Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

В. Б. Хазанов

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПУЧКОВ МАТРИЦ

Описываются методы решения частичной проблемы собственных значений для многопараметрических регулярных пучков вещественных матриц, которые позволяют уточнять заданные приближения к собственному вектору и соответствующей точке спектра (как конечного, так и бесконечного). Вопросы, относящиеся к условиям и скорости сходимости методов, не рассматриваются. Отмечается возможность обобщения методов на комплексный случай, на случай полиномиальных матриц и на случай "связанных" многопараметрических задач.

1. Решение "несвязанной" задачи

1.1. Рассматривается спектральная задача для регулярного пучка постоянных матриц[1]

$$F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x} := \Big(A - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_j\Big)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $A,\ B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 1,\dots,q$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$, а $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ при использовании ограничений:

$$\widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{d}}, \tag{1.2}$$

где $\widetilde{C}(\mathbf{x})$ – матрица размеров $q \times n$, элементы которой в общем случае зависят от вектора $\mathbf{x}$, а $\widetilde{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^q\{\mathbf{0}\}$. Полагаем, что ограничения являются непротиворечивыми и достаточными для того, чтобы система (1.1), (1.2) являлась совместной и имела конечное число решений $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})$. Из этого, в частности, следует, что $q < n$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (02-01-00095) и НШ-2268.2003.1.

[1] Определение спектральных характеристик многопараметрических матриц и их свойств приводятся в работах [1, 3–5]

Очевидно, что ограничения (1.2) должны, в частности, обеспечивать отличие вектора $\mathbf{x}$ от нуля. Такое условие обычно определяется нормировкой вектора по длине

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1, \tag{1.3a}$$

или по компоненте с номером s $(1 \leqslant s \leqslant n)$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_s \rangle = 1.$$

Последнее условие можно рассматривать как частный случай более общего условия "нормировки" вектора $\mathbf{x}$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 1, \tag{1.3b}$$

где $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ – некоторый постоянный вектор. При $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ условие (1.3b) принимает вид (1.3a). В предположении линейности относительно $\mathbf{x}$ остальных ограничений матрица $\widetilde{C}(\mathbf{x})$ и вектор $\widetilde{\mathbf{d}}$ имеют следующий вид:

$$\widetilde{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^\intercal \\ C \end{bmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^{(q-1)\times n}; \quad \widetilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{q-1}.$$

В случае использования условий (1.3b), т.е. когда вектор $\mathbf{w}$ является постоянным, постоянной будет являться и матрица $\widetilde{C}(\mathbf{x}) \equiv \widetilde{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$.

Таким образом, решается нелинейная система

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) := \begin{bmatrix} \left(A - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_j\right)\mathbf{x} \\ \widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1.4a}$$

где

$$\mathbf{z} := \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \operatorname{col}\{\lambda_j\}_{j=1}^{q} \end{bmatrix}. \tag{1.4b}$$

Очевидно, что решение системы (1.4) отвечает минимальному (нулевому) значению квадрата нормы вектора невязки:

$$\phi(\mathbf{z}) \equiv \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{f}\|_E^2 = \|F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}\|_E^2 + \|\widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{d}}\|_E^2, \tag{1.5a}$$

который будем называть функционалом абсолютной невязки. Если все ограничения, за исключением условия нормировки, являются однородными (при $\mathbf{d} = \mathbf{0}$), то можно использовать функционал относительной невязки:

$$\phi_{\text{н}}(z) = \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_{\text{н}}) = \|F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2 + \|C\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2, \tag{1.5b}$$

где $\mathbf{x}_{\text{н}}$ – вектор, нормированный в соответствии с условием (1.3):

$$\mathbf{x}_{\text{н}} = \mathbf{x}/\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{w}\,\rangle.$$

При фиксированном значении вектора $\mathbf{x}$ величина функционала (1.5a) зависит только от первого слагаемого, т.е. определяется вектором невязки системы вида

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) := F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \tag{1.6a}$$

где

$$F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} = A - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(\mathbf{x}) B_j, \tag{1.6b}$$

состоящей из n скалярных уравнений относительно n-мерного вектора $\mathbf{x}$. В этом случае значение мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})$ естественно выбирать из условия минимизации нормы вектора невязки системы (1.6). Поэтому помимо функционалов (1.5) будем рассматривать и другие виды функционалов невязки:

- функционал абсолютной спектральной невязки

$$\phi_{\text{c}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\|_E^2 = \frac{1}{2}\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}\|_E^2; \tag{1.7a}$$

- функционал относительной спектральной невязки

$$\phi_{\text{сн}}(\mathbf{x}) = \phi_{\text{c}}(\mathbf{x}_{\text{н}}) = \frac{1}{2}\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_{\text{н}})}\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2; \tag{1.7b}$$

- функционал абсолютной спектральной невязки с ограничениями

$$\phi_{\text{o}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}\|_E^2 + \frac{1}{2}e^a\|\widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{d}}\|_E^2. \tag{1.7c}$$

- функционал относительной спектральной невязки с однородными ограничениями

$$\phi_{\text{он}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_{\text{н}})}\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2 + \frac{1}{2}e^a\|C\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2. \tag{1.7d}$$

Заметим, что функционалы (1.5a), (1.5b) являются частными случаями функционалов (1.7c), (1.7d), соответственно, в которых вещественное число a определяет долю учета ограничения (1.2).

Справедливо следующее утверждение [6].

Теорема 1. *При фиксированном значении вектора* $\mathbf{x}$, *не являющегося собственным вектором, отвечающим точке бесконечного спектра пучка* (1.1), *функционал абсолютной спектральной невязки* (1.7a) *достигает минимума в точке, отвечающей решению* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})$ *системы линейных алгебраических уравнений*

$$\breve{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \breve{\mathbf{g}}(\mathbf{x}), \tag{1.8a}$$

где

$$\breve{A}(\mathbf{x}) = \mathrm{matr}\,\{\langle\, B_j\mathbf{x}, B_i\mathbf{x}\,\rangle\}_{i,j=1}^{q}, \quad \breve{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathrm{col}\,\{\langle\, A\mathbf{x}, B_i\mathbf{x}\,\rangle\}_{i=1}^{q}. \tag{1.8b}$$

Доказательство. Система (1.6), записанная в векторном виде относительно вектора $\boldsymbol{\lambda}$

$$Y\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}, \tag{1.9a}$$

где

$$Y = \mathrm{row}\,\{B_j\mathbf{x}\}_{j=1}^{q}, \quad \mathbf{g} = A\mathbf{x}, \tag{1.9b}$$

состоит из n скалярных уравнений относительно q скалярных неизветсных, т.е. является переопределенной. Если векторы $B_j\mathbf{x}$, $j = 1, \dots, q$, являются линейно независимыми, то матрица Y имеет полный столбцовый ранг, поэтому обобщенное решение этой системы, которое обеспечивает минимум нормы ее невязки, может быть получено, например, с помощью первой трансформации Гаусса:

$$Y^{\intercal}Y\boldsymbol{\lambda} = Y^{\intercal}\mathbf{g},$$

что и приводит к системе (1.8): $\breve{A}(\mathbf{x}) = Y^{\intercal}Y$, $\breve{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = Y^{\intercal}\mathbf{g}$.

Линейная же зависимость векторов $B_j\mathbf{x}$, $j = 1, \dots, q$, т.е. выполнение равенства $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j B_j\mathbf{x} = \mathbf{0}$, когда $\sum_{j=1}^{q} |\alpha_j| \neq 0$, означает, что вектор $\mathbf{x}$ является собственным вектором, отвечающим точке бесконечной части спектра $\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = (0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_q) \in \sigma_\infty[F^\pi]$. $\square$

Замечания. 1. Обобщенное решение $\boldsymbol{\lambda}$ системы (1.9) целесообразно находить, используя ортогональные левосторонние преобразования с матрицами вращения или отражения.

2. Из вида системы (1.9) следует, что при любом числе $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}(\alpha\mathbf{x})$, поэтому функционал (1.7d) может быть записан в виде

$$\phi_{\text{он}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2 + \frac{1}{2}\|C\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2.$$

3. При фиксированном значении вектора $\mathbf{x}$ функционалы (1.7b)–(1.7d) достигают минимума в той же точке, что и функционал (1.7a).

Компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{\lambda_j(\mathbf{x})\|_{j=1}^{q}$, являющегося решение системы (1.8), представляют собой обобщение отношения Релея для одномерного случая и называются в работе [6] *отношениями минимальных невязок* (*minimum residual quotients*).

Рассмотрим теперь методы решения нелинейной системы (1.4), в том числе, методы минимизации функционалов (1.7), которые являются обобщениями методов решения задачи (1.1), описанных в [6–8]. Все методы являются итерационными и предназначены для уточнения начальных приближений $\mathbf{x}^0$ к собственному вектору и к соответствующей точке спектра $\boldsymbol{\lambda}^0 \in \sigma_c[F]$ пучка (1.1).

1.2. Будем решать нелинейную систему (1.4) методом Ньютона. Начиная с начального приближения $\mathbf{z}^0$, каждый шаг итерационного процнсса осуществляется по формуле

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \mathbf{s}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{1.10}$$

где ньютоновская поправка $\mathbf{s}^k$ находится как решение системы

$$\mathbf{f}'^k \mathbf{s}^k = -\mathbf{f}^k. \tag{1.11}$$

Здесь и далее используется обозначения

$$\mathbf{f}^k = \mathbf{f}(z^k), \quad \mathbf{f}'^k = \mathbf{f}'(\mathbf{z}^k),$$

где $\mathbf{f}'(\mathbf{z})$ представляет собой производную Фреше нелинейного оператора $\mathbf{f}(\mathbf{z})$, которая находится из соотношения

$$\mathbf{f}'(\mathbf{z})\mathbf{s} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{f}(\mathbf{z} + t\mathbf{s})\big|_{t=0}.$$

Представим вектор $\mathbf{s}$ в виде

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \operatorname{col}\{\delta_j\}_{j=1}^{q} \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Тогда при использовании нормировки (1.3a) получаем:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{z})\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \Big(A - \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_j B_j\Big)\mathbf{h} - \sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j B_j \mathbf{x} \\ 2\langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle \\ C\mathbf{h} \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} A - \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_j B_j & \operatorname{row}\{-B_j \mathbf{x}\|_{j=1}^{q} \\ 2\mathbf{x}^{\intercal} & \mathbf{0}_q^{\intercal} \\ C & \mathbb{O}_{q-1,q} \end{bmatrix}. \tag{1.13a}$$

Таким образом, система (1.11) для определения поправки $\mathbf{s}^k$, представленной в виде

$$\mathbf{s}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^k \\ \boldsymbol{\delta}^k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{h}^k \\ \operatorname{col}\{\delta_j^k\}_{j=1}^{q} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

к текущему приближению

$$\mathbf{z}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \operatorname{col}\{\delta_j^k\}_{j=1}^{q} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

принимает вид

$$\begin{cases} F^k \mathbf{h}^k - \sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j \mathbf{x}^k = -F^k \mathbf{x}^k, \\ 2\langle \mathbf{h}^k, \mathbf{x}^k \rangle = 1 - \langle \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k \rangle, \\ C\mathbf{h}^k = \mathbf{d} - C\mathbf{x}^k. \end{cases} \tag{1.16a}$$

Здесь и далее используется обозначение $F^k = A - \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_j^k B_j$.

Из (1.10) с учетом (1.14), (1.15) имеем $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}^k$. Тогда в предположении невырожденности матрицы F^k система (1.16a) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = \sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j^k [F^k]^{-1} B_j \mathbf{x}^k, \\ \langle \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k \rangle = \dfrac{1}{2}(1 + \langle \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k \rangle), \\ C\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{d}. \end{cases} \tag{1.17a}$$

Используя обозначение $\mathbf{u}_j^k = [F^k]^{-1} B_j \mathbf{x}^k$, преобразуем систему

(1.17a) к виду

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = \sum_{j=1}^{q} \delta_j^k \mathbf{u}_j^k, \\ \sum_{j=1}^{q} \langle \mathbf{u}_j^l, \mathbf{x}^k \rangle \delta_j^k = \frac{1}{2}(1 + \langle \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k \rangle), \\ \sum_{j=1}^{q} C\mathbf{u}_j^k \delta_j^k = \mathbf{d}. \end{cases} \tag{1.18a}$$

Аналогично, при использовании нормировки (1.3b), получаем соответственно

$$\mathbf{f}'(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} A - \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_j B_j & \operatorname{row}\{-B_j \mathbf{x}\|_{j=1}^{q} \\ \widetilde{C} & \mathbb{O}_{q,q} \end{bmatrix}. \tag{1.13b}$$

$$\begin{cases} F^k \mathbf{h}^k - \sum_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j \mathbf{x}^k = -F^k \mathbf{x}^k, \\ \widetilde{C}\mathbf{h}^k = \widetilde{\mathbf{d}} - \widetilde{C}\mathbf{x}^k. \end{cases} \tag{1.16b}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = \sum_{j=1}^{q} \delta_j^k \mathbf{u}_j^k, \\ \sum_{j=1}^{q} \widetilde{C}\mathbf{u}_j^k \delta_j^k = \widetilde{\mathbf{d}}. \end{cases} \tag{1.18b}$$

Вводя обозначения

$$Y^k = \operatorname{row}\left\{B_j \mathbf{x}^k\right\}_{j=1}^{q}, \quad U^k = \operatorname{row}\left\{\mathbf{u}_j^k\right\}_{j=1}^{q}, \quad D^k = \widetilde{C}^k U^k, \tag{1.19}$$

где в зависимости от используемых условий нормировки

$$\widetilde{C}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{k\intercal} \\ C \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{d}}^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \langle \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k \rangle) \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}, \tag{1.20a}$$

$$\widetilde{C}^k = \widetilde{C}, \quad \widetilde{\mathbf{d}}^k = \widetilde{\mathbf{d}}, \tag{1.20b}$$

получаем окончательно в матричном виде:

$$F^k U^k = Y^k, \tag{1.21}$$

$$D^k \boldsymbol{\delta}^k = \widetilde{\mathbf{d}}^k, \tag{1.22}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = U^k \boldsymbol{\delta}^k; \quad \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\delta}^k. \tag{1.23}$$

Замечания. 1. Критерий прекращения итерационального процесса может выбираться неоднозначно. Естественным критерием является выполнение условия малости значения функционала (1.5a) или (1.7c). При однородных ограничениях, можно, исключая собственно условие нормировки, использовать функционал (1.5b), или (1.5d).

2. В качестве начального приближения $\mathbf{x}^0$ естественно выбирать вектор, удовлетворяющий ограничениям (1.2), в том числе, используемому условию нормировки.

3. Если ограничения являются однородными, а нормировки (1.3b) преследует лишь цель отличия вектора $\mathbf{x}$ от нуля, то конкретный вид вектора $\mathbf{w}$ не является принципиальным. Тогда при нормировке вектора $\mathbf{x}^k$, например, по фиксированной компоненте с номеров s необходимо проверять, не стремятся ли к бесконечности какие-либо другие его компоненты. Если это имеет место, следует изменить номер нормируемой компоненты. Альтернативой является выбор на каждом шаге процесса для вектора $\mathbf{x}^k$ позиции s^k, отвечающей его максимальной по модулю компоненте, т.е. использование вектора $\mathbf{w}^k = \mathbf{e}_{s^k}$ вместо вектора $\mathbf{w} = \mathbf{e}_s$.

4. Следует учитывать, что по мере приближения $\boldsymbol{\lambda}^k$ к точке спектра $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ матрица $F(\boldsymbol{\lambda}^k)$ приближается к вырожденной матрице. Соответственно системы линейных уравнений (1.21) становятся плохо обусловленными. Подобная ситуация применительно к обычной проблеме собственных значений рассматривалась в [10]. Обобщение предложенной в этой работе модификации метода Ньютона приводится ниже как модификация метода обратных итераций.

5. Вырожденность матрицы D^k зависит только от линейной зависимости столбцов матрицы U^k, т.е. зависит от линейной зависимости столбцов $B_j \mathbf{x}^k$, $j = 1, \ldots, q$, матрицы Y^k, которая имеет место только, если вектор $\mathbf{x}^k$ является собственным вектором, отвечающим точке бесконечной части спектра пучка (1.1).

Большая часть приведенных замечаний будет справедлива и для методов, которые рассматриваются ниже.

1.3. Каждый шаг решения нелинейной системы методом Чебышева осуществляется по формуле

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \mathbf{s}^k - \frac{1}{2}\mathbf{t}^2, \tag{1.24}$$

где ньютоновская поправка $\mathbf{s}^k$ находится как решение системы (1.11), а поправка второго порядка $\mathbf{t}^k$ находится как решение системы

$$\mathbf{f}'^k \mathbf{t}^k = -\mathbf{f}''^k (\mathbf{s}^k)^2. \tag{1.25}$$

Здесь и далее используется обозначение $\mathbf{f}''^k = \mathbf{f}''(\mathbf{z}^k)$, где $\mathbf{f}''(\mathbf{z})$ находится из соотношения $\mathbf{f}''(\mathbf{z})\mathbf{s} = \dfrac{d}{dt}\mathbf{f}'(\mathbf{z} + t\mathbf{s})\big|_{t=0}$.

Представляя вектор $\mathbf{s}$ в виде (1.12), получаем соответственно для (1.3a) и (1.3b):

$$\mathbf{f}''(\mathbf{z})\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j B_j & \operatorname{row}\{-B_j\mathbf{h}\}_{j=1}^{q} \\ 2\mathbf{h}^{\intercal} & \mathbf{0}^{\intercal} \\ \mathbb{O}_{q-1,n} & \mathbb{O}_{q-1,q} \end{bmatrix}, \tag{1.26a}$$

$$\mathbf{f}''(\mathbf{z})\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j B_j & \operatorname{row}\{-B_j\mathbf{h}\}_{j=1}^{q} \\ \mathbb{O}_{q,n} & \mathbb{O}_{q,q} \end{bmatrix}, \tag{1.26b}$$

Тогда система (1.25) для определения поправки

$$\mathbf{t}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^k \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{g}^k \\ \operatorname{col}\{\varepsilon_j^k\}_{j=1}^{q} \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

в зависимости от используемых условий нормировки соответственно принимает вид

$$\begin{cases} F^k\mathbf{g}^k - \sum\limits_{j=1}^{q} \varepsilon_j^k B_j \mathbf{x}^k = -2\sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j \mathbf{h}^k, \\ \langle \mathbf{g}^k, \mathbf{x}^k \rangle = \langle \mathbf{h}^k, \mathbf{h}^k \rangle, \\ C\mathbf{g}^k = \mathbf{0}; \end{cases} \tag{1.28a}$$

$$\begin{cases} F^k\mathbf{g}^k - \sum\limits_{j=1}^{q} \varepsilon_j^k B_j \mathbf{x}^k = -2\sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j \mathbf{h}^k, \\ \widetilde{C}\mathbf{g}^k = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{1.28b}$$

Используя обозначение $\mathbf{v}^k = 2[F^k]^{-1} \sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j \mathbf{h}^k$, получаем соответственно системы:

$$\begin{cases} \mathbf{g}^k = \sum\limits_{j=1}^{q} \varepsilon_j^k \mathbf{u}_j^k - \mathbf{v}^k, \\ \sum\limits_{j=1}^{q} \langle\, \mathbf{u}_j^k, \mathbf{x}^k \,\rangle \varepsilon_j^k = \langle\, \mathbf{h}^k, \mathbf{h}^k \,\rangle + \langle\, \mathbf{v}^k, \mathbf{x}^k \,\rangle, \\ \sum\limits_{j=1}^{q} C \mathbf{u}_j^k \varepsilon_j^k = C \mathbf{v}^k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}^k = \sum\limits_{j=1}^{q} \varepsilon_j^k \mathbf{u}_j^k - \mathbf{v}^k, \\ \sum\limits_{j=1}^{q} \widetilde{C} \mathbf{u}_j^k \varepsilon_j^k = \widetilde{C} \mathbf{v}^k. \end{cases}$$

Используя обозначения (1.19), (1.20) и

$$\mathbf{c}^k = \widetilde{C}^k \mathbf{v}^k + \kappa^k e_1, \quad \mathbf{r}^k = 2 \sum_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j \mathbf{h}^k,$$

где κ^k отличен от нуля только для нормировки (1.3а) и вычисляется по формуле

$$\kappa^k = \langle\, \mathbf{h}^k, \mathbf{h}^k \,\rangle,$$

получаем окончательно для вычисления поправок $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ и $\mathbf{g}^k$:

$$F^k \mathbf{v}^k = \mathbf{r}^k, \tag{1.29}$$

$$D^k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{c}^k, \tag{1.30}$$

$$\mathbf{g}^k = U^k \boldsymbol{\varepsilon}^k - \mathbf{v}^k.$$

Очередные приближения вычисляются по формулам

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}^k - \mathbf{g}^k, \quad \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\delta}^k - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^k.$$

Метод Хэлли (см., например, [10]) решения нелинейной системы основан, как и метод Чебышева, на аппроксимации обратного к $\mathbf{f}$ отображения по значениям $\mathbf{f}(\mathbf{z})$, $\mathbf{f}'(\mathbf{z})$, $\mathbf{f}''(\mathbf{z})$, но с использованием Паде-аппроксимации вида [1/1]. Это приводит к замене итерационной формулы (1.24) на итерационную формулу вида:

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \frac{(\mathbf{s}^k)^2}{\mathbf{s}^k + \frac{1}{2}\mathbf{t}^k},$$

где операции умножения и деления векторов осуществляются покомпонентно.

Таким образом, при решении нелинейной системы (1.4) методом Хэлли очередные приближения находятся по формулам

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{(\mathbf{h}^k)^2}{\mathbf{g}^k + \frac{1}{2}\mathbf{g}^k}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \frac{(\boldsymbol{\delta}^k)^2}{\boldsymbol{\delta}^k + \frac{1}{2}\varepsilon^k}$$

Замечание. Матрицы систем (1.29), (1.30) совпадают соответственно с матрицами систем (1.21), (1.22). Поэтому для их решения целесообразно применять методы, основанные на разложении матрицы системы (например, LU- и QR-разложения).

1.4. Метод касательных гипербол (см., например, [10]), который можно рассматривать как модификацию метода Чебышева, осуществляется по итерационной формуле

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k - \left[\mathbf{f}'^k - \frac{1}{2}\mathbf{f}'^k(\mathbf{f}'^k)^{-1}\mathbf{f}^k\right]^{-1}\mathbf{f}^k,$$

которая при использовании ньютоновской поправки $\mathbf{s}^k = -(\mathbf{f}^k)^{-1}\mathbf{f}^k$ преобразуется к виду:

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \left[I + \frac{1}{2}(\mathbf{f}'^k)^{-1}\mathbf{f}''^k\mathbf{s}^k\right]\mathbf{s}^k. \tag{1.31}$$

Введем следующие обозначения:

$$T^k = \mathbf{f}''^k\mathbf{s}^k, \quad V^k = (\mathbf{f}'^k)^{-1}T^k, \quad W^k = \left(I + \frac{1}{2}V^k\right)$$

Тогда (1.31) принимает вид

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \mathbf{t}^k,$$

где поправка $\mathbf{t}^k$ находится как решение системы

$$W^k\mathbf{t}^k = \mathbf{s}^k. \tag{1.32}$$

Учитывая вид выражений (1.26), запишем матрицу T^k в виде

$$T^k = \begin{bmatrix} -G^k & -Z^k \\ S^k & \mathbb{O}_{q,q} \end{bmatrix},$$

где

$$G^k = \sum_{j=1}^{q} \delta_j^k B_j, \qquad Z^k = \operatorname{row}\left\{B_j \mathbf{h}^k\right\}_{j=1}^{q},$$

а матрица S^k, в зависимости от используемого условия нормирования, имеет вид

$$S^k = \begin{bmatrix} 2\mathbf{h}^{k\intercal} \\ \mathbb{O}_{q-1,n} \end{bmatrix}, \qquad S^k = \mathbb{O}_{q,n}.$$

Учитывая вид выражений (1.13) и введенные выше обозначения, представим $\mathbf{f'}^k$ в факторизованном виде:

$$\mathbf{f'}^k = \begin{bmatrix} F^k & -Y^k \\ \widetilde{C}^k & \mathbb{O}_{q,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^k & \mathbb{O}_{n,q} \\ \mathbb{O}_{q,n} & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \mathbb{O}_{n,q} \\ \widetilde{C}^k & D^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -U^k \\ \mathbb{O}_{q,n} & I_q \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$(\mathbf{f'}^k)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & U^k \\ \mathbb{O}_{q,n} & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \mathbb{O}_{n,q} \\ -(D^k)^{-1}\widetilde{C}^k & (D^k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F^k)^{-1} & \mathbb{O}_{n,q} \\ \mathbb{O}_{q,n} & I_q, \end{bmatrix}$$

и матрица V^k имеет следующее представление:

$$V^k = \begin{bmatrix} \widetilde{G}^k + U^k \widetilde{H}^k & -\widetilde{Z}^k + U^k \widetilde{K}^k \\ \widetilde{H}^k & \widetilde{K}^k \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^k &= -(F^k)^{-1} G^k, & \widetilde{Z}^k &= (F^k)^{-1} Z^k, \\ \widetilde{H}^k &= -M^k \widetilde{G}^k + L^k, & \widetilde{K}^k &= M^k \widetilde{Z}^k, \\ M^k &= (D^k)^{-1} \widetilde{C}^k, & L^k &= (D^k)^{-1} S^k. \end{aligned}$$

Окончательно, матрицы W^k имеет следующее представление:

$$W^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2I_n + \widetilde{G}^k + U^k \widetilde{H}^k & -\widetilde{Z}^k + U^k \widetilde{K}^k \\ \widetilde{H}^k & 2I_q + \widetilde{K}^k \end{bmatrix}$$

После решения системы (1.32) относительно поправки $\mathbf{t}^k$ вида (1.27), находятся очередные приближения

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{g}^k, \quad \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k.$$

В отношении матричных уравнений для определения матриц $\widetilde{G}^k$, $\widetilde{Z}^k$ и M^k, L^k справедливо замечание из предыдущего пункта. К недостатку метода следует отнести необходимость решения дополнительно системы порядка $n+q$.

1.5. Формулы (1.19)–(1.23) метода Ньютона позволяют (как и в однопараметрическом случае [11]) рассматривать этот метод в качестве аналога метода обратных итераций [6]. Однако, в отличие от одномерного случая, в многопараметрическом случае метод обратных итераций не сводится к аналогу степенного метода. Приведем вначале общую схему построения метода для решения задачи (1.4).

Полагая $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{x}$ точными значениями искомых спектральных характеристик и представляя $\boldsymbol{\lambda}$ в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}, \tag{1.33}$$

преобразуем первое уравнение из (1.4) к виду:

$$\left(A - \sum_{j=1}^{q} \beta_j B_j\right)\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{q} \delta_j B_j \mathbf{x}. \tag{1.34}$$

В предположении, что $\boldsymbol{\beta} \notin \sigma_c[F]$ преобразуем (1.34) к виду:

$$\mathbf{x} = U\boldsymbol{\delta}, \tag{1.35}$$

где

$$U = \operatorname{row}\left\{\left(A - \sum_{i=1}^{q} \beta_i B_i\right)^{-1} B_j \mathbf{x}\right\}_{j=1}^{q}.$$

Подставляя (1.35) во второе уравнение из (1.4), получаем

$$\widetilde{C}(\mathbf{x})U\boldsymbol{\delta} = \widetilde{\mathbf{d}}. \tag{1.36}$$

При замене точного значения $\mathbf{x}$ приближенным $\mathbf{x}^k$ и использовании зависящего от номера шага мультипараметра $\boldsymbol{\beta}^k = \operatorname{col}\left\{\beta_j^k\right\}_{j=1}^{q}$ соотношения (1.33), (1.35) и (1.36) принимают вид:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\beta}^k + \boldsymbol{\delta}^k, \tag{1.37}$$

$$\mathbf{x}^k = U^k\boldsymbol{\delta}^k, \tag{1.38}$$

$$\widetilde{C}^k U^k \boldsymbol{\delta}^k = \widetilde{\mathbf{d}}, \tag{1.39}$$

где

$$U^k = \operatorname{row}\left\{(F^k)^{-1} B_j \mathbf{x}^k\right\}_{j=1}^q, \quad F^k = A - \sum_{j=1}^q \beta_j^k B_j .$$

Соотношения (1.37)–(1.39) могут использоваться как для определения поправки $\boldsymbol{\delta}^k$, так и для нахождения очередных приближений $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ и $\mathbf{x}^{k+1}$, последнее из которых нормируется на каждом шаге. Способы выбора мультипараметров $\boldsymbol{\beta}^k$ и $\boldsymbol{\delta}^k$, а также способ нахождения приближения $\boldsymbol{\lambda}^k$ к точке спектра определяют конкретный вариантн метода обратных итераций.

1.5.1. Выбор в качестве $\boldsymbol{\beta}^k$ текущего приближения $\boldsymbol{\lambda}^k$, вычисление $\boldsymbol{\delta}^k$ как решения системы (1.39) и использование соотношений (1.37), (1.38) для нахождения очередных приближений $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ и $\mathbf{x}^{k+1}$ приводит к формулам (1.22), (1.23) метода Ньютона. Такой вариант метода обратных итераций отличается от метода Ньютона только нормировкой итерируемых векторов, которая выполняется на каждом шаге процесса.

Построим модификацию метода обратных итераций с "ньютоновскими" поправками, которая исключала бы необходимость решения плохо обусловленных систем вида (1.32). Использование условий нормировки вектора $\mathbf{x}^k$ по его компоненте с номером s означает, что $x_s^k = x_s^{k+1} = 1$, тогда компонента с номером s результирующего вектора $\mathbf{h}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$ удовлетворяет условию: $h_s^k = 0$. Следовательно, выполняются соотношения

$$F^k \mathbf{h}^k = \overline{F}^k\, \overline{\mathbf{h}}^k, \quad C\mathbf{h}^k = \overline{C}\, \overline{\mathbf{h}}^k,$$

где $\overline{\mathbf{h}}^k$ – вектор размерности $(n-1)$, получаемый исключением у вектора $\mathbf{h}^k$ его нулевой компоненты с номером s, а $\overline{F}^k$ и $\overline{C}$ – матрицы размеров $n \times (n-1)$ и $(q-1)\times(n-1)$, получаемые исключением у матриц F^k и C, соответственно, их столбца с номером s. Тогда система (1.16b) для определения поправок может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} \overline{F}^k & -Y^k \\ \overline{C} & \mathbb{O}_{q-1,q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{h}}^k \\ \boldsymbol{\delta}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F^k \mathbf{x}^k \\ \mathbf{d} - C\mathbf{x}^k \end{bmatrix}.$$

Матрица полученной системы уже не обязательно приближается к вырожденной. К недостатку полученного метода следует отнести необходимость решения системы порядка $n+q$. Возможна модификация метода, когда на каждом шаге процесса (или только в случае необходимости) выбирается номер s^k нормируемой компоненты вектора $\mathbf{x}^k$.

1.5.2. Как и прежде будем использовать в качестве $\boldsymbol{\beta}^k$ текущее приближение $\boldsymbol{\lambda}^k$, но $\boldsymbol{\delta}^k$ будем находить как обобщенное решение системы (1.38), (1.39):

$$\begin{bmatrix} U^k \\ D^k \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \widetilde{\mathbf{d}} \end{bmatrix}, \tag{1.40}$$

где $D^k = \widetilde{C}^{\,k} U^k$ (совместность системы означала бы, что приближение $\mathbf{x}^k$ является точным решением исходной задачи). Тогда применение первой трансформации Гаусса приводит к следующей системе

$$\left({U^k}^H U^k + {D^t}^H D^k\right) \boldsymbol{\delta}^k = {U^k}^H \mathbf{x}^k + {D^k}^H \widetilde{\mathbf{d}}.$$

Полученный метод обратных итераций с “обобщенными” поправками отличается от метода обратных итераций с “ньютоновскими” поправками только способом вычисления $\boldsymbol{\delta}^k$.

Замечание. Обобщенное решение системы (1.40) целесообразно находить не с помощью первой трансформации Гаусса, а используя левосторонее ортогональные преобразования с помощью матриц вращения или отражения.

1.5.3. Рассмотрим вариант метода обратных итераций, когда приближение $\boldsymbol{\lambda}^k$ находится как отношения минимальных невязок (из условия минимизации функционала (1.7а) при фиксированном значении вектора $\mathbf{x}^k$), т.е. как решения системы:

$$ {Y^k}^{\mathsf{T}} Y^k \boldsymbol{\lambda}^k = {Y^k}^{\mathsf{T}} \mathbf{g}^k, \tag{1.41}$$

или как обобщенное решение системы:

$$Y^k \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{g}^k, \tag{1.42}$$

где

$$Y^k = \operatorname{row}\left\{B_j \mathbf{x}^k\right\}_{j=1}^{q}, \quad \mathbf{g}^k = A\mathbf{x}^k.$$

Найденное приближение используется в качестве $\boldsymbol{\beta}^k$, после чего определение $\boldsymbol{\delta}^k$ может осуществляться так же, как в итерациях с “ньютоновскими” или “обобщенными” поправками.

1.6. Предлагаемые ниже методы являются обобщением локально сходящегося градиентного метода [7] решения задачи для пучка постоянных матриц (1.1), когда при фиксированном значении вектора $\mathbf{x}^k$ соответствующее значение $\boldsymbol{\lambda}^k = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}^k)$, которое находится как решение системы (1.41), или как обобщенное решение системы (1.42). При этои условии градиент Фреше $\phi'_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) \equiv \nabla\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x})$ функционала (1.7a), определяемый из условия $\langle \nabla\varphi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}), \mathbf{s} \rangle = \frac{d}{dt}\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}+t\mathbf{s})\big|_{t=0}$, имеет следующий вид:

$$\nabla\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) = F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}.$$

Таким образом, любая ненулевая стационарная точка $\mathbf{x}^*$ функционала является собственным вектором пучка (1.1), отвечающим точке $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}^*)$ его спектра. Вторая производная $\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x})$ функционала (1.7a), вычисленная в стационарной точке, характеризуется для произвольного вектора $\mathbf{h}$ выражением

$$\langle \phi''_{\mathrm{c}}(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{h} - \sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \right\|_E^2.$$

Здесь $d\lambda_j \equiv d\lambda_j(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, $j = 1, \ldots, q$, – компоненты вектора $d\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, являющегося решением системы

$$\breve{A}(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = d\breve{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \tag{1.43}$$

компоненты правой части которой определяются формулами

$$d\breve{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \Big\langle \big(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} B_i + B_i^{\intercal} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\big)\mathbf{x}, \mathbf{h} \Big\rangle, \quad i = 1, \ldots, q.$$

Последовательность приближений $\mathbf{x}^k$, вычисляемых по формулам метода Блума–Родрига [8]:

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}(\mathbf{x}^k), \tag{1.44a}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \frac{\mathbf{y}^{k+1}}{\|\mathbf{y}^{k+1}\|}, \tag{1.44b}$$

где

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{2\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x})}{\|\nabla\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x})\|}\nabla\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}), & \nabla\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \nabla\phi_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1.45}$$

является локально сходящейся к стационарным точкам функционала, в которых достигается его минимум, т.е. к собственным векторам пучка (1.1).

Рассмотрим обобщения этого метода для решения задачи (1.4), получаемые при использовании других функционалов спектральной невязки.

1.6.1. Градиент Фреше функционала (1.7с) в зависимости от используемых условий нормирования имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\nabla\phi_{\circ}(\mathbf{x}) = F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x} + 2e^{a}(\langle\,\mathbf{x},\mathbf{x}\,\rangle - 1)\mathbf{x} + e^{a}C^{\intercal}(C\mathbf{x}-\mathbf{d}),\\
&\nabla\phi_{\circ}(\mathbf{x}) = F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x} + e^{a}\widetilde{C}^{\intercal}(\widetilde{C}\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{d}}).
\end{aligned}\tag{1.46}$$

Очевидно, что собственные векторы пучка (1.1), удовлетворяющие условию (1.2), являются стационарными точками функционала, но не исчерпывают их. Действительно, стационарные точки $\mathbf{x}$ рассматриваемого функционала удовлетворяют соответственно соотношениям:

$$\left(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\,F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^{a}C^{\intercal}\,C\right)\mathbf{x} = 2e^{a}\big(1-\|\mathbf{x}\|^{2}_{E}\big)\mathbf{x} + e^{a}C^{\intercal}\mathbf{d},$$

$$\left(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^{a}C^{\intercal}C\right)\mathbf{x} = e^{a}\widetilde{C}^{\,\intercal}\,\widetilde{\mathbf{d}}.$$

Если все ограничения, за исключением собственного условия нормировки, являются однородными (при $\mathbf{d} = \mathbf{0}$), то выражения (1.46) принимают вид

$$\nabla\phi_{\circ}(\mathbf{x}) = F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\,F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x} + 2e^{a}(\langle\,\mathbf{x},\mathbf{x}\,\rangle - 1)\mathbf{x} + e^{a}C^{\intercal}\,C\mathbf{x},$$

$$\nabla\phi_{\circ}(\mathbf{x}) = F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\,F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x} + 2e^{a}(\langle\,\mathbf{x},\mathbf{w}\,\rangle - 1)\mathbf{w} + e^{a}C^{\intercal}\,C\mathbf{x},$$

а стационарные точки удовлетворяют соответственно соотношениям:

$$\left(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\,F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^{a}C^{\intercal}C\right)\mathbf{x} = 2e^{a}\big(1-\|\mathbf{x}\|^{2}_{E}\big)\mathbf{x},$$

$$\left(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\,F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^{a}C^{\intercal}C\right)\mathbf{x} = e^{a}(1-\langle\,\mathbf{x},\mathbf{w}\,\rangle)\mathbf{w}.$$

Следовательно, стационарная точка $\mathbf{x}^{*}$ является собственным вектором матрицы $\left(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}+e^{a}C^{\intercal}C\right)$, отвечающим при использовании нормировки (1.3а) ее собственному значению $2e^{a}\big(1-\|\mathbf{x}\|^{2}_{E}\big)$, которое равно нулю, если $\mathbf{x}^{*}$ является нормированным вектором, а при использовании нормировки (1.3b) – ее нулевому собственному значению только в случае нормированности вектора $\mathbf{x}^*$.

Вторая производная $\phi_0''(\mathbf{x})$ функционала (1.7c) характеризуется для произвольного вектора $\mathbf{h}$ следующими выражениями:

$$\langle\, \phi_0''(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle = \left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{h} \right\|_E^2 + \left\| e^a C\mathbf{h} \right\|_E^2 - \left\| \sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \mathbf{x} \right\|_E^2 +$$

$$+2e^a\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{h}\,\rangle^2 + 2e^a\big(\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle - 1\big)\langle\, \mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle,$$

$$\langle\, \phi_0''(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle = \left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{h} \right\|_E^2 + \left\| e^a C\mathbf{h} \right\|_E^2 - \left\| \sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \mathbf{x} \right\|_E^2 + e^a\langle\, \mathbf{w}, \mathbf{h}\,\rangle^2,$$

которые на решении задачи (1.4) принимают вид

$$\langle\, \phi_0''(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle = \left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{h} - \sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \mathbf{x} \right\|_E^2 + \left\| e^a C\mathbf{h} \right\|_E^2 + 2e^a\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{h}\,\rangle^2,$$

$$\langle\, \phi_0''(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle = \left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{h} - \sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \mathbf{x} \right\|_E^2 + \left\| e^a C\mathbf{h} \right\|_E^2 + e^a\langle\, \mathbf{w}, \mathbf{h}\,\rangle^2.$$

Существует теоретическая возможность сходимости итерационного процесса (1.44), (1.45), где вместо функционала $\phi_c(\mathbf{x})$ используется функционал $\phi_\text{o}(\mathbf{x})$, к "паразитической" стационарной точке, не являющейся решением задачи (1.4). Для предотвращения этого можно варьировать значение параметра a.

1.6.2. Аналогично при однородных ограничениях для функционала (1.7d) имеем в зависимости от используемых условий нормирования:

$$\nabla\phi_\text{он}(\mathbf{x}) = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle^{-1/2}\Big[\Big(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^a C^{\intercal} C\Big)\mathbf{x}_\text{н} -$$

$$- \Big(\left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_\text{н} \right\|_E^2 + 2e^a \left\| C\mathbf{x}_\text{н} \right\|_E^2\Big)\mathbf{x}_\text{н}\Big],$$

$$\nabla\phi_\text{он}(\mathbf{x}) = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{w}\,\rangle^{-1}\Big[\Big(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^a C^{\intercal} C\Big)\mathbf{x}_\text{н} -$$

$$- \Big(\left\| F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_\text{н} \right\|_E^2 + e^a \left\| C\mathbf{x}_\text{н} \right\|_E^2\Big)\mathbf{w}\Big].$$

Стационарные точки функционала, к которым относятся и удовлетворяющие условию (1.2) собственные векторы пучка (1.1), удовлетворяют соотношениям

$$\Big(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^a C^{\intercal} C\Big)\mathbf{x}_{\text{н}} = \Big(\big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E + 2e^a\big\|C\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E\Big)\mathbf{x}_{\text{н}},$$

$$\Big(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^a C^{\intercal} C\Big)\mathbf{x}_{\text{н}} = \Big(\big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E + e^a\big\|C\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E\Big)\mathbf{w}.$$

Таким образом, только в случае нормировки (1.3a) стационарная точка $\mathbf{x}^*$ является собственным вектором матрицы $\big(F^{\intercal}_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})} + e^a C^{\intercal} C\big)$, отвечающим ее собственному значению $\big(\big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E + e^a\big\|C\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E\big)$.

Вторая производная $\phi''_{\text{он}}(\mathbf{x})$ функционала (1.7d) характеризуется для произвольного вектора $\mathbf{h}$ следующим выражением:

$$\langle\, \phi''_{\text{он}}(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle = \Big(\big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\widehat{\mathbf{h}}\big\|^2_E + e^a\big\|C\mathbf{h}\big\|^2_E -$$

$$-\Big\|\sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \mathbf{x}_{\text{н}}\Big\|^2_E - \big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E\big\|\widehat{\mathbf{h}}\big\|^2_E\Big),$$

где $\widehat{\mathbf{h}} := \mathbf{h}/\|\mathbf{x}\|$, которое на решении задачи (1.4) принимает вид

$$\langle\, \phi''_{\text{он}}(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}\,\rangle = \Big(\Big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\widehat{\mathbf{h}} - \sum_{j=1}^{q} d\lambda_j B_j \mathbf{x}_{\text{н}}\Big\|^2_E - \big\|F_{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{x}_{\text{н}}\big\|^2_E + e^a\big\|C\mathbf{h}\big\|^2_E.$$

Из этого следует, что искомые решения вляются точками минимума рассматриваемого функционала.

Также как и в предыдущем случае, за счет варьирования параметра a, можно предотвращать сходимость итерационного процесса (1.44), (1.45), где вместо функционала $\phi_c(\mathbf{x})$ используется функционал $\phi_{\text{он}}(\mathbf{x})$, к его “паразитической” стационарной точке.

2. Решение “несвязанной” задачи на бесконечности

2.1. Распространим, рассмотренные выше методы, на случай регулярных однородных пучков постоянных матриц:

$$F^{\pi}(\mathring{\boldsymbol{\lambda}})\mathbf{x} := \sum_{j=1}^{q} \mathring{\lambda}_j B_j \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

где $B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 0, 1, \dots, q$, $\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathring{\lambda}_0 : \mathring{\lambda}_1 : \mathring{\lambda}_2 : \dots : \mathring{\lambda}_q)$, а $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Задача (2.1) получается из (1.1) при переходе от аффинного пространства $\mathbb{C}^q$ к проективному пространству $\mathbb{C}\Pi^q$ ($\lambda_j = \mathring{\lambda}_j / \mathring{\lambda}_0$, $j = 1, \dots, q$) с заменой $B_0 := -A$. В этом случае можно находить приближения к точкам как конечного, так и бесконечного спектра пучка (2.1), последние из которых характеризуются условием $\mathring{\lambda}_0 = 0$.

Помимо рассмотренного выше ограничения (1.2), будем использовать также условие нормировки координат точки проективного пространства $\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathring{\lambda}_0 : \mathring{\lambda}_1 : \mathring{\lambda}_2 : \dots : \mathring{\lambda}_q) \in \mathbb{C}\Pi^q$ (компонент $(q+1)$-мерного вектора $\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = \operatorname{col}\{\mathring{\lambda}_j\}_{j=0}^q$):

$$\|\mathring{\boldsymbol{\lambda}}\|_2^2 := \sum_{j=1}^{q} |\mathring{\lambda}_j|^2 = 1. \tag{2.2}$$

Это приводит к нелинейной системе

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{z}_0) := \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{q} \mathring{\lambda}_j B_j \mathbf{x} \\ \widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{d}} \\ \sum\limits_{j=1}^{q} |\mathring{\lambda}_j|^2 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{2.3a}$$

где

$$\mathbf{z}_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathring{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \operatorname{col}\{\mathring{\lambda}_j\}_{j=0}^q \end{bmatrix}. \tag{2.3b}$$

Решение системы отвечает минимальному (нулевому) значению квадрата нормы вектора невязки:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{о}}(\mathbf{z}_0) &= \phi_{\text{о}}(\mathring{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{f}_0\|_E^2 = \\ &= \|F^\pi(\mathring{\boldsymbol{\lambda}})\mathbf{x}\|_E^2 + \|\widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{d}}\|_E^2 + (\|\mathring{\boldsymbol{\lambda}}\|_2^2 - 1), \end{aligned} \tag{2.4a}$$

который будем называть функционалом абсолютной невязки. Если все ограничения, за исключением условия нормировки, являются однородными, можно использовать функционал относительной невязки:

$$\phi_{\text{он}}(\mathbf{z}_0) = \phi_{\text{о}}(\mathring{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{x}_{\text{н}}) = \|F^\pi(\mathring{\boldsymbol{\lambda}})\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2 + \|C\mathbf{x}_{\text{н}}\|_E^2 + (\|\mathring{\boldsymbol{\lambda}}\|_2^2 - 1), \tag{2.4b}$$

который в случае выполнения условия (2.2) нормированности $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ принимает вид:

$$\phi_{\text{он}}(\mathbf{z}_0) = \phi_{\text{о}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{x}_{\text{н}}) = \left\| F^{\pi}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}})\mathbf{x}_{\text{н}} \right\|_E^2 + \left\| C\mathbf{x}_{\text{н}} \right\|_E^2. \tag{2.4c}$$

Здесь, как и прежде, $\mathbf{x}_{\text{н}}$ – вектор, нормированный в соответствии с условием (1.3).

При фиксированном значении вектора $\mathbf{x}$ величина функционала (2.4a) зависит только от первого слагаемого, т.е. определяется вектором невязки системы вида

$$\mathbf{f}_{0_{\overset{\circ}{\lambda}}}(\mathbf{x}) := F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2.5a}$$

где

$$F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})} := \sum_{j=1}^{q} \overset{\circ}{\lambda}_j(\mathbf{x}) B_j, \tag{2.5b}$$

состоящей из n скалярных уравнений относительно n-мерного вектора $\mathbf{x}$. В этом случае значение мультипараметра $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} := \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$ естественно выбирать из условия минимизации нормы вектора невязки системы (2.5). Поэтому помимо функционалов (2.4) будем рассматривать и другие вида функциональной невязки:

- функционал абсолютной спектральной невязки

$$\phi_{\text{ос}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}||\mathbf{f}_{0_{\overset{\circ}{\lambda}}}(\mathbf{x})||_E^2 = \frac{1}{2}||F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})}\mathbf{x}||_E^2; \tag{2.6a}$$

- функционал относительной спектральной невязки

$$\phi_{\text{осн}}(\mathbf{x}) = \phi_{\text{ос}}(\mathbf{x}_{\text{н}}) = \frac{1}{2}||F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_{\text{н}})}\mathbf{x}_{\text{н}}||_E^2; \tag{2.6b}$$

- функционал абсолютной спектральной невязки с ограничениями

$$\phi_{\text{оо}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}||F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})}\mathbf{x}||_E^2 + \frac{1}{2}||\widetilde{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{d}}||_E^2. \tag{2.6c}$$

- функционал относительной спектральной невязки с однородными ограничениями

$$\phi_{\text{оон}}(\mathbf{x}) = ||F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_{\text{н}})}\mathbf{x}_{\text{н}}||_E^2 + \frac{1}{2}||C\mathbf{x}_{\text{н}}||_E^2. \tag{2.6d}$$

• функционал абсолютной спектральной невязки с нормировкой

$$\phi_{\text{осн}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|F^{\pi}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_{\text{н}})}\mathbf{x}_{\text{н}}\|^2_E + \frac{1}{4}e^a\big(\|\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\|^2_E - 1\big). \qquad (2.6e)$$

При этом предполагается, что выполнено условие (2.2) нормировки $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При фиксированном значении вектора* $\mathbf{x}$ *функционал абсолютной спектральной невязки* (2.6a) *достигает минимума на нормированном собственном векторе* $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^{q+1}$, *соответствующим наименьшему собственному значению* $\gamma(\mathbf{x})$ *матрицы*

$$\check{C}(\mathbf{x}) = \operatorname{matr}\big\{\big\langle B_j\mathbf{x}, B_i\mathbf{x}\big\rangle\big\}^q_{i,j=0}, \qquad (2.7)$$

Доказательство. Условный экстремум функционала (2.6a)

$$\phi_{\text{ос}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left\langle \sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}_j B_j\mathbf{x}, \sum_{p=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}_p B_p\mathbf{x}\right\rangle = $$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\langle B_j\mathbf{x}, B_p\mathbf{x}\rangle\overset{\circ}{\lambda}_j\overset{\circ}{\lambda}_p = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}^{\intercal}\check{C}\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$$

при ограничении (2.2) определяется как экстремум функции Лагранжа

$$\phi_{\text{Loc}}(\mathbf{x}) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}^{\intercal}\check{C}\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{1}{2}\gamma\left(1 - \sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}{}^2_j\right), \qquad (2.8)$$

где γ – постоянный множитель. Дифференцируя (2.8):

$$d\phi_{\text{Loc}}(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{q}\left(\sum_{j=0}^{q}\check{c}_{jp}\overset{\circ}{\lambda}_j - \gamma\overset{\circ}{\lambda}_p\right)d\overset{\circ}{\lambda}_p + \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}{}^2_j\right)d\gamma,$$

приходим к выводу, что его стационарные точки определяются соотношениями

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{q}\check{c}_{jp}\overset{\circ}{\lambda}_j = \gamma\overset{\circ}{\lambda}_p, \quad p = 0, 1, \dots, q; \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}{}^2_j = 1. \end{cases}$$

Таким образом, любая стационарная точка $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ является нормированным собственным вектором, отвечающим собственному значению γ самосопряженной матрицы $\check{C}(\mathbf{x})$, являющейся матрицей Грама. В случае линейной независимости векторов $B_j\mathbf{x}$, $j = 0, 1, \ldots, q$, она является положительно определенной. Дифференциал второго порядка функционала (2.8) имеет вид

$$d^2\phi_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{q}\left(\sum_{j=0}^{q}\check{c}_{jp}\,d\overset{\circ}{\lambda}_j\,d\overset{\circ}{\lambda}_p - \gamma\overset{\circ}{\lambda}{}_p^2\right) - \sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}_j\,d\overset{\circ}{\lambda}_j\,d\gamma.$$

Условный минимум функционала (2.8) определяется соотношениями

$$d^2\phi_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{x}) > 0, \qquad \sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}_j\,d\overset{\circ}{\lambda}_j = 0.$$

Следовательно, должно выполняться неравенство

$$\sum_{p=0}^{q}\left(\sum_{j=0}^{q}\check{c}_{jp}\,d\overset{\circ}{\lambda}_j\,d\overset{\circ}{\lambda}_p - \gamma\overset{\circ}{\lambda}{}_p^2\right) \equiv d\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}^{\mathsf{T}}(\check{C} - \gamma I)\,d\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} > 0, \tag{2.9a}$$

при выполнении условия

$$\sum_{j=0}^{q}\overset{\circ}{\lambda}_j\,d\overset{\circ}{\lambda}_j = 0. \tag{2.9b}$$

Пусть γ_j, $j = 0, 1, \ldots, q$, – собственные значения матрицы $\check{C}$, упорядоченные по невозрастанию

$$0 < \gamma_0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_q,$$

а $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$, – соответствующие им собственные векторы. Следовательно, квадратичная форма, определяемая матрицей $(\check{C} - \gamma I)$, только при $\gamma = \gamma_0$ является полуположительно определенной, причем в нуль она обращается только на соответствующем собственном векторе $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}_0$. Поскольку условие (2.9b) означает ортогональность векторов $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ и $d\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$, то из этого следует справедливость неравенства (2.9a).

В случае линейной зависимости векторов $B_j\mathbf{x}$, $j = 0, 1, \ldots, q$, матрица $\check{C}$ является полуположительно определенной. Ее наименьшее собственное значение $\gamma_0 = 0$, причем соответствующий

ему собственный вектор $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_0$ является точкой спектра пучка (2.1).
$\square$

Замечания. 1. При любом числе $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha\mathbf{x})$, поэтому в функционалах (2.6b), (2.6d) $F^{\pi}_{\mathring{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_{\text{н}})}$ можно заменить на $F^{\pi}_{\mathring{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})}$. При фиксированном значении вектора $\mathbf{x}$ функционалы (2.6b)–(2.6e) достигают минимума в той же точке, что и функционал (2.6a).

2. В случае линейной зависимости векторов $B_j\mathbf{x}$, $j = 0, 1, \ldots, q$, вектор $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_0$ можно искать как нетривиальное решение однородной системы

$$Y_0\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0},$$

где $Y_0 = \operatorname{row}\{B_j\mathbf{x}\}_{j=0}^{q}$.

Все, описываемые ниже методы решения системы (2.3), получаются аналогично рассмотренным выше методам решения системы (1.4). При этом используются введенные выше обозначения и остаются справедливыми приведенные выше замечания.

2.2. Очередные приближения к решению системы (2.3) метода Ньютона вычисляются по формулам

$$\mathbf{x}^{k+1} = U_0^k\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k; \quad \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^k + \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k, \tag{2.10}$$

где поправка $\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k = \operatorname{col}\{\mathring{\delta}_j^k\}_{j=0}^{q}$ находится из соотношений:

$$F^{\pi\,k}U_0^k = Y_0^k, \qquad \widetilde{D}_0^k\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k = \widetilde{\mathbf{d}}_0^k. \tag{2.12}$$

Здесь и далее

$$F^{\pi\,k} = \sum_{j=0}^{q}\mathring{\lambda}_j^k B_j, \quad Y_0^k = \operatorname{row}\{B_j\mathbf{x}^k\}_{j=0}^{q}, \tag{2.13}$$

$$\widetilde{D}_0^k = \begin{bmatrix} \widetilde{C}^{\,k}U_0^k \\ \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k\,\intercal} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{d}}_0^k = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{d}}^{\,k} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{j=0}^{q}|\mathring{\lambda}_j^k|^2\right) \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

2.3. Приближения к решению системы (2.3) методами Чебышева и Хэлли вычисляются соответственно по формулам

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}^k - \frac{1}{2}\mathbf{g}^k, \quad \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^k + \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k - \frac{1}{2}\mathring{\varepsilon}^k,$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{(\mathbf{h}^k)^2}{\mathbf{h}^k + \frac{1}{2}\mathbf{g}^k}, \quad \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^k + \frac{(\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k)^2}{\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k + \frac{1}{2}\mathring{\varepsilon}^k},$$

где $\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k$ и $\mathbf{h}^k = U_0^k\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k - \mathbf{x}^k$ – "ньютоновские" поправки, а поправки второго порядка $\mathring{\varepsilon}^k$ и $\mathbf{g}^k$ определяются из соотношений:

$$F^{\pi k}\mathbf{v}^k = \mathbf{r}^k, \quad \widetilde{D}_0^k\varepsilon^k = \widetilde{\mathbf{c}}_0^k, \quad \mathbf{g}^k = -U_0^k\mathring{\varepsilon}^k - \mathbf{v}^k.$$

Здесь

$$\mathbf{r}^k = 2\sum_{j=0}^{q}\mathring{\delta}_j^k B_j\mathbf{h}^k, \quad \widetilde{\mathbf{c}}_0^k = \begin{bmatrix} -\widetilde{C}^k\mathbf{v}^k + \kappa^k\mathbf{e}_1 \\ \langle\, \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k, \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k \,\rangle \end{bmatrix}.$$

2.4. Приближения к решению системы (2.3) методом касательных гипербол вычисляются по формулам:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{g}^k, \quad \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^k + \mathring{\varepsilon}^k,$$

где поправки $\mathbf{g}^k$ и $\mathring{\varepsilon}^k$ находятся из решения системы

$$W_0^k\begin{bmatrix}\mathbf{g}^k \\ \mathring{\varepsilon}^k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}^k \\ \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k\end{bmatrix},$$

матрица W_0^k которой имеет следующее представление

$$W_0^k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I_n + \widetilde{G}_0^k - U_0^k\widetilde{H}_0^k & -\widetilde{Z}_0^k - U_0^k\widetilde{K}_0^k \\ \widetilde{H}_0^k & 2I_{q+1} + \widetilde{K}_0^k \end{bmatrix},$$

где

$$\widetilde{G}_0^k = (F^{\pi k})^{-1}G_0^k, \quad \widetilde{Z}_0^k = (F^{\pi k})^{-1}Z_0^k,$$

$$G_0^k = \sum_{j=0}^{q}\mathring{\delta}_j^k B_j, \quad Z_0^k = \operatorname{row}\{B_j\mathbf{h}^k\}_{j=0}^{q};$$

$$\widetilde{H}_0^k = -M_0^k\widetilde{G}_0^k + L_0^k, \quad \widetilde{K}_0^k = M_0^k\widetilde{Z}_0^k + N_0^k,$$

$$M_0^k = (\widetilde{D}_0^k)^{-1}P^k, \quad L_0^k = (\widetilde{D}_0^k)^{-1}S_0^k, \quad N_0^k = (\widetilde{D}_0^k)^{-1}Q_0^k,$$

$$\widetilde{D}_0^k = \begin{bmatrix} \widetilde{C}^k U_0^k \\ \mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k\intercal} \end{bmatrix}, \quad Q_0^k = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{q,q+1} \\ 2\mathring{\boldsymbol{\delta}}^{k\intercal} \end{bmatrix}, \quad P^k = \begin{bmatrix} \widetilde{C}^{\,k} \\ \mathbf{0}_n^\intercal \end{bmatrix},$$

и в зависимости от используемого условия нормирования

$$S_0^k = \begin{bmatrix} 2\mathbf{h}^{k\intercal} \\ \mathbb{O}_{q,n} \end{bmatrix}, \quad S_0^k = \mathbb{O}_{q+1,n}.$$

2.5. Метод обратных итераций для решения задачи (2.4), как и в предыдущем случае, получим, используя представление мультипараметров $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}$ в виде:

$$\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = \mathring{\boldsymbol{\beta}} + \mathring{\boldsymbol{\delta}}, \tag{2.15}$$

что приводит к соотношениям

$$\mathbf{x} = -U_0\mathring{\boldsymbol{\delta}}, \tag{2.16}$$

$$\widetilde{C}(\mathbf{x})U_0\mathring{\boldsymbol{\delta}} = -\widetilde{\mathbf{d}}, \tag{2.17}$$

где

$$U_0 = \operatorname{row}\left\{\left(\sum_{i=0}^{q}\mathring{\beta}_i B_i\right)^{-1} B_j\mathbf{x}\right\}_{j=0}^{q},$$

которые пополняются соотношением

$$\sum_{j=0}^{q}\mathring{\beta}_j\mathring{\delta}_j = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{q}|\mathring{\delta}_j|^2, \tag{2.18}$$

имеющим место при нормированности обоих мультипараметров $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}$ и $\mathring{\boldsymbol{\beta}}$.

При замене точного значения $\mathbf{x}$ приближенным $\mathbf{x}^k$ и использовании зависящего от номера шага мультипараметра $\mathring{\boldsymbol{\beta}}^k = \operatorname{col}\{\mathring{\beta}_j^k\}_{j=0}^{q}$, соотношения (2.15)–(2.17) принимают вид:

$$\mathring{\boldsymbol{\lambda}} = \mathring{\boldsymbol{\beta}}^k + \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{x}^k = U_0^k\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k, \tag{2.20}$$

$$\widetilde{C}^{\,k}U_0^k\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k = \widetilde{\mathbf{d}}, \tag{2.21}$$

где
$$U_0^k = \text{row}\left\{\left(F^{\pi k}\right)^{-1} B_j \mathbf{x}^k\right\}_{j=0}^q, \quad F^{\pi k} = \sum_{j=0}^q \mathring{\beta}_j^k B_j.$$

а соотношение (2.18), при отбрасывании величины второго порядка малости, принимает вид
$$\sum_{j=0}^q \mathring{\beta}_j^k \mathring{\delta}_j^k = 0. \tag{2.22}$$

Соотношения (2.19)–(2.22) могут использоваться для определения поправки $\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k$, а также для нахождения очередных приближений $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1}$ и $\mathbf{x}^{k+1}$.

2.5.1. Выбор в качестве $\mathring{\boldsymbol{\beta}}^k$ текущего приближения $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}^k$, вычисление $\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k$ как решения системы (2.21), (2.22) и использование соотношений (2.19), (2.20) для нахождения очередных приближений $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1}$ и $\mathbf{x}^{k+1}$ приводит к формулам (2.10)–(2.14) метода Ньютона. Такой вариант метода обратных итераций отличается от метода Ньютона только нормировками приближений, которые выполняются на каждом шаге процесса.

Модифицированный вариант метода обратных итераций с "ньютоновскими" поправками, исключающий необходимость решения плохо обусловленных систем при использовании нормировки вектора $\mathbf{x}^k$ по его компоненте с номером s, приводит к системе
$$\begin{bmatrix} \overline{F}^{\pi k} & Y_0^k \\ \overline{C} & \mathbb{O}_{q-1,q+1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^{\intercal} & \text{row}\,\{\mathring{\lambda}_j^k\}_{j=0}^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{h}}^k \\ \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F^{\pi k}\mathbf{x}^k \\ \mathbf{d} - C\mathbf{x}^k \\ 0 \end{bmatrix},$$
где вектор $\overline{\mathbf{h}}^k$, матрицы $\overline{F}^{\pi k}$ и $\overline{C}$ определяются также, как и в п. 1.5.1.

2.5.2. Как и прежде будем использовать в качестве $\mathring{\boldsymbol{\beta}}^k$ текущее приближение $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}^k$, но "поправку" $\mathring{\boldsymbol{\delta}}^k$ будем находить как обобщенное решение системы (2.20), (2.21):
$$\begin{bmatrix} U_0^k \\ D_0^k \end{bmatrix} \mathring{\boldsymbol{\delta}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \widetilde{\mathbf{d}} \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

или системы (2.20)–(2.22):

$$\begin{bmatrix} U_0^k \\ \widetilde{D}_0^k \end{bmatrix} \overset{\circ}{\boldsymbol{\delta}}{}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \widetilde{\mathbf{d}}_0 \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

где

$$D_0^k = \widetilde{C}^{\,k} U_0^k, \quad \widetilde{D}_0^k = \begin{bmatrix} D_0^k \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}^{k\intercal} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{d}}_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{d}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получены два варианта метода обратных итераций с “обобщенными” поправками.

2.5.3. Как и в случае неоднородной задачи, будем находить приближения $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}^k$ к точке спектра как отношения минимальных невязок (из условия минимизации функционала (2.6a) при фиксированном значении вектора $\mathbf{x}^k$), т.е. как нормированный собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению матрицы $\check{C}(\mathbf{x}^k)$ вида (2.7):

$$\check{C}(\mathbf{x}^k)\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}^k = \gamma^k \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}^k.$$

Найденное приближение используется в качестве $\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}}{}^k$, после чего определение $\overset{\circ}{\boldsymbol{\delta}}{}^k$ может осуществляться так же, как в итерациях с “ньютоновскими” поправками, используя систему (2.21), (2.22), или с “обобщенными” поправками, используя систему (2.23) или (2.24).

3. Обобщения

С одной стороны, большая часть описанных выше методов может быть обобщена на комплексный случай. С другой стороны, методы могут быть распространены на случай полиномиальных матриц (как через использование сопровождающего пучка, так и непосредственно).

Наконец, “связанная” задача для регулярных пучков постоянных матриц

$$F_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x} := \Big(A_i - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_{ij}\Big)\mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, q \tag{3.1}$$

где A_i, $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $i, j = 1, \dots, q$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$, а $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} \setminus \{\mathbf{0}\}$ при использовании нормировок вида (1.3):

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 1, \quad i = 1, \dots, q, \tag{3.2a}$$

или

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{w}_i \rangle = 1, \quad i = 1, \dots, q, \tag{3.2b}$$

где $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^{n_i} \setminus \{\mathbf{0}\}$, может быть сведена к задаче (1.4), нде

$$\mathbf{x} := \operatorname{col} \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^q,$$

$$F(\boldsymbol{\lambda}) := \operatorname{diag} \{F_i(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^q \equiv A - \sum_{j=1}^q \lambda_j B_j,$$

где

$$A := \operatorname{diag} \{A_i\}_{i=1}^q, \quad B_j := \operatorname{diag} \{B_{ij}\}_{i=1}^q, \quad j = 1, \dots, q,$$

и в зависимости от используемых условий нормирования

$$\widetilde{C}(\mathbf{x}) = \operatorname{diag} \{\mathbf{x}_i^{\intercal}\}_{i=1}^q, \quad \widetilde{\mathbf{d}} = \operatorname{col} \{1\}_{i=1}^q,$$

$$\widetilde{C}(\mathbf{x}) = \operatorname{diag} \{\mathbf{w}_i^{\intercal}\}_{i=1}^q, \quad \widetilde{\mathbf{d}} = \operatorname{col} \{1\}_{i=1}^q,$$

Поэтому описанные выше методы могут быть распространены на решение задачи (3.1), (3.2). При этом необходимость явного формирования матриц A, B_j, $j = 1, \dots, q$ не возникает (см., например, [2]).

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–330.
2. В. Б. Хазанов, *Методы решения многопараметрических задач.* Algorithms 89, Proc. 10th Simp. Algorithms, Bratislava (1989), pp. 46–48.
3. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
4. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **248** (1998), 165–186.
5. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 177–191.

6. E. K. Blum, A. F. Chang, *A numerical methods for the solution of the double eigenvalue problems.* — J. Inst. Math. Appl. **22, No. 1** (1978), 29–42.
7. E. K. Blum, A. R. Curtis, *A convergent gradient method for matrix eigenvector-eigenvalue problems.* — Numer. Math. **31, No. 3** (1978), 247–263.
8. E. K. Blum, G. H. Rodrigue, *Solutions of eigenvalue problems in Hilbert spaces by a gradient method.* — J. Comput. System Sci. **2** (1974), 220–237.
9. A. Cuit, *Pade approximats for operators: Theory and applications.* — Lect. Notes Math. **1065** (1984).
10. G. Peters, J. H. Wilkinson, *Inverse iteration, ill-conditional equations and Newton's method.* — SIAM Reviev **21, No. 3** (1979), 339–360.

Khazanov V. B. Methods for solving spectral problems for multiparameter matrix pencils.

Method for solving the partial eigenproblem for multiparameter regular pencils of real matrices, which allow to improve given approximations of an eigenvector and the associated point of the spectrum (both finite and infinite) are suggested. The possibility of extending the methods to complex matrices, polynomial matrices, and coupled multiparameter problems is indicated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 апреля 2003 г.