Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. О. Мантуров

О РАСПОЗНАВАНИИ ВИРТУАЛЬНЫХ КОС

§1. Введение

Начнем с введения основных определений и обозначений (определения можно найти также в [6]).

Определение 1. *Диаграммой виртуальной косы из n нитей будем называть множество гладких кривых (нитей) на плоскости Oxy, идущих от прямой $y = 0$ к прямой $y = 1$ и не имеющих горизонтальных касательных, таких, что:*

1. *концы линий образуют множество $(i, 0), (j, 1), i, j = 1, \ldots, n$; никакие две нити не имеют общих концов;*
2. *никакие две нити не имеют точек касания;*
3. *не существует сложных (тройных, четверных и т.д.) точек пересечения нитей: все точки пересечения являются двойными; количество таких точек конечно.*

Кроме того, в каждом пересечении (перекрестке) устанавливается следующая структура. Перекресток является либо *классическим*, т.е. в нем сказано, какая нить идет выше (образует переход), а какая – ниже (образует проход), см. рис. 1а, либо *виртуальным*. Виртуальные перекрестки помечаются кружочком, см. рис. 1б.

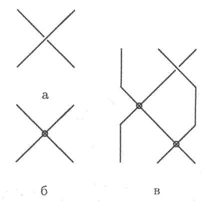

Рис. 1. а) Перекресток; б) виртуальный перекресток; в) диаграмма виртуальной косы.

Если при этом каждые две различные точки пересечения нитей имеют различные ординаты, то диаграмма называется *регулярной*.

Пример диаграммы виртуальной косы показан на рис. 1в.

Замечание 1. В дальнейшем будем обозначать число нитей виртуальной косы через n, если не оговорено противное.

Определение 2. *Назовем виртуальной косой класс эквивалентности диаграмм виртуальных кос относительно следующих преобразований:*

1. *непрерывных деформаций в классе диаграмм (быть может, не регулярных) виртуальных кос;*
2. *классических и виртуальных вариантов* II *преобразования Райдемайстера, см. рис. 2.*
3. *классического, полуклассического и виртуального вариантов* III *преобразования Райдемайстера, см. рис. 3.*

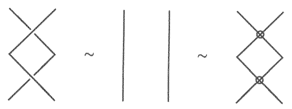

Рис. 2. Варианты II преобразования Райдемайстера

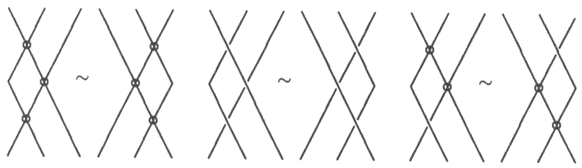

Рис. 3. Варианты III преобразования Райдемайстера

Замечание 2. Обратим внимание читателя на то, что похожий вариант III преобразования Райдемайстера с 1 виртуальным и 2 классическими перекрестками, показанный на рис. 4, является запрещенным, т.е. не включен в список преобразований. В дальнейшем будет показано, что это запрещенное преобразование не может быть представлено в виде композиции описанных выше преобразований.

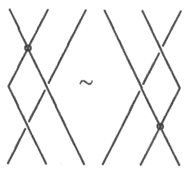

Рис. 4. Запрещенное преобразование

Замечание 3. В дальнейшем для обозначения регулярных диаграмм виртуальных кос и соответствующих им слов–кос (см. определение ниже) мы будем использовать греческие буквы (возможно, с индексами). Для виртуальных кос будем использовать латинские буквы.

Замечание 4. Мы иногда будем использовать термин "нить слова-косы", подразумевая под этим нить соответствующей виртуальной косы.

Так же, как и обычные косы, виртуальные косы несут в себе структуру группы. Перейдем к описанию задания виртуальных кос словами и зададим копредставление этой группы.

Действительно, по регулярной диаграмме виртуальной косы из n нитей можно выписать слово-косу в алфавите

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$$

следующим образом.

Будем двигаться вдоль Oy от точки $(0,1)$ к точке $(0,0)$ и фиксировать уровни $y = t \in [0,1]$, содержащие перекрестки. Каждый перекресток соответствует перестановке нитей с номерами i и $i+1$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Если перекресток является виртуальным, запишем букву ζ_i. В противном случае запишем σ_i, если переход соответствует направлению "северо-восток – юго-запад", и σ_i^{-1} иначе.

Таким образом, мы записали слово-косу по заданной регулярной диаграмме виртуальной косы, см. рис. 5.

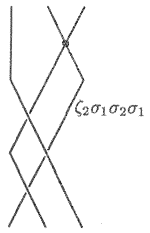

Рис. 5. Диаграмма виртуальной косы и соответствующее слово-коса

Опишем теперь структуру группы VB_n на множестве виртуальных кос из n нитей, см., напр., [6, 5]. Очевидно, что виртуальные косы можно умножать аналогично обычным косам, располагая одну косу над другой и изменяя масштаб вдоль оси Oy. Роль единичной (тривиальной) косы играет коса, состоящая из всех вертикальных непересекающихся нитей.

Роль операции взятия обратного играет отражение косы относительно оси $\{y = 1/2\}$, см. рис. 6.

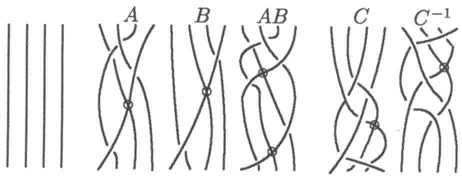

Рис. 6. Операции в группе виртуальных кос

Пусть σ_i – коса, все нити которой, кроме i и $i+1$, вертикальны, а нити i и $i+1$ образуют перекресток с переходом в направлении северо-восток – юго-запад.

Пусть ζ_i – коса, все нити которой, кроме i и $i+1$, вертикальны, а нити i и $i+1$ пересекаются, образую виртуальный перекресток. Как показано на рис. 5, элементы σ_i и ζ_i составляют полный список образующих рассматриваемой группы VB_n.

Заметим, что группа, порожденная лишь классическими образующими σ_i и профакторизованная только по классическим соотношениям – это в точности группа кос B_n. В дальнейшем мы докажем и более общее утверждение о том, что подгруппа группы

VB_N, натянутая лишь на σ_i, – это также группа B_n, т.е. "виртуальная эквивалентность" совпадает с "классической эквивалентностью". Подгруппа группы VB_n, натянутая на образующие ζ_i – это в точности группа перестановок S_n.

Сформулируем лемму, которую мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1 [6]. *Группа виртуальных кос с образующими σ_i, ζ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, допускает следующую систему определяющих соотношений:*

1. *соотношения классической группы кос:*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \textit{для} \quad |i-j|>1, \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1};$$

2. *соотношения группы перестановок:*

$$\zeta_i\zeta_j = \zeta_j\zeta_i \quad \textit{для} \quad |i-j|>1, \quad \zeta_i\zeta_{i+1}\zeta_i = \zeta_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}, \quad \textit{и} \quad \zeta_i^2 = e;$$

3. *смешанные соотношения:*

$$\sigma_i\zeta_j = \zeta_j\sigma_i \quad \textit{для} \quad |i-j|>1, \quad \zeta_i\zeta_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}.$$

Все описанные соответствия легко могут быть получены из преобразований плоскости и преобразований Райдемайстера.

Главным вопросом настоящей работы является следующий *вопрос распознавания*: как распознать, задают ли две различные (регулярные) диаграммы виртуальных кос β_1 и β_2 одну и ту же косу b?

Частичным ответом на этот вопрос является построение инварианта группы виртуальных кос, т.е. такой функции на регулярных диаграммах виртуальных кос (косах-словах), которая является инвариантной относительно всех соотношений группы виртуальных кос. В этом случае, если для инварианта f имеем $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$, то диаграммы β_1 и β_2 задают две различные (неизотопные) косы.

§2. Построение главного инварианта

В настоящем разделе мы дадим обобщение полного инварианта классической группы кос, предложенного в [3], на случай виртуальных кос.

Фиксируем некоторое натуральное n. Пусть G – свободная группа с образующими $a_1 \ldots, a_n, t$. Обозначим через E_i множество классов смежности $\{a_i\}\backslash G$ для $i = 1, \ldots, n$.

Определение 3. *Назовем виртуальной n-системой множество элементов* $(e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n)$.

Целью настоящего раздела является построение инвариантного отображения (не являющегося гомеоморфизмом) из множества всех виртуальных кос из n нитей во множество всех виртуальных n-систем.

Пусть β – некоторое слово-коса. Будем строить соответствующую виртуальную n-систему $f(\beta)$ следующим образом. Мы будем шаг за шагом строить значение функции $f(\beta\psi)$ по значению функции $f(\beta)$, где ψ – некоторая образующая σ_i либо ζ_i.

Сначала рассмотрим пустое слово, задающее тривиальную косу, и сопоставим ему n классов смежности единичного элемента G: $\langle e, e, \ldots, e\rangle$. Итак, мы определили $f(e) := \langle e, e, \ldots, e\rangle$.

Будем теперь читать слово β и выписывать соответствующую виртуальную n-систему. Если первая образующая этого слова – это ζ_i, то оставим все слова n-системы, кроме e_i, e_{i+1}, без изменения.[1] Элемент e_i становится равным t, а элемент e_{i+1} превращается в t^{-1}. В случае, если первая буква – σ_i, то все элементы, кроме e_{i+1}, остаются неизменными, а e_{i+1} превращается a_i^{-1}. Наконец, если первая буква – это σ_i^{-1}, то единственным изменяющимся элементом является e_i: он становится равным a_{i+1}.

Процедура перестройки слова по каждой следующей букве такова. Обозначим индекс этой буквы через i. Предположим, что нить, подходящая слева-сверху к этому перекрестку, начинается в точке $(p, 1)$, а нить, подходящая справа-сверху – в точке $(q, 1)$. Пусть $e_p = P, e_q = Q$, где P, Q – некоторые слова, представляющие соответствующие смежные классы. После прохождения рассматриваемого перекрестка все смежные классы, кроме e_p, e_q, остаются неизменными. Кроме того, если рассматриваемая нами буква была ζ_i, то e_p становится равным $P \cdot t$, а e_q превращается в $Q \cdot t^{-1}$. Если же это – буква σ_i, то e_p остается той же самой, а e_q превращается в $QP^{-1}a_p^{-1}P$. Наконец, если рассматриваемая буква – это σ_i^{-1}, то элемент e_q остается неизменным, а e_p превращается PQa_qP^{-1}. Заметим, что описанная операция определена корректно. Действительно, взяв вместо слов P, Q слова $a_p^l P, a_q^m Q$,

[1] Здесь и далее будем записывать смежные классы элементов множеств E_i их представителями в G.

мы получим: в первом случае

$$a_p^l Pt \sim Pt, \quad a_q^m Qt^{-1} \sim Qt^{-1},$$

во втором случае

$$a_p^l P \sim P, \quad a_q^m QP^{-1}a_p^{-l}a_p^{-1}a_p^l P = a_q^m QP^{-1}a_p^{-1}P \sim QP^{-1}a_p^{-1}P,$$

и в третьем случае

$$a_p^l PQ^{-1}a_q^{-m}a_q^{-1}a_q^m P = a_p^l PQ^{-1}a_q^{-1}Q \sim PQ^{-1}a_q^{-1}Q, \quad a_q^m Q \sim Q.$$

Таким образом, мы определили отображение f из множества всех (регулярных) диаграмм виртуальных кос в множество виртуальных n-систем.

Заметим, что при рассмотрении регулярных диаграмм классических кос (без виртуальных перекрестков) все компоненты соответствующей n-системы не будут содержать переменной t. Следовательно, для таких диаграмм можно считать, что функция f принимает лишь значения вида $(e_1 \in E_1', \ldots, e_n \in E_n')$, где $E_i' = E_i/\{[t]\}$.

Сформулируем важную теорему.

Теорема 0 (доказательство см. в [3]). *Функция f является полным инвариантом группы классических кос, т.е. устанавливает однозначное соответствие между классами эквивалентности диаграмм классических кос по соотношениям группы классических кос и элементами некоторого подмножества из $(E_1', \ldots, E_n')$.*

Теорема 1. *Функция f является инвариантом виртуальных кос, т.е. если диаграммы β_1 и β_2 задают одну и ту же косу β, то $f(\beta_1) = f(\beta_2)$.*

Доказательство. Нам нужно показать, что функция f, определенная на диаграммах виртуальных кос, является инвариантной относительно всех соотношений группы виртуальных кос. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение A. *Для слов $\beta_1 = \beta\gamma_1$ и $\beta_2 = \beta\gamma_2$, где $\gamma_1 = \gamma_2$ – соотношение группы виртуальных кос, имеем: $f(\beta_1) = f(\beta_2)$.*

Доказав утверждение A, получаем $f(\beta_1\delta) = f(\beta_1\delta)$ для произвольного δ, так как значение функции $f(\beta_1\delta)$ (так же как и $f(\beta_2\delta)$) строится шаг за шагом, т.е. зная значение $f(\beta_1)$ и слово-косу δ, мы можем вычислить значение $f(\beta_1\delta)$. Таким образом, для каждых слов-кос β, δ и для каждого соотношения $\gamma_1 = \gamma_2$ мы докажем, что $f(\beta\gamma_1\delta) = f(\beta\gamma_2\delta)$. Это завершит доказательство теоремы.

Доказательство утверждения A. Рассмотрим все соотношения виртуальной группы кос. Проверка для соотношения дальней коммутативности $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ для $|i-j| \geqslant 2$ очевидна: все четыре нити, задействованные в этом преобразовании, различны, следовательно, порядок рассмотрения перекрестков несущественнен. То же самое можно сказать и о других соотношениях коммутативности, относящихся к одной σ и одной ζ или к двум ζ.

Покажем теперь инвариантность функции f при применении преобразования, соответствующего соотношению $\zeta_i^2 = e$.

Действительно, пусть β – некоторое слово-коса, а $\beta_1 = \beta\zeta_i^2$ для некоторого i. Пусть

$$f(\beta) = (P_1, \dots, P_n), \quad f(\beta_1) = (P_1', \dots, P_n').$$

Обозначим через p и q номера нитей, походящих к перекрестку сверху слева и сверху справа. Очевидно, что для любого $j \neq p, q$ мы имеем $P_j = P_j'$. Кроме того,

$$P_p' = (P_p \cdot t) \cdot t^{-1} = P_p, \quad P_q' = (P_q \cdot t^{-1}) \cdot t = P_q.$$

Рассмотрим теперь случай $\beta_1 = \beta \cdot \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1}$ (с очевидностью, случай $b_1 = \beta\sigma_i^{-1}\sigma_i$ полностью аналогичен этому). Как и раньше, обозначим $f(\beta)$ через $(\dots P_i \dots)$, $f(\beta_1)$ – через $(\dots P_i' \dots)$. Пусть p, q – соответствующие номера нитей. Мы имеем: $P_j' = P_j$ для $j \neq p, q$. Также понятно, что $P_p = P_p'$. (Это следует из определения функции f, так как p-я нить дважды образует перекресток.) Таким образом,

$$P_q' = (P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p) P_p^{-1} a_p P_p = P_q.$$

Перейдем теперь к вариантам III преобразования Райдемайстера. Пусть β – слово-коса,

$$\beta_1 = \beta\zeta_i\zeta_{i+1}\zeta_i, \quad \beta_2 = \beta\zeta_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}.$$

Пусть p, q, r – глобальные (считаные от оси $y = 1$) номера нитей, занимающих позиции $n, n+1, n+2$ нижнем ряду косы b.

Обозначим $f(\beta)$ через $(P_1,\dots,P_n)$, $f(\beta_1)$ – через $(P_1^1,\dots,P_n^1)$, а $f(\beta_2)$ – через $(P_1^2,\dots,P_n^2)$. Очевидно, что $P_i = P_i^1 = P_i^2\ \forall i \neq p,q,r$. Прямые вычисления показывают, что

$$P_p^1 = P_p^2 = P_p\cdot t^2,\quad P_q^1 = P_q^2 = P_q \ \text{ и }\ P_r^1 = P_r^2 = P_r\cdot t^{-2}.$$

Рассмотрим смешанное преобразование, используя те же обозначения, что и ранее:

$$\beta_1 = \beta\zeta_i\zeta_{i+1}\sigma_i, \beta_2 = \sigma_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}.$$

Как и ранее, $P_j^1 = P_j^2 = P_j$ для всех $j \neq p,q,r$. Нетрудные подсчеты показывают, что

$$P_p^1 = P_pt^2,\quad P_q^1 = P_qt^{-1},$$

$$P_r^1 = P_rt^{-1}(P_qt^{-1})^{-1}a_q^{-1}(P_qt^{-1}) = P_rP_qa_q^{-1}P_qt^{-1}$$

и

$$P_p^2 = P_pt^2,\quad P_q^2 = P_qt^{-1},\quad P_r^2 = P_rP_q^{-1}a_q^{-1}P_q.$$

Наконец, в случае III "классического" преобразования

$$\beta_1 = \beta\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i, \beta_2 = \beta\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

(обозначения те же) имеем $\forall j \neq p,q,r : P_j^1 = P_j^2 = P_j$. Кроме того, поскольку нити с номером p в обоих случаях образуют переход, имеем $P_p^1 = P_p^2 = P_p$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
P_q^1 &= P_qP_p^{-1}a_p^{-1}P_p,\\
P_r^1 &= (P_rP_p^{-1}a_p^{-1}P_p)\cdot(P_qP_p^{-1}a_p^{-1}P_p)^{-1}a_q^{-1}(P_qP_p^{-1}a_p^{-1}P_p)\\
&= P_rP_q^{-1}a_q^{-1}P_qP_p^{-1}a_p^{-1}P_p
\end{aligned}$$

и

$$P_q^2 = P_qP_p^{-1}a_p^{-1}P_p,\quad P_r^2 = P_rP_q^{-1}a_q^{-1}P_qP_p^{-1}a_p^{-1}P_p.$$

Как видно, окончательные результаты совпадают, что завершает доказательство теоремы. •

Таким образом, мы показали, что f является инвариантом виртуальных кос, т.е. для заданной виртуальной косы b значение инварианта f не зависит от диаграммы, представляющей эту косу. Поэтому мы можем писать просто $f(b)$.

Замечание 5. В действительности мы можем рассматривать f как функцию со значениями не в $(E_1, \dots, E_n)$, а в n экземплярах группы G: доказательство инвариантности дословно повторяется для $(G, \dots, G)$. Предложенная конструкция $(E_1, \dots, E_n)$ описана для удобства дальнейшего изложения.

§3. Первые следствия

Классические косы (т.е. косы без виртуальных пересечений) могут быть рассмотрены с точностью до двух отношений эквивалентности: *классической* (образованной лишь классическими соотношениями) и *виртуальной* (образованной всеми соотношениями).

Покажем, что на самом деле эти соотношения эквивалентности совпадают (этот факт вытекает из работы [2], которая была написана, когда виртуальные косы еще не были определены).

Теорема 2. *Две виртуально эквивалентные классические косы b_1 и b_2 являются классически-эквивалентными.*

Доказательство. Так как коса b_1 виртуально эквивалентна косе b_2, мы имеем $f(b_1) = f(b_2)$. Принимая во внимание, что f является полным инвариантом на множестве классических кос, мы имеем $b_1 = b_2$ (в смысле классической эквивалентности).

Как объявлено в замечании 2, преобразование $X = \sigma_i\sigma_{i+1}\zeta_i \mapsto \zeta_{i+1}\sigma_{i+1}\sigma_i = Y$ является запрещенным. Покажем, что оно не может быть представлено в виде композиции соотношений группы виртуальных кос.

Теорема 3. *Запрещенное преобразование (соотношение) не является комбинацией соотношений группы виртуальных кос.*

Доказательство. Действительно, подсчитаем значения $f(\sigma_1\sigma_2\zeta_1)$ и $f(\zeta_2\sigma_1\sigma_2)$. В первом случае мы имеем:

$$(e, e, e) \mapsto (e, a_1^{-1}, e) \mapsto (e, a_1^{-1}, a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}) \mapsto (t, a_1^{-1} t^{-1}, a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}).$$

Второй случай дает:

$$(e, e, e) \mapsto (e, t, t^{-1}) \mapsto (e, t a_1^{-1}, t^{-1}) \mapsto (e, t a_1^{-1}, t^{-1} a_1 t^{-1} a_2^{-1} t a_1^{-1}).$$

Как видно, окончательные результаты не совпадают (представляют различные n-системы), следовательно, запрещенное преобразование изменяет виртуальную косу.

Замечание 6. Если положить $t = 1$, то значения $f(X)$ и $f(Y)$ совпадут. Таким образом, t играет роль переменной, которая "чувствует" запрещенное преобразование.

Определение 4. *Для заданной диаграммы β виртуальной косы и двух чисел $1 \leqslant i < j \leqslant n$ определим* коэффициент зацепления $l_{i,j}(\beta)$ *следующим образом (см., напр., [4]). Рассмотрим все перекрестки, в которых i-я нить (в глобальной нумерации, считая сверху) образует проход, а j-я нить (в глобальной нумерации) образует переход. Подсчитаем алгебраическую сумму этих перекрестков (-1 для отрицательных и $+1$ для положительных).*

Мы покажем, что функции $l_{i,j}(\beta)$ могут быть подсчитаны с использованием лишь $f(\beta)$, и следовательно, являются инвариантами кос.

Рассмотрим теперь косу b и значение инварианта $f(b)$. Он состоит из n элементов $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть для $1 \leqslant p \neq q \leqslant n$ число f_{pq} будет равно алгебраическому числу вхождений a_q в e_p. Все числа f_{pq} определены корректно по значению f: каждый элемент e_i, рассмотренный как элемент из G, определен с точностью до умножения на a_i слева; такое умножение не изменяет f_{ij} для $j \neq i$.

Таким образом, для $1 \leqslant p \neq q \leqslant n$, функция f_{pq} является инвариантом виртуальных кос.

Теорема 4. *Инвариант f_{pq} отличается знаком от коэффициента зацепления l_{pq} для любых нитей с номерами p и q.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим слово-косу β. Будем строить $f(\beta)$ шаг за шагом. Заметим, что набор инавариантов f_{pq} представляет собой "абелианизацию" инварианта f: вместо перемножения образующих мы складываем их и рассматриваем соответствующие коэффициенты.

Остановимся на этом вопросе более подробно.

Будем доказывать теорему индукцией по длине (количеству перекрестков) слова-косы β. Для нуля перекрестков утверждение очевидно. Добавим теперь один перекресток к диаграмме косы и посмотрим, что произойдет. Виртуальный перекресток не меняет коэффициента зацепления (построенного как алгебраическая сумма по всем классическим перекресткам). Этот перекресток не меняет также и f_{ij}: некоторые два элемента e_i, e_j умножаются на $t^{\pm 1}$, при этом алгебраическое число вхождений элемента $a_k, k = 1, \ldots, n$, в каждый из них остается неизменным. При добавлении σ_i числа $f_{kl}, l = 1, \ldots, n$, изменяются следующим образом. Пусть p – номер нити, подходящей к перекрестку сверху и справа, а q – номер нити, подходящей сверху и слева. Тогда единственное, что меняется в значении f, это e_q. Оно умножается на $e_p^{-1} p^{-1} e_p$. При подсчете алгебраического числа вхождений какой-либо буквы, e_p справа аннулирует все вхождения, порожденные e_p^{-1} слева. Таким образом, f_{qp} уменьшается на 1, в то время как l_{qp} увеличивается на 1, а все остальные числа f_{xy}, l_{xy} остаются неизменными.

Случай добавления перекрестка σ_i^{-1} рассматривается полностью аналогично.

Итак, мы доказали индукционный переход и, тем самым, теорему. $\bullet$

Таким образом, показано, что инвариант f сильнее известного инварианта, называемого коэффициентом зацепления.

Приведем еще два примера, показывающих превосходство инварианта f.

Рассмотрим виртуальную косу из 3 нитей

$$b = \zeta_2 \sigma_2^{-1} \zeta_2 \sigma_1 \sigma_2 \zeta_1 \sigma_1 \zeta_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}.$$

Легко проверить, что для нее $f(b) \neq f(e)$.

С другой стороны, эта коса не распознается полиномом Джонса (Кауффмана), определенным в [7].

Более точно, рассмотрим зацепление $L(b)$, полученное замыканием косы b, и его полином Кауффмана $K(L(b))$. Широко известно, что полином Кауффмана не различает зацеплений, которые отличаются так, как показано на рис. 7.

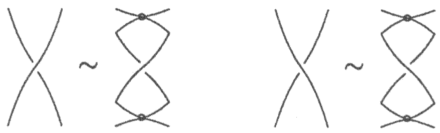

Рис. 7. Пары диаграмм, не различаемых полиномом Кауффмана

Таким образом, легко видеть, что если в записи некоторой косы заменить $\sigma_i^{\pm 1}$ на $\zeta_i \sigma_i^{\pm 1} \zeta_i$, то замыкания этих кос будут иметь одинаковые полиномы Кауффмана (Джонса).

Следовательно,

$$K(L(b)) = K(L(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})).$$

Измененная коса является тривиальной, значит, $K(L(b)) = K(L(e))$.

Приведем еще один пример сравнения инварианта f с известным инвариантом.

Рассмотрим представление Бурау виртуальной группы кос VB_n, см. [6]. В случае VB_2 это представление задается двумя матрицами:

$$R(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\zeta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $R(\sigma_1)$ имеет собственные значения 1 и $-t$. Более точно,

$$CR(\sigma_1)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} =: \sigma$$

при

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$CR(\zeta_1)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: \zeta.$$

Тогда $F(k,l,m) = \sigma^k\zeta\sigma^l\zeta\sigma^m\zeta$ – это верхнетреугольная матрица с 1 и -1 на главной диагонали в случае, если $k+l+m=0$.

Положим $k=2$, $l=m=-1$. Тогда $F(2,-1,-1)^2 = e$.

Легко проверяется, что для нетривиальной косы $b = (\sigma_1^2\zeta_1\sigma_1^{-1}\zeta_1\sigma_1^{-1}\zeta_1)^2$ мы имеем $f(b) \neq f(e)$.

В этом смысле инвариант f сильнее, чем представление Бурау даже для случая 2 нитей.

§4. Насколько силен инвариант f?

Как мы показали выше, построенный инвариант точнее, чем коэффициенты зацепления; иногда он распознает виртуальные косы, которые не распознаются полиномом Джонса (Кауффмана) или представлением Бурау.

Кроме этого, ограничение инварианта f на случай классических кос (также обозначенное через f) совпадает с полным инвариантом классической группы кос, описанным в [3].

Инвариант f представляет собой пример отображения из алгебраического объекта (группы кос) в другой алгебраический объект (n экземпляров свободной группы из n образующих). Однако это отображение не является гомоморфизмом.

Чтобы лучше понять точность инварианта f, установим некоторые свойства этого отображения.

Оказывается, есть свойства, которые делают f похожим на гомоморфизм.

Лемма 2. *Если $f(b_1) = f(b_2)$ для некоторых кос b_1, b_2, то для любых двух кос a и c имеет место равенство $f(ab_1c) = f(ab_2c)$.*

Доказательство. Мы докажем эту лемму в два шага. Сначала покажем, что $f(ab_1) = f(ab_2)$. Затем докажем, что $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f(a_1c) = f(a_2c)$. Доказав оба утверждения, легко получим утверждение теоремы, подставляя ab_1 в качестве a_1 и ab_2 в качестве a_2.

Второй шаг является очевидным. Он был проделан при доказательстве теоремы 1 (как утверждение A).

Покажем теперь, что если $f(b_1) = f(b_2)$, то $f(ab_1) = f(ab_2)$.

Пусть слова α, β_1 и β_2 представляют косы a, b_1 и b_2, соответственно.

Применим индукцию по длине слова α. Если α имеет длину 0, то $a = e$, поэтому $f(ab_1) = f(ab_2)$ в силу главного предположения.

Рассмотрим теперь случай, когда α имеет длину 1, т.е. просто является буквой.

Предположим, что $\alpha = \zeta_i$. Тогда вместо системы образующих $(a_1, \ldots, a_n, t)$ группы G можно рассмотреть систему

$$a_1, \ldots, a_{i-1}, ta_{i+1}t^{-1}, t^{-1}a_it, a_{i+2}, \ldots, a_n.$$

Очевидно, что эти n элементов действительно порождают группу G. Обозначим $P(\beta_j)$ через $P_1^j, \ldots, P_n^j$ при $j = 1, 2$ (здесь P

без верхнего индекса относится к β без нижнего индекса). Каждое P_j^i выражается некоторым образом через “старые образующие”: $P_j^i = P_j^i(a_1, \ldots, a_n, t)$. Определим теперь для заданной функции $X(a_1, \ldots, a_n)$ функцию

$$X' = X(a_1, \ldots, a_{i-1}, ta_{i+1}t^{-1}, t^{-1}a_it, a_{i+2}, \ldots, a_n),$$

т.е. просто подставим новые образующие вместо старых. Мы утверждаем, что $\forall\beta$

$$f(\alpha\beta) = (P_1', \ldots, P_{i-1}', tP_i', t^{-1}P_{i+1}', \ldots, P_n').$$

Это легко проверяется индукцией по длине слова β. Но слово P_j' зависит только от P_j и может быть очевидным образом восстановлено по этому слову. (На самом деле, нужно также показать, что при умножении P_j на a_j^l слева все классы смежности P_k остаются теми же самыми, но это проверяется непосредственно.) Это показывает, что отображение $f(\beta) \to f(\alpha\beta)$ определено корректно и является инъективным.

Таким образом, если $f(\beta_1) = f(\beta_2)$, то $f(\alpha\beta_1) = f(\alpha\beta_2)$.

Те же рассуждения проходят и в случае, когда $\alpha = \sigma_i^{\pm 1}$.

Ниже мы приведем лишь способы преобразования элементов P_i.

В случае, когда $\alpha = \sigma_i$, образующими являются $a_1, \ldots, a_{i-1}$, $a_ia_{i+1}a_i^{-1}$, $a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n$,

$$f(\alpha\beta) = (P_1', \ldots, P_{i-1}', P_i', a_i^{-1}P_{i+1}', \ldots, P_n').$$

(Здесь и далее под P_i' подразумевается результат поддстановки новых образующих вместо старых.)

В случае $\alpha = \sigma_i^{-1}$ образующие выглядят так: $a_1, \ldots, a_{i-1}$, a_{i+1}, $a_{i+1}^{-1}a_ia_{i+1}$, $a_{i+2}, \ldots, a_n$,

$f(\alpha\beta) = (P_1', \ldots, P_{i-1}', a_{i+1}P_i', P_{i+1}', \ldots, P_n')$.

Таким образом, во всех трех описанных выше случаях слово $f(\alpha\beta)$ однозначно восстанавливается по α и $f(\beta)$. Следовательно, $f(\alpha\beta_1) = f(\alpha\beta_2)$.

Итак, мы проверили базу индукции. Предположим теперь, что индукционное утверждение верно для любого слова длины $\leqslant 1$. Пусть α – слово длины k. Тогда $\alpha = \alpha'\psi$, где ψ – последняя буква в слове α, а слово α' имеет длину $k-1$. Пусть $\beta_1' = \psi\beta_1, \beta_2' = \psi\beta_2$.

По предположению индукции $f(\beta_1') = f(\beta_2')$. Применяя предположение индукции еще раз, получаем

$$f(\alpha\beta_1) = f(\alpha'\beta_1') = f(\alpha'\beta_2') = f(\alpha\beta_2).$$

Тем самым мы завершили доказательство первого утверждения и всей леммы. $\bullet$

Следствие 1. *Если для некоторой косы a имеет место $f(a) = f(e) = (e, \ldots, e)$, то для любой косы b имеет место $f(b^{-1}ab) = f(e)$.*

Из леммы 3 и теоремы 4 сразу получаем

Следствие 2. *Любые две косы a, b, имеющие диаграммы α, β, получающиеся одна из другой ровно одним запрещенным преобразованием, не являются эквивалентными.*

Следующим шагом является вопрос об описании возможных значений инварианта f. В общем случае эта проблема является очень сложной. Остановимся на ее решении в случае $n = 2$ нитей. Мы рассмотрим даже более простую задачу, связанную с более простым инвариантом.

Сделаем замену обозначений: вместо образующих a_1, a_2 будем писать a, b, а вместо σ_1, ζ_1 будем просто писать σ, ζ.

Пусть $\mathcal{F}$ – инвариант группы виртуальных кос, полученный из f положением $t = 1$. Обозначим свободную группу с образующими a, b через G'. Пусть $E_1' = \{a\}\backslash G, E_2' = \{b\}\backslash G$.

В случае 2 нитей инвариант $\mathcal{F}$ является отображением из VB_2 в (E_1', E_2') или, проще, в (G', G').

Для косы α обозначим $\mathcal{F}(\alpha)$ через $(P(\alpha), Q(\alpha))$.

Рассмотрим сначала некоторые примеры слов-кос для виртуальных кос из 2 нитей и значений на них функции $\mathcal{F}$:

1. для тривиальной косы имеем (e, e);
2. для σ имеем $(1, a^{-1})$;
3. для σ^{-1} имеем $(b, 1)$;
4. для ζ получаем $(1, 1)$.

Теорема 5. *Пусть β – слово-коса. Тогда $P(\beta)Q(\beta)^{-1} = a^k b^l$ для некоторых k, l.*

Доказательство. Будем использовать индукцию по количеству перекрестков. Для 0 перекрестков доказывать нечего. Пусть теперь β – коса, имеющая диаграмму с n перекрестками, $\beta' = \beta\alpha$, в то время как $\alpha = \zeta, \sigma$ или σ_{-1}. Пусть $P(\beta)Q(\beta)^{-1} = a^n b^m$.

Для $\alpha = \zeta$ имеем

$$P(\beta') = P(\beta)t, \quad Q(\beta') = Q(\beta)t^{-1}.$$

Таким образом, $P(\beta')\overline{Q}(\beta')^{-1} = a^n b^m$.

Для $\alpha = \sigma$ и при четном β получаем

$$P \mapsto P, \quad Q \mapsto QP^{-1}a^{-1}P, \quad PQ^{-1} \mapsto a^{-1}PQ^{-1};$$

при четном β:

$$Q \mapsto Q, \quad P \mapsto PQ^{-1}b^{-1}Q, \quad PQ^{-1} \mapsto PQ^{-1}b^{-1}.$$

При $\alpha = \sigma^{-1}$, β — четное:

$$Q \mapsto Q, \quad P \mapsto PQ^{-1}bQ, \quad PQ^{-1} \mapsto PQ^{-1}b,$$

β – нечетное:

$$P \mapsto P, \quad Q \mapsto QP^{-1}aP, \quad PQ^{-1} \mapsto aPQ^{-1}.$$

Таким образом, мы провели индукционный переход и тем самым завершили доказательство теоремы. •

Условие на PQ^{-1} является вполне естественным. Оно означает, что $\exists g \in G' : g \in [P] \in E_1'$ и $g \in [Q] \in E_2'$. Очевидно, такой элемент g единственен. Таким образом, элемент g может быть рассмотрен как инвариант группы VB_2.

Действительно, для любой косы $b \in VB_2$ имеем $\mathcal{F}(b) = \mathcal{F}(b\zeta)$. Кроме того, существует единственная коса $b\zeta$, ей соответствующая. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь *четную подгруппу* (с тривиальной перестановкой) EVB_2 группы VB_2.

Теорема 6. *Инвариант g (и, следовательно, инвариант $\mathcal{F}$) является полным для группы EVB_2.*

Достаточно доказать, что полным является инвариант g.

Для доказательство нам потребуется вспомогательная

Лемма 3. *Для любых четных слов-кос π, ρ из 2 нитей имеем*

$$g(\pi\rho) = g(\rho)g(\pi) \quad \text{и} \quad g(\pi)^{-1} = g(\pi^{-1}),$$

т.е. g является антигомоморфизмом.

Доказательство. Заметим сначала, что группа VB_2 – это свободная группа с двумя образующими $\alpha = \zeta\sigma$ и $\beta = \zeta\sigma^{-1}$.

Легко проверить, что $g(e) = e$, а также

$$g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b^{-1}, \quad g(\alpha^{-1}) = a^{-1}, \quad g(\beta^{-1}) = b.$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что

$$\forall \rho : g(\rho\alpha) = g(\alpha) f(\rho),$$

$$g(\rho\beta) = g(\beta)g(\rho), \quad g(\rho\alpha^{-1}) = g(\alpha^{-1})g(\rho), \quad g(\rho\beta^{-1}) = g(\beta^{-1})g(\rho).$$

Докажем сначала, что $g(\pi\rho) = g(\rho)g(\pi)$. Будем проводить доказательство индукцией по длине слова. (Под "длиной" мы понимаем минимальное число букв $\alpha, \beta, \alpha^{-1}$ и β^{-1} в разложении слова ρ.) Для $\rho = e$ утверждение очевидно. Для ρ длины 1 проверяется непосредственно, что

$$\forall \rho : g(\rho\alpha) = g(\alpha)f(\rho), g(\rho\beta) = g(\beta)g(\rho), g(\rho\alpha^{-1})$$
$$= g(\alpha^{-1})g(\rho), g(\rho\beta^{-1}) = g(\beta^{-1})g(\rho).$$

Предположим теперь, что ρ имеет длину $k + 1 > 1$, а для всех ρ' длины $\leqslant k$ имеет место $g(\pi\rho') = g(\rho')g(\pi)$. Пусть $\rho = \rho_1\rho_2$, где ρ_1 имеет длину 1, а ρ_2 имеет длину k.

Следовательно,

$$g(\pi\rho) = g(\pi\rho_1\rho_2) = g((\pi\rho_1)\rho_2$$

по предположению индукции для ρ_2

$$= g(\rho_2)g(\pi\rho_1) =$$

применяя предположение индукции для ρ_1

$$= g(\rho_2)g(\rho_1)g(\pi) =$$

по предположению индукции для ρ_1

$$= g(\rho_1\rho_2)g(\pi) = g(\rho)g(p),$$

ч.т.д.

Таким образом, так как $g(e) = e$, имеем: $e = g = e = g(\rho\rho^{-1}) = g(\rho)^{-1}g(\rho)$, откуда следует второе утверждение леммы. •

Доказательство теоремы. Из леммы следует, что g является антигомоморфным отображением из свободной группы EVB_2 в свободную группу с образующими a, b. Это отображение переводит образующие α, β в образующие a, b^{-1}. Таким образом, у него нет ядра. Поэтому g является полным инвариантов группы EVB_2. Следовательно, таковым является и $\mathcal{F}$. $\bullet$

Конечно, инвариант f также является полным для группы EVB_2. Кроме того, он чувствителен к умножению на ζ справа, таким образом, он распознает и все элементы группы VB_2. Для распознавания того, задает ли пара элементов $(e_1 \in E_1, e_2 \in E_2)$ значение инварианта f на некоторой виртуальной косе, профакторизуем их по t, рассмотрим прообраз b полученной пары (e'_1, e'_2) относительно $\mathcal{F}$ и определим, равно ли $f(b) = (e_1, e_2)$ или $f(b\zeta) = (e_1, e_2)$.

Действительно, элементы группы VB_2 легко поддаются распознаванию: это группа представляет собой свободное произведение группы $\mathbf{Z}$ (с образующей σ) и группы $\mathbf{Z}_2$ (с образующей ζ).

Таким образом, простейший пример $(e_1 \in E_1, e_2 \in E_2)$, который не представляет собой значение функции f на некоторой виртуальной косе, – это (b, a). В этом случае имеем $PQ^{-1} = ba^{-1}$, что не равно $a^k b^l$ ни при каких k, l.

Заметим, что инвариант f легко считается на компьютере.

Кроме того, в силу леммы 3 понятно, что для проверки полноты инварианта f достаточно проверить существование нетривиальной косы, значение инварианта f на которой равно $(e, \ldots, e)$.

Компьютерная проверка показывает, что среди нетривиальных виртуальных кос с небольшим количеством перекрестков, таких кос нет.

Гипотеза. *Инвариант f является полным инвариантом виртуальных кос.*

Благодарность. Выражаю благодарность К. С. Злотину за плодотворные консультации.

Литература

1. P. Dehornoy, *From large cardinals to braids via distributive algebra.* — J. Knot Theory Ram. **4** (1995), 33–79.
2. R. P. Fenn, R. Rimányi, C. P. Rourke, *The braid-permutation group.* — Topology **36** (1997), 123–135.
3. A. A. Gaifullin, V. O. Manturov, *On the recognition of braids.* — J. Knot Theory Ram. **11** (2002), 1193-1209.

4. M. N. Gusarov, M. Polyak, O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots*. — Topology **39** (2000), 1045–1068.
5. В. О. Мантуров, *Лекции по теории узлов и их инвариантов*. М., УРСС (2001).
6. V. Vershinin, *On homology of virtual braids and burau representation*. — J. Knot Theory Ram. **10** (2001), 795–812.
7. L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*. — European J. Combinatorics. **20** (1999), 662–690.

Manturov V. O. On recognition of virtual braids.

The virtual braid group VB_n containing the Artin braid group B_n as a subgroup is studied. A complete invariant constructed earlier on B_n is extended to VB_n. It is conjectered that this invariant is also complete.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vassily@manturov.mccme.ru

Поступило 1 января 2003 г.