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть выполняются условия теоремы 2.5.*

Тогда для любых несовпадающих элементов a и b из H вероятность того, что имеет место равенство $\eta_{\rho_0}(a)=\eta_{\rho_0}(b)\neq\eta_{\rho_0}(a\wedge b)$, равна нулю.

Доказательство. Пусть a и b – произвольные несовпадающие элементы из H.

Очевидно, в случае, если элементы a и b сравнимы, соотношение $\eta_{\rho_0}(a)=\eta_{\rho_0}(b)\neq\eta_{\rho_0}(a\wedge b)$ выполняться не может, поскольку элемент $a\wedge b$ совпадает или с элементом a, или с элементом b.

Пусть элементы a и b несравнимы.

Определим подмножество V^* множества $V_2(a,b)$, полагая $V^* = V_2(a,b)\backslash V_3(a,b)$. Тогда имеет место равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_{\rho_0}(a)=\eta_{\rho_0}(b)\neq\eta_{\rho_0}(a\wedge b)\Big\} = \nu_{a,b}(V^*).$$

Так как мера $\nu_{a,b}$ сосредоточена на множестве $\mathcal{M}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$, то

$$\nu_{a,b}(V^*) = \nu_{a,b}\Big(V^*\cap\mathcal{M}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}\Big).$$

По определению $\mathcal{M}(a,b)$ множество $V^* \cap \mathcal{M}(a,b)$ содержится в $\mathcal{M}^{int}(a,b)$. С другой стороны, по теореме 2.4 ограничение меры $\nu_{a,b}$ на множество $\mathcal{M}^{int}(a,b) \cap \mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}}$ на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}$.

Но так как множество V^* содержится в двумерном подпространстве $V_2(a,b)$ трехмерного евклидового пространства $\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}$, то $\lambda_{\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}}(V^*) = 0$.

Тогда, в силу абсолютной непрерывности ограничения меры $\nu_{a,b}$ на множество $\mathcal{M}^{int}(a,b) \cap \mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$, отсюда вытекает равенство

$$\nu_{a,b}(V^*) = \nu_{a,b}\Big(V^* \cap \mathcal{M}(a,b) \cap \mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}\Big) = \nu_{a,b}\Big|_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}\Big(V^*\Big) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.4. *Пусть выполняются условия теоремы 2.5.*

Тогда для любого элемента a из H математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\eta_{\rho_0}(a)$ вычисляются по формулам (10) и (11) соответственно.

Доказательство. Пусть a – произвольный элемент из H.

Будем отождествлять множество $\mathbf{R}^a$ с множеством действительных чисел $\mathbf{R}$. Тогда конечномерное распределение $\mu_{\{a\}}(\rho_0)$ будет являться мерой, задающей случайную величину $\eta_{\rho_0}(a)$.

По определению, инвертированная функция распределения $g_{\rho_0,\{a\}}$ меры $\mu_{\{a\}}(\rho_0)$ вычисляется как

$$g_{\rho_0,\{a\}}(y) = \exp\Big(-Q_{\rho_0,a}(y)\Big) = \exp\Big(-\max\{y,0\}\cdot F_\gamma(a)\Big).$$

Тогда, поскольку $g_{\rho_0,\{a\}}$ есть инвертированная функция распределения меры $\mu_{\{a\}}(\rho_0)$, на множестве $\mathbf{R}_+$ функция $g_{\rho_0,\{a\}}$ ограничена и непрерывно дифференцируема, а, как было показано выше, мера $\mu_{\{a\}}(\rho_0)$ сосредоточена на множестве $\mathbf{R}_+$, то математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta_{\rho_0}(a)$ можно вычислить как

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a) = \int_0^{+\infty} y d\mu_{\{a\}}(\rho_0) = \int_0^{+\infty} y\Big(-g'_{\rho_0,\{a\}}(y)\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} yF_\gamma(a)\cdot\exp\Big(-yF_\gamma(a)\Big)\,dy = \frac{1}{F_\gamma(a)},$$

$$\mathbf{D}\eta_{\rho_0}(a) = \int_0^{+\infty} y^2 d\mu_{\{a\}}(\rho_0) - \Big(\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\Big)^2 =$$

$$= \int_0^{+\infty} y^2\Big(-g'_{\rho_0,\{a\}}(y)\Big)\,dy - \frac{1}{F_\gamma(a)^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty} y^2 F_\gamma(a)\cdot\exp\Big(-yF_\gamma(a)\Big)\,dy - \frac{1}{F_\gamma(a)^2} =$$

$$= F_\gamma(a)\cdot\frac{2}{F_\gamma(a)^3} - \frac{1}{F_\gamma(a)^2} = \frac{1}{F_\gamma(a)^2}.$$

Отсюда получаем, что выполняются соотношения (10) и (11).

Лемма доказана.

Лемма 6.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5.

Тогда для любых несовпадающих элементов a и b из H корреляционная функция $K(a,b)$ случайного поля η_{ρ_0} вычисляется по формуле (12).

Доказательство. 1. Пусть a и b – произвольные несовпадающие элементы из H.

По определению, корреляционная функция $K(a,b)$ случайного поля η_{ρ_0} вычисляется по формуле

$$K(a,b) = \frac{\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\eta_{\rho_0}(b) - \mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(b)}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_{\rho_0}(a)\mathbf{D}\eta_{\rho_0}(b)}}.$$

Используя доказанные выше соотношения (10) и (11), получаем, что достаточно доказать следующее равенство:

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\eta_{\rho_0}(b) = \frac{F_\gamma(a)+F_\gamma(b)}{F_\gamma(a)F_\gamma(b)\Big(F_\gamma(a)+F_\gamma(b)-F_\gamma(a\wedge b)\Big)}.$$

Докажем сначала это равенство в случае, когда элементы a и b сравнимы. Пусть, например, $a < b$.

Поскольку $a \wedge b = a$, то соотношение (40) принимает в этом случае следующий вид:

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\eta_{\rho_0}(b) = \frac{F_\gamma(a) + F_\gamma(b)}{F_\gamma(a)F_\gamma^2(b)}.$$

Как было показано в лемме 6.1, конечномерное распределение $\nu_{a,b}$ случайного поля η_{ρ_0} на $\Lambda(a,b)$ сосредоточено на $\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$. Тогда, используя теорему 2.4, получаем, что мера $\nu_{a,b}$ представляется в виде суммы

$$\nu_{a,b} = \nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,b)} + \nu_{a,b}\Big|_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}},$$

при этом мера $\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,b)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V_2(a,b)}$ с плотностью

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,b)}}{d\lambda_{V_2(a,b)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}F_\gamma(a)\cdot\exp\Big(-\mathbf{x}(b)F_\gamma(b)\Big),$$

а мера $\nu_{a,b}\Big|_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}}$ с плотностью

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}}{d\lambda_{\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}}}(\mathbf{x}) = F_\gamma(a)\Big(F_\gamma(b) - F_\gamma(a)\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(-\mathbf{x}(a)F_\gamma(a) - \mathbf{x}(b)(F_\gamma(b) - F_\gamma(a))\Big).$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\eta_{\rho_0}(b) = \int\limits_{V_2^+(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)d\nu_{a,b}(\mathbf{x}) + \int\limits_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)d\nu_{a,b}(\mathbf{x}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}F_\gamma(a)\cdot\int\limits_{V_2^+(a,b)}\mathbf{x}(a)^2\exp\Big(-F_\gamma(b)\mathbf{x}(b)\Big)d\lambda_{V_2(a,b)}(\mathbf{x}) +$$
$$+F_\gamma(a)\Big(F_\gamma(b) - F_\gamma(a)\Big)\times$$

$$\times \int\limits_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}} \mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)\exp\Big(-F_\gamma(a)\mathbf{x}(a)-(F_\gamma(b)-F_\gamma(a))\mathbf{x}(b)\Big)d\lambda_{\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}}(\mathbf{x}) =$$

$$= F_\gamma(a)\cdot\int\limits_0^{+\infty} x^2\exp\Big(-F_\gamma(b)x\Big)dx +$$

$$+F_\gamma(a)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(a)\Big)\int\limits_0^{+\infty}dx_1\int\limits_0^{x_1}x_1x_2\exp\Big(-F_\gamma(a)x_1-(F_\gamma(b)-F_\gamma(a))x_2\Big)dx_2 =$$

$$= \frac{2F_\gamma(a)}{F_\gamma^3(b)} + \frac{\Big(F_\gamma(b)+2F_\gamma(a)\Big)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(a)\Big)}{F_\gamma^3(b)F_\gamma(a)} =$$

$$= \frac{F_\gamma(b)+F_\gamma(a)}{F_\gamma^2(b)F_\gamma(a)}.$$

Таким образом, мы доказали, что выполняется соотношение (40).

Отсюда получаем, что в случае, когда $a < b$, корреляционная функция $K(a,b)$ вычисляется по формуле (12).

2. Докажем теперь равенство (40) в случае, когда элементы a и b несравнимы. Пусть $c = a \wedge b$.

Поскольку конус $\mathcal{M}(a,b)$ в этом случае описывается соотношением

$$\mathcal{M}(a,b) = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\Lambda(a,b)}:\ \mathbf{x}(a)\geq\mathbf{x}(c),\ \mathbf{x}(b)\geq\mathbf{x}(c)\},$$

то гранями конуса $\mathcal{M}(a,b)$ будут множества

$$\Gamma_0 = \mathcal{M}(a,b),\ \ \Gamma_1 = V_2(a,c),\ \ \Gamma_2 = V_2(b,c)\ \ \text{и}\ \ \Gamma_{12} = \Gamma_1\cap\Gamma_2 = V_3(a,b),$$

при этом внутренними частями этих граней будут множества

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1^{int} = \Gamma_1\backslash\Gamma_{12} = V_2(a,c)\backslash V_3(a,b), & \Gamma_0^{int} = \mathcal{M}^{int}(a,b), \\ \Gamma_2^{int} = \Gamma_2\backslash\Gamma_{12} = V_2(b,c)\backslash V_3(a,b) & \Gamma_{12}^{int} = \Gamma_{12} = V_3(a,b) \end{array}.$$

Как было показано в лемме 6.1, конечномерное распределение $\nu_{a,b}$ случайного поля η_{ρ_0} на $\Lambda(a,b)$ сосредоточено на $\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$.

Положим для любых положительных x_1, x_2, x_3

$$g\Big(x_1,x_2,x_{12}\Big) = \exp\Big(-F_\gamma(c)x_{12}-(F_\gamma(a)-F_\gamma(c))x_1-(F_\gamma(b)-F_\gamma(c))x_2\Big).$$

Тогда, используя теорему 2.4, получаем, что мера $\nu_{a,b}$ представляется в виде суммы

$$\nu_{a,b}=\nu_{a,b}\Big|_{\Gamma_0^{int}\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}+\nu_{a,b}\Big|_{\Gamma_1^{int}\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}+\nu_{a,b}\Big|_{\Gamma_2^{int}\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}+\nu_{a,b}\Big|_{\Gamma_{12}^{int}\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}=$$
$$=\nu_{a,b}\Big|_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}+\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,c)\setminus V_3(a,b)}+\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(b,c)\setminus V_3(a,b)}+\nu_{a,b}\Big|_{V_3^+(a,b)},$$

при этом мера $\nu_{a,b}\Big|_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}$ и ее плотность в любой точке $\mathbf{x}$ из $\Gamma_0^{int}\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}$ равна

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{\Gamma_0^{int}\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}}{d\lambda_{\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}}(\mathbf{x})=$$
$$=\mathbf{q}(\Gamma_0)F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(a)-F_\gamma(c)\Big)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(c)\Big)\cdot g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big),$$

мера $\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,c)\setminus V_3(a,b)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V_2(a,c)}$ и ее плотность в любой точке $\mathbf{x}$ из $V_2^+(a,c)\setminus V_3(a,b)$ равна

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(a,c)\setminus V_3(a,b)}}{d\lambda_{V_2(a,c)}}(\mathbf{x})=\mathbf{q}(\Gamma_1)F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(c)\Big)\cdot g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big),$$

мера $\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(b,c)\setminus V_3(a,b)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V_2(b,c)}$ и ее плотность в любой точке $\mathbf{x}$ из $V_2^+(b,c)\setminus V_3(a,b)$ равна

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_2^+(b,c)\setminus V_3(a,b)}}{d\lambda_{V_2(a,c)}}(\mathbf{x})=\mathbf{q}(\Gamma_2)F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(a)-F_\gamma(c)\Big)\cdot g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big),$$

и мера $\nu_{a,b}\Big|_{V_3^+(a,b)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V_3(a,b)}$ и ее плотность в любой точке $\mathbf{x}$ из $V_3^+(a,b)$ равна

$$\frac{d\nu_{a,b}\Big|_{V_3^+(a,b)}}{d\lambda_{V_3(a,b)}}(\mathbf{x})=\mathbf{q}(\Gamma_{12})F_\gamma(c)\cdot g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big),$$

где $\mathbf{q}(\Gamma_0)=1$, $\mathbf{q}(\Gamma_1)=\mathbf{q}(\Gamma_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{q}(\Gamma_{12})=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Отсюда получаем, что имеет место равенство

$$\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\eta_{\rho_0}(b)=\int\limits_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)d\nu_{a,b}(\mathbf{x})+\int\limits_{V_2^+(a,c)\setminus V_3(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)d\nu_{a,b}(\mathbf{x})+$$

$$+\int\limits_{V_2^+(b,c)\setminus V_3(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)d\nu_{a,b}(\mathbf{x})+\int\limits_{V_3^+(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)d\nu_{a,b}(\mathbf{x})=$$

$$=F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(a)-F_\gamma(c)\Big)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(c)\Big)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathcal{M}^{int}(a,b)\cap\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big)d\lambda_{\mathbf{R}_+^{\Lambda(a,b)}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(c)\Big)\cdot\int\limits_{V_2^+(a,c)\setminus V_3(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big)d\lambda_{V_2(a,c)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(a)-F_\gamma(c)\Big)\cdot\int\limits_{V_2^+(b,c)\setminus V_3(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big)d\lambda_{V_2(b,c)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}F_\gamma(c)\cdot\int\limits_{V_3^+(a,b)}\mathbf{x}(a)\mathbf{x}(b)g\Big(\mathbf{x}(a),\mathbf{x}(b),\mathbf{x}(c)\Big)d\lambda_{V_3(a,b)}=$$

$$=F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(a)-F_\gamma(c)\Big)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(c)\Big)\cdot\int\limits_0^{+\infty}dx_3\int\limits_0^{x_3}dx_1\int\limits_0^{x_3}x_1x_2g(x_1,x_2,x_3)dx_2+$$

$$+F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(b)-F_\gamma(c)\Big)\cdot\int\limits_0^{+\infty}dx_2\int\limits_0^{x_2}x_1x_2g(x_1,x_2,x_1)dx_1+$$

$$+F_\gamma(c)\Big(F_\gamma(a)-F_\gamma(c)\Big)\cdot\int\limits_0^{+\infty}dx_1\int\limits_0^{x_1}x_1x_2g(x_1,x_2,x_2)dx_2+$$

$$+F_\gamma(c)\cdot\int\limits_0^{+\infty}x^2g(x,x,x)dx.$$

Вычисляя вложенные интегралы в правой части этого равенства и приводя подобные, получаем, что математическое ожидание $\mathbf{M}\eta_{\rho_0}(a)\eta_{\rho_0}(b)$ удовлетворяет соотношению (40).

Отсюда получаем, что и в случае когда элементы a и b несравнимы, корреляционная функция $K(a,b)$ случайного поля η_{ρ_0} вычисляется по формуле (12).

Лемма доказана.

7. Доказательство теоремы 2.6

Так как конечно-аддитивная мера γ определена и конечна на всех главных идеалах ЧУМ H, то она также определена и конечна на всех множествах из алгебры $\mathcal{A}_0(H)$, порождаемой главными идеалами.

Докажем сначала теорему 2.6 в случае, когда H – $\wedge$-полурешетка.

Определим $\lambda_+ = \lambda\Big|_{\mathbf{R}_+}$ – ограничение меры Лебега λ на $\mathbf{R}_+$, и $\rho_0 = \gamma \times \lambda_+$ – меру на $\mathcal{B}(\widehat{H})$, являющуюся прямым произведением меры γ на $\mathcal{A}_0(H)$ и меры λ_+ на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Тогда, поскольку корреляционная функция случайного поля всегда положительно определена, то непосредственно из утверждения 2 теоремы 2.5 вытекает, что в случае, когда H – $\wedge$-полурешетка, функция $K_\gamma(a,b)$, задаваемая формулой (15), является положительно определенной.

Рассмотрим теперь случай, когда частично упорядоченное множество H не является $\wedge$-полурешеткой.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{A}_0(H) \cap \mathcal{L}_0(H)$. Очевидно, для всех идеалов I из $\mathcal{L}$ мера $\gamma(I)$ определена и конечна.

По определению, множество $\mathcal{L}$ замкнуто относительно образования объединений и пересечений. Кроме того, множество $\mathcal{L}$ является частично упорядоченным по отношению включения, при этом для любых идеалов I_1 и I_2 из $\mathcal{L}$ имеет место равенство $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$, а значит, множество $\mathcal{L}$ является $\wedge$-полурешеткой.

Определим отображение $\varphi:\ H \to \mathcal{L}$, для любого a из H полагая $\varphi(a) \stackrel{df}{=} \mathcal{I}_H(a)$.

Тогда для любого идеала I из $\mathcal{L}$ имеет место равенство

$$\Big\{a \in H:\ \varphi(a) \in \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(I)\Big\} = \{a \in H:\ \varphi(a) \subset I\} = \{a \in H:\ \mathcal{I}_H(a) \subset I\} = I. \quad (41)$$

Поскольку алгебра множеств $\mathcal{A}_0(\mathcal{L})$ порождается главными идеалами ЧУМ $\mathcal{L}$, то отображение φ является $(\mathcal{A}_0(H), \mathcal{A}_0(\mathcal{L}))$-измеримым.

Определим на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\mathcal{L})$ конечно-аддитивную меру ϑ как образ меры γ при отображении φ, тем самым для любого множества M из $\mathcal{A}_0(\mathcal{L})$ полагаем

$$\vartheta(M) \stackrel{df}{=} \gamma\Big(\{a \in H:\ \varphi(a) \in M\}\Big).$$

По определению, мера ϑ является конечно-аддитивной и неотрицательной на $\mathcal{L}$, при этом из формулы (41) получаем, что для любого I из $\mathcal{L}$ имеет место равенство $\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(I)\Big) = \gamma(I)$.

Определим функцию $K_\vartheta(I,J)$ на $\mathcal{L}$, полагая для любых I и J из $\mathcal{L}$

$$K_\vartheta(I,J) = \frac{\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(I) \cap \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J)\Big)}{\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(I) \cup \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J)\Big)}.$$

Так как $\mathcal{L}$ есть $\wedge$-полурешетка, а ϑ – неотрицательная конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(\mathcal{L})$, то, как было показано выше, функция $K_\vartheta(I,J)$ является положительно определенной на $\mathcal{L}$.

Пусть a и b – произвольные элементы из H, $J_a = \mathcal{I}_H(a)$ и $J_b = \mathcal{I}_H(b)$ – идеалы из $\mathcal{L}$.

Тогда, поскольку для любого I из $\mathcal{L}$ имеет место равенство $\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(I)\Big) = \gamma(I)$, то выполняется соотношение

$$K_\vartheta(J_a,J_b) = \frac{\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_a) \cap \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_b)\Big)}{\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_a) \cup \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_b)\Big)} =$$

$$= \frac{\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_a \cap J_b)\Big)}{\vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_a)\Big) + \vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_b)\Big) - \vartheta\Big(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(J_a \cap J_b)\Big)} =$$

$$= \frac{\gamma(J_a \cap J_b)}{\gamma(J_a) + \gamma(J_b) - \gamma(J_a \cap J_b)} = \frac{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cap \mathcal{I}_H(b)\Big)}{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cup \mathcal{I}_H(b)\Big)} = K_\gamma(a,b).$$

Отсюда получаем, что для любых элементов a и b из множества H имеет место равенство $K_\gamma(a,b) = K_\vartheta\Big(\mathcal{I}_H(a), \mathcal{I}_H(b)\Big)$, а значит, функция $K_\gamma(a,b)$ является положительно определенной на H.

Теорема 2.6. доказана.

Литература

1. М. А. Антонец, И. А. Шерешевский, *Безгранично делимые распределения вероятностей на решетках.* — Алгебра и анализ **5**, вып. 6 (1993), 39–68.
2. Г. Биркгоф, *Теория решеток.* — М., Наука (1984).
3. А. Бренстед, *Введение в теорию выпуклых многогранников.* — М., Мир (1988).
4. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов, *Многогранники, графы, оптимизация.* — М., Наука (1981).

5. А. Схрейвер, *Теория линейного программирования и целочисленного линейного программирования.* — М., Мир (1991).
6. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* — М., Наука (1987).

Beinenson L. B. Monotone nonincreasing random fields on posets. I.

For an arbitrary poset H and measure ρ on $H \times \mathbf{R}$ (where $\mathbf{R}$ is the real axis), we construct a monotone decreasing stochastic field η_ρ and calculate finite-dimensional distributions of the field. In the case where H is a $\wedge$-semilattice and the measure ρ satisfies additional conditions, we calculate characteristics of the field η_ρ such as the expectation of the field value at a point, variance of the field value at a point, and correlation function of the field.

The described construction for random fields gives a new method for constructing positively defined functions on posets.

Нижегородское агенство
наукоемких технологий

Поступило 7 июля 2003 г.

E-mail: LeonidBLB@nant.appl.sci-nnov.ru