Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕГУЛЯРНОГО СПЕКТРА МАТРИЦЫ

Введение. В статье продолжаются исследования по применению метода факторизаций (ΔW-q метода) к решению многопараметрических задач алгебры с полиномиальным вхождением параметров (см. [1–4]). Рассматриваются методы вычисления полиномов (наследственных полиномов), нули которых в пространстве $\mathbb{C}^q$ образуют цилиндрические многообразия регулярного спектра q-параметрической полиномиальной матрицы в предположении, что сингулярный и регулярный спектры матрицы не имеют общих точек.

Ниже будут использованы следующие обозначения и разложения матриц.

$\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ множество q-параметрических полиномиальных $m\times n$ матриц $F := F(\mu_1,\dots,\mu_q)$ ранга ρ; $f_k[F]$ – общий наибольший делитель всевозможных миноров порядка $\rho - k$ матрицы F; $f[F] := f_0[F]$ – характеристический полином F, $\varepsilon[F]$ – минимальный полином F.

Представления вида

$$f[F] = \varphi[F]g[F], \quad f_k[F] = \varphi_k[F]g_k[F]$$

есть неполная относительная факторизация (НОФ) [4] скалярных полиномов f и f_k от q-переменных, так что g и g_k являются примитивными полиномами над кольцом полиномов от $(q-1)$-переменных из множества $\{\mu_1,\dots,\mu_q\}$; φ и φ_k суть полиномы нули каждого из которых не зависят по крайней мере от одного из параметров.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (02-01-00095) и НШ-2268.2003.1.

Введем в рассмотрение наследственные полиномы

$$\psi_k[F] = \frac{\varphi_{k-1}[F]}{\varphi_k[F]}, \quad k = 1, \dots, u_1 - 1, \quad \psi_{u_1} = \mathrm{const}\,.$$

Тогда[1]

$$\varepsilon[F] = \frac{f[F]}{f_1[F]} = h_1[F]\psi_1[F],$$

где $h_1[F] = \frac{g[F]}{g_1[F]}$, $\psi_1[F] = \frac{\varphi[F]}{\varphi_1[F]}$ есть минимальный наследственный полином. Множества $\sigma[F]$, $\sigma_r[F]$, $\sigma_s[F]$ обозначают соответственно спектр, регулярный спектр и сингулярный спектр матрицы F; $\mathfrak{M}[F] := \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$.

Множество $\sigma_r[F]$ представим в виде:

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F],$$

где $\sigma_r[F] = \{\overline{\mu} \mid f[F] = 0\}$; $\sigma_{r1}[F] = \{\overline{\mu} \mid \varepsilon[F] = 0\}$; $\sigma_{r2}[F] = \{\overline{\mu} \mid \varphi_1[F] = 0\}$. Через $\overline{\mu}_{q-k}$ обозначим мультипарамет: $\overline{\mu}_{q-k} = (\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_q)$.

В статье будут использованы следующие факторизации матриц.

1) ΔW-q-факторизация (см. [1, 2]) $F = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ вида

$$FW = [\Delta, 0].$$

Здесь 0-нулевая $n \times (n-m)$ матрица, $\Delta \in \mathcal{F}_m^{m\times m}$, $W \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$, $W = [W_1, W_0]$, $W_0 \in \mathcal{F}_{n-m}^{n\times(n-m)}$. Столбцы матрицы $W_0 := W_0[F]$ образуют базис $N_c[F]$, не зависящий от параметра λ.

2) Неполная относительная факторизация (НОФ) матрицы [4].

$\bullet\rfloor$ Левая неполная относительная факторизация матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ вида

$$F = \overline{P}\ \overline{F}.$$

Здесь $\overline{P} = \prod\limits_{k=1}^{q} \overline{\nabla}_k(\overline{\mu}_{q-k})$ есть регулярная q-параметрическая матрица, собственные значения которой зависят от $(q-1)$ параметров; $\overline{\nabla}_k(\overline{\mu}_{q-k})$ есть регулярная матрица, собственные значения

[1] Под делением $\frac{p}{p_1} = p_2$ полиномов от многих переменных понимается выполнение соотношений $p = p_1 p_2 = p_2 p_1$, где множество $\{\overline{\mu} \mid p_1 = 0\}$ дополняет $\{\overline{\mu} \mid p_2 = 0\}$ до $\{\overline{\mu} \mid p = 0\}$.

которой не зависят от параметра μ_k; $\overline{F}$ – q-параметрическая $m\times n$ матрица ранга m, регулярный спектр которой состоит из объединения нулей полиномов $\varphi_1[F]$ и $g[F]$.

•⌋ Правая неполная относительная факторизация матрицы $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$,

$$F = \widehat{F}\widehat{P}.$$

Здесь $\widehat{P} = \prod\limits_{k=q}^{\prime} \nabla_k^{\mathsf{T}}(\overline{\mu}_{q-k})$ есть регулярная q-параметрическая матрица, собственные значения которой зависят от $(q-1)$ параметров; $\nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ есть регулярная матрица, собственные значения которой не зависят от параметра μ_k; $\widehat{F}$ – q-параметрическая $m\times n$ матрица ранга n, регулярный спектр которой состоит из объединения нулей полиномов $\varphi_1[F]$ и $g[F]$.

3) ∇V-q-факторизация [2] матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ вида

$$F = \nabla V.$$

Здесь $\nabla \in \mathcal{F}_m^{m\times m}$, $V \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ при этом, если $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$, то $\sigma_r[\nabla] = \sigma_r[F]$, $\sigma_r[V] = \varnothing$.

Алгоритм реализации факторизаций 1)–3), их свойства см. [1–4].

$N_c[F]$ обозначает нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы F: $W_0 := W_0[F]$ – базисная матрица $N_c[F]$, спектр которой не зависит от ведущего параметра λ матрицы F, записанной в виде матричного полинома: $F = \sum\limits_k \lambda^k C_k(\overline{\mu})$, где $C_k(\overline{\mu})$ – полиномиальные матрицы от $(q-1)$ параметров. Вычисление W_0 осуществляется с использованием алгоритма ΔW-q-факторизации. $\widehat{W_0} := \widehat{W_0}[F]$ – базисная матрица $N_c[F]$, спектр которой не содержит нулей минимального полинома. Вычисление $\widehat{W_0}$ осуществляется применением алгоритма неполной относительной факторизации к матрице $W_0[F]$.

1. Постановка задачи.

Пусть $F = F(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть q-параметрическая полиномиальная матрица полного ранга ($q \geqslant 2$). Для определенности $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$.

Множество точек конечного регулярного спектра $\sigma_r[F]$ матрицы F, не зависящих, по крайней мере, от одного параметра λ, образует в пространстве $\mathbb{C}^q$ цилиндрическое многообразие $\sigma_{rz}[F]$, конечного регулярного спектра F, относительно параметра λ. При этом $\sigma_{rz}[F]$ состоит из одного цилиндрического многообразия $\sigma_{rz\lambda}[F]$, если точки $\sigma_r[F]$ не зависят от одного параметра λ; $\sigma_{rz}[F] = \bigcup\limits_{i=1}^{q} \sigma_{rzi}[F]$, если в $\sigma_r[F]$ можно выделить множества $\sigma_{rzi}[F]$, $i = 1, \ldots, q_1 \leqslant q$, где точки множества с номером i не зависят от параметра μ_i. Здесь $\sigma_{rzi}[F]$ обозначает цилиндрическое многообразие в пространстве $\mathbb{C}^q$ относительно параметра μ_i, составленное из точек $\sigma_r[F]$, не зависящих от параметра μ_i. Очевидно, $\sigma_{rz}[F]$ совпадает с множеством нулей полинома $\varphi[F]$, т.е. с множеством нулей наследственных полиномов $\psi_k[F]$, $k = 1, \ldots, u_1 - 1$, и наоборот, множество нулей полинома $\varphi[F]$ образует $\sigma_{rz}[F]$. Задача вычисления $\sigma_{rz}[F]$ сводится к нахождению наследственных полиномов матрицы F и вычислению их нулей. Представим $\sigma_{rz}[F]$ в виде

$$\sigma_{rz}[F] = \sigma_{rz}^{(1)}[F] \cup \sigma_{rz}^{(2)}[F],$$

где $\sigma_{rz}^{(1)}[F]$ состоит из цилиндрических многообразий, образованных точками из $\sigma_{r1}[F]$, собственного регулярного спектра матрицы F; $\sigma_{rz}^{(2)}[F]$ состоит из цилиндрических многообразий, образованных точками из $\sigma_{r2}[F]$, смешанного регулярного спектра. В терминах наследственных полиномов $\sigma_{rz}^{(1)}[F] = \{\overline{\mu} \mid \psi_1[F] = 0\}$, $\sigma_{rz}^{(2)}[F] = \{\overline{\mu} = 0 \mid \varphi_1[F] = 0\}$, $\varphi_1[F] := \psi_2[F] \ldots [\psi_{u_1-1}[F]$, $\psi_{u_1} =$ const.

Ниже рассматриваются методы вычисления $\sigma_{rz}[F]$, основанные на использовании метода неполной относительной факторизации некоторых вспомогательных матриц. В п. 2 предлагается метод вычисления цилиндрических многообразий $\sigma_{rz}^{(1)}[F]$ как в пространстве $\mathbb{C}^q$, так и в пространствах $\mathbb{C}^{q-t}$, $t \geqslant 1$. В пп. 3 и 4 для вычисления цилиндрических многообразий $\sigma_{rz}^{(1)}[F]$ и $\sigma_{rz}^{(2)}[F]$ рассматриваются ψW- и ψV-методы, ранее предложенные автором [3] для вычисления наследственных полиномов двухпараметрической матрицы, все точки регулярного спектра которой не зависят от одного параметра. Оба метода обобщаются на случай q-параметрических полиномиальных матриц полного ранга общего вида, т.е. матриц, регулярный спектр которых может содержать как точки, не зависящие от одного (нескольких) параметров, так и точки, зависящие от всех параметров. При этом присутствие цилиндрических многообразий в пространствах $\mathbb{C}^{q-t}$, $t \geqslant 1$, не исключается.

Цилиндрическим многообразием в пространстве $\mathbb{C}^{q-t}$, составленным из точек $\sigma_r[F]$, будем называть совокупность точек $\sigma_r[F]$, каждая из которых не зависит от фиксированных $(t+1)$-параметров.

2. Вычисление $\sigma_{rz}^{(1)}[F]$.

Рассмотрим применение метода неполной относительной факторизации к вычислению цилиндрических многообразий $\sigma_{rzi}[F]$ из точек $\sigma_{r1}[F]$ в пространстве $\mathbb{C}^q$ относительно параметра μ_i, $i = 1, \ldots, q$. С этой целью к матрице $F_q := F \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$ следует применить метод НОФ из [4], т.е. представить F_q в виде

$$F_q = \overline{P}_{q-1}\overline{F}_q,$$

где $\overline{P}_{q-1} := \prod_{i=1}^{q} \overline{\nabla}_i(\overline{\mu}_{q-i})$ – регулярная матрица, точки спектра которой суть нули нетривиальных полиномов $\det \overline{\nabla}_i(\overline{\mu}_{q-i})$, не зависящие от параметра μ_i, $i = 1, \ldots, q$. Среди полиномов $\det \overline{\Delta}_i$ могут быть тривиальные. Если $\det \overline{P}_{q-1} \neq \mathrm{const}$, то нули каждого нетривиального полинома $\det \overline{\nabla}_i(\overline{\mu}_{q-i})$ образуют в пространстве $\mathbb{C}^q$ цилиндрическое многообразие $\sigma_{rzi}^{(1)}[F]$ относительно параметра μ_i. Так что объединение $\sigma_{rzi}^{(1)}[F]$ по всем параметрам μ_i, $i = 1, \ldots, q$, образует $\sigma_{rz}^{(1)}[F]$, т.е. совокупность цилиндрических многообразий в пространстве $\mathbb{C}^q$ из точек $\sigma_{r1}[F]$.

Равенство $\det \overline{P}_{q-1} = \mathrm{const}$ является необходимым и достаточным условием отсутствия в $\sigma_{r1}[F]$ цилиндрических многообразий. Справедливость этого утверждения следует из свойств НОФ.

Если $\det \overline{P}_{q-1} \neq \mathrm{const}$, то вычисление цилиндрических многообразий в пространствах $\mathbb{C}^{q-t}$, $t \geqslant 1$, можно продолжить. Так для установления существования и вычисления цилиндрических многообразий из точек $\sigma_{rq}[F]$ в пространстве $\mathbb{C}^{q-1}$ следует вычислить неполную относительную факторизацию каждой неунимодулярной матрицы $\overline{\nabla}_i(\overline{\mu}_{q-i})$, входящей множителем в матрицу $\overline{P}_{q-1}$:

$$F_{q_1}^{(i)} := \overline{\nabla}_i(\overline{\mu}_{q-i}) = \overline{P}_{q_1-1}^{(i)}\overline{F}_{q_1}^{(i)},$$

где $\overline{P}_{q_1-1}^{(i)} = \prod_{i_1=1}^{q_1} \overline{\nabla}_{i_1}(\overline{\mu}_{q_1-i_1})$, $q_1 := q-1$. Совокупность нулей нетривиальных полиномов $\det \overline{\nabla}_{i_1}(\overline{\mu}_{q_1-i_1})$; $i = 1, \ldots, q$; $i_1 = 1, \ldots, q_1$, образуют все цилиндрические многообразия из точек $\sigma_{r1}[F]$ в пространстве $\mathbb{C}^{q_1} \equiv \mathbb{C}^{q-1}$. Условие $\det \overline{P}_{q_1-1} = \mathrm{const}$ означает отсутствие цилиндрических многообразий из точек $\sigma_{r1}[F]$ в пространстве $\mathbb{C}^{q-1}$. Если $\det \overline{P}_{q_1-1} \neq \mathrm{const}$, то вычисление цилиндрических многообразий из точек $\sigma_{r1}[F]$ в пространстве $\mathbb{C}^{q-2}$ аналогично можно продолжить. Вычисление цилиндрических многообразий в пространствах $\mathbb{C}^q$, $\mathbb{C}^{q-1}, \ldots, \mathbb{C}^{q-r}$ заканчивается на шаге r, когда $\det \overline{P}_{q_r-1} = \mathrm{const}$.

В частном случае, когда $r = q-1$, вычисление цилиндрических многообразий из точек $\sigma_{r1}[F]$ в пространствах $\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2, \ldots, \mathbb{C}^q$ сводится к решению проблемы собственных значений однопараметрических полиномиальных матриц.

Действительно, алгоритм вычисления цилиндрических многообразий требует вычисления следующей последовательности

$$F_q = \overline{P}_{q-1}\overline{F}_q, \quad F_{q_1} = \overline{P}_{q_1-1}\overline{F}_{q_1}, \ldots, F_2 = \overline{P}_1\overline{F}_2,$$

где $\overline{P}_1$ есть однопараметрическая полиномиальная матрица. Для вычисления искомых цилиндрических многообразий в пространстве $\mathbb{C}^1$, вычисляются все собственные значения μ_{1i}^* матрицы $\overline{P}_1$. Для вычисления искомых цилиндрических многообразий в пространстве $\mathbb{C}^2$ для каждого фиксированного собственного значения μ_{1i}^* вычисляются собственные значения однопараметрической полиномиальной матрицы $\overline{P}_2(\mu_{1i}^*, \mu_2)$. Совокупность всех собственных значений матрицы $\overline{F}_2$ образует цилиндрические многообразия в пространстве $\mathbb{C}^2$. Аналогично, вычислив все цилиндрические многообразия $\{\mu_1^*, \ldots, \mu_k^*\}$ в пространстве $\mathbb{C}^k$, находим цилиндрические многообразия в пространстве $\mathbb{C}^{k+1}$ как собственные значения однопараметрической полиномиальной матрицы $\overline{F}(\mu_1^*, \ldots, \mu_k^*, \mu_{k+1})$ для каждого фиксированного набора $\{\mu_1^*, \ldots, \mu_k^*\}$.

3. ΨW-метод. Рассмотрим применение ΨW-метода к вычислению цилиндрических многообразий регулярного спектра матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$.

Как уже было сказано выше, цилиндрические многообразия $\sigma_{rz}[F]$ смешанного спектра совпадают с нулями нетривиальных наследственных полиномов $\psi_2[F], \ldots, \psi_{u_1-1}[F]$ ($\psi_{u_1}[F] = \mathrm{const}$) матрицы F.

Для вычисления наследственных полиномов q-параметрической полиномиальной матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, полного строчного ранга, будем применять ΨW-метод, равее предложенный в статье автора [3] для матриц F, все точки регулярного спектра которой не зависят от параметра λ.

Метод состоит из конечного числа типичных шагов. Каждый k-ый шаг вычисляет матрицу S_k и полиномы $\psi_1[S_k]$ и $\psi^{(i)}[S_k]$; $i = 1, \dots, q$, где $\prod_{i=1}^{q} \psi[S_k^{(i)}] = \psi_1[S_k]$ – минимальный наследственный полином матрицы $S_k \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $S_0 \equiv F$.

Пусть S_k – матрица, вычисленная на шаге k. Переход к шагу $k+1$ требует выполнения следующих операций.

(1) Вычисляется $\psi_1[S_k] = \det \overline{P}_k$ и $\psi_1^{(i)}[S_k]$, $i = 1, \dots, q$, где $\overline{P}_k$ – регулярная матрица из неполной относительной факторизации матрицы S_k:

$$S_k = \overline{P}_k \overline{F}_k, \quad \overline{P}_k = \overline{\nabla}_1(\mu_{q-1})\overline{\nabla}_2(\mu_{q-2})\dots\overline{\nabla}_q(\overline{\mu}_{q-1}).$$

$\overline{\nabla}_k(\overline{\mu}_{q-k})$ – регулярная матрица, точки спектра которой зависят от $q-1$ параметров, $\psi_1^{(i)}[S_k] = \det \overline{V}_i$.

(2) Формулируется матрица $\Phi_{k+1} = [\psi_1[S_k]I_m, S_k] \in \mathcal{F}_m^{m\times(m+n)}$ и находится базисная матрица $W_0 := W_0[\Phi_{k+1}]$ правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы Φ_{k+1}.

(3) Базис W_0 преобразуется в базис $\widehat{W}_0 := \widehat{W}_0[\Phi_{k+1}]$, где $\widehat{W}_0$ матрица из неполной относительной факторизации матрица W_0:

$$W_0 = \widehat{W}_0 \widehat{P}.$$

Матрица $\widehat{W}_0$ представляется в блочном виде $\widehat{W}_0 = \begin{bmatrix} -S_{k+1} \\ T_{k+1} \end{bmatrix}$, где $S_{k+1} \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ – искомая матрица для $k+1$ шага, $T_{k+1} \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$.

Выполнение операций (1)–(3) заканчивается, когда $\det \overline{P}_{u_1} =$ const.

Результатом применения ΨW-метода к матрице $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ будут вычислены последовательность матриц $\{S_k[F]\}$, $k = 0, 1, \dots, u_1-1$, $S_0 = F$ и последовательность полиномов $\{\psi_1[S_k]\}$, $k = 0, 1, \dots, u_1-1$, где $\psi_1[S_k] = \det \overline{P}$, $\overline{P} = \nabla_1(\overline{\mu}_{q-1}), \dots, \nabla_q(\overline{\mu}_{q-q})$, $\psi_1^{(i)}[S_k] = \det \nabla_i(\overline{\mu}_{q-i})$, $S_{u_1-1} = \overline{F}_{u_1-1}$. Некоторые из полиномов $\psi_1^{(i)}[S_k]$ могут быть тривиальными. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В условиях ΨW-метода имеют место следующие утверждения.*

1°. *Последовательность полиномов*[2] $\psi_1[S_k]$, $k = 0,\ldots,u_1-2$, *совпадает с последовательностью наследственных полиномов матрицы* $F : \psi_{k+1}[F] = \psi_1[S_k]$, $k = 0,\ldots,u_1-2$. *Нули полинома* $\psi_1^{(i)}[S_k]$ *при каждом фиксированном* i, $(i = 1,\ldots,q)$ *образуют в пространстве* $\mathbb{C}^q$ *цилиндрическое многообразие* $\sigma_{rzi}[F]$ *регулярного спектра матрицы* F *относительно параметра* μ_i.

2°. *Конечный регулярный спектр матрицы* S_{u_1-1} *из последовательности* $\{S_k\}$, $k = 0,1,\ldots,u_1-1$ *отличается от конечного регулярного спектра матрицы* F *отсутствием цилиндрических многообразий:* $\sigma_r[S_{u_1-1}]\cup\sigma_{rz}[F] = \sigma_r[F]$, *где* $\sigma_{rz}[F]$ *обозначает объединение нулей полиномов* $\psi_1^{(i)}[S_k]$, $i = 1,\ldots,q$; $k = 0,1,\ldots,u_1-2$.

Доказательство теоремы основано на свойствах наследственных полиномов регулярного спектра матрицы F и леммы 2.

Лемма 2. *В условиях* ΨW*-метода для любого* $k = 0,1,\ldots,u_1-1$ *выполняются следующие соотношения.*

1°. *Конечный регулярный спектр матрицы* S_{k+1} *отличается от конечного регулярного спектра матрицы* S_k *отсутствием нулей полинома* $\psi_1[S_k] : f[S_k] = \psi_1[S_k]f[S_{k+1}]$.

2°. $\varphi[S_k] = \varphi_k[F]$.

3°. $\psi_1[S_k] = \psi_{k+1}[F]$.

Доказательство. Из равенства $\Phi_k\hat{W}_0^{(k)} = 0$ имеем

$$Q_1 \equiv \psi_1[S_k]S_{k+1} = S_kT_{k+1} \equiv Q_2, \tag{1}$$

Q_1 и Q_2 – q-параметрические полиномиальные матрицы полного строчного ранга: $\sigma_r[Q_i] = \{(\lambda,\overline{\mu}) \mid f[Q_i] = 0\}$, $f[Q_i] = \varphi[Q_i]g[Q_i]$, где $g[Q_i]$ – полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $(q-1)$ переменных; $\varphi[Q_i]$ – полином, нули которого зависят от $(q-1)$ переменных. При этом из (1) следует, что $\varphi[Q_1]g[Q_1] = \varphi[Q_2]g[Q_2]$. С учетом, что $\psi_1[S_k]I$ и T_{k+1} суть регулярные матрицы, а их определители суть полиномы от $\overline{\mu}$, имеем $\varphi[Q_2] = \varphi[S_k]\varphi[T_{k+1}] = \psi_1[S_k]\varphi_1[S_k]\varphi[T_{k+1}]$, $\varphi[Q_1] = \psi_1^m[S_k]\varphi[S_{k+1}]$. Из равенства $\varphi[Q_1] = \varphi[Q_2]$ находим

$$\varphi_1[S_k]\varphi[T_{k+1}] = \psi_1^{m-1}[S_k]\varphi[S_{k+1}], \tag{2}$$

[2]Здесь и ниже равенство полиномов определяется с точностью до постоянного множителя.

где

$$\text{ОНД}\{\varphi_1[S_k], \psi_1[S_k]\} = \text{const} \tag{3}$$

$$\text{ОНД}\{\varphi[T_{k+1}], \varphi[S_{k+1}]\} = \text{const}\,. \tag{4}$$

Справедливость (3) следует из свойств наследственных полиномов: $(\psi_1[S_k] = \dfrac{\varphi[S_k]}{\varphi_1[S_k]})$. Справедливость (4) следует из свойств матрицы $\widehat{W}_0^{(k)} = \left[\begin{smallmatrix} -S_{k+1} \\ T_{k+1} \end{smallmatrix}\right]$: (уравнение $\widehat{W}_0^{(k)}x = 0$ не имеет ненулевых решений и $\sigma_{r\lambda}[\widehat{W}_0^{(k)}] = \sigma_{rz\lambda}[\widehat{W}_0^{(k)}]$). Из равенства (2) с учетом (3) и (4) имеем

$$\varphi[T_{k+1}] = \psi_1^{m-1}[S_k], \quad \varphi_1[S_k] = \varphi[S_{k+1}]. \tag{5}$$

Отсюда

$$\varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}]. \tag{6}$$

Рассмотрим равенство $g[Q_1] = g[Q_2]$, где $g[Q_1] = g[S_{k+1}]$, так как $\psi_1[S_k]$ есть полином от $\overline{\mu}$. $g[Q_2] = g[S_k]g[T_{k+1}] = g[S_k]$, так как $g[T_{k+1}] = \text{const}$ (полином $\psi_1^{m-1}[S_k]$ зависит только от $\overline{\mu}$). Из сказанного следует справедливость равенства

$$g[S_{k+1}] = g[S_k]. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$f[S_k] = \varphi[S_k]g[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}]g[S_{k+1}],$$

что и завершает доказательство свойства 1°.

Доказательство свойств 2° и 3° проведем по индукции. Базой индукции являются равенства

$$\varphi[S_1] = \varphi_1[F], \tag{8}$$

$$\psi_1[S_1] = \psi_2[F]. \tag{9}$$

Докажем равенства (8) и (9). Из свойства 1° при $k = 0$ имеем

$$\varphi[S_0] \equiv \varphi[F] = \psi_1[S_0]\varphi[S_1] \equiv \psi_1[F]\varphi[S_1].$$

С другой стороны, по свойствам наследственных полиномов имеем $\varphi[F] = \psi_1[F]\varphi_1[F]$. Отсюда следует (8). Далее по свойствам наследственных полиномов $\varphi[S_1]$ и $\varphi_1[F]$ можно представить в виде $\varphi[S_1] = \psi_1[S_1]\varphi_1[S_1]$ и $\varphi_1[F] = \psi_2[F]\varphi_2[F]$, так что с учетом (8) имеем $\varphi_1[S_1] = \varphi_2[F]$, $\psi[S_1] = \psi_2[F]$, т.е. справедливость (9) установлена.

Допустим, что свойства 2° и 3° справедливы для любых $i \leqslant k$. Докажем для $i = k+1$. С учетом свойства 1° имеем $\varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}]$. По предположению $\varphi[S_k] = \varphi_k[F]$, $\psi_1[S_k] = \psi_{k+1}[F]$, так что

$$\begin{aligned} \varphi_k[F] = \varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi_1[S_k] = \\ = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}] = \psi_{k+1}[F]\varphi[S_{k+1}]. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее по свойствам наследджствнггых полиномов

$$\varphi_k[F] = \psi_{k+1}\varphi_{k+1}[F]. \tag{11}$$

Из (10) и (11) имеем $\varphi[S_{k+1}] = \varphi_{k+1}[F]$, т.е. справедливость свойства 2° для любого k установлена.

Перейдем к доказательству свойства 3°. По свойствам наследственных полиномов

$$\varphi_{k+1}[F] = \psi_{k+2}[F]\varphi_{k+2}[F], \quad \varphi[S_{k+1}] = \psi_1[S_{k+1}]\varphi_1[S_{k+1}],$$

где по свойству 1° $\varphi_1[S_{k+1}] = \varphi[S_{k+2}]$. По свойству 2°, справедливому для любых k, имеем: $\varphi[S_{k+1}] = \varphi_{k+2}[F]$. Тогда из равенства $\varphi_{k+1}[F] = \varphi[S_{k+1}]$ следует $\psi_1[S_{k+1}] = \psi_{k+2}[F]$, справедливость свойства 3° для любого k установлена. Лемма доказана.

4. ΨV-метод. Рассмотрим применение ΨV-метода к вычислению цилиндрических многообразий регулярного спектра матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$.

Метод состоит из конечного числа типичных шагов. Каждый k-ый шаг ($k = 0, 1, \dots, u_1$) вычисляет матрицу $V_k^{(2)} \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ и полиномы $\psi_1[V_k^{(2)}]$ и $\psi_1^{(i)}[V_k^{(2)}]$, $i = 1, \dots, q$, где $\prod\limits_{i=1}^{q} \psi_k^{(i)}[V_k^{(2)}] = \psi_1[V_k^{(2)}]$ есть минимальный наследственный полином матрицы $V_k^{(2)}$.

Пусть $V_k^{(2)}$ – матрица, вычисленная на шаге k ($V_0^{(2)} \equiv F$). Переход к шагу $(k+1)$ требует выполнения следующих операций.

(1) Вычисляются полиномы $\psi_1[V_k^{(2)}] = \det \overline{P}_k$ и $\psi_1^{(i)}[V_k^{(2)}] = \det \overline{\nabla}_i(\overline{\mu}_{q-i})$, где $\overline{P}_k = \overline{\nabla}_1(\overline{\mu}_{q-1}), \dots, \overline{\nabla}_q(\overline{\mu}_{q-q})$ есть регулярная матрица из неполной относительной факторизации матрицы $V_k^{(2)}$:

$$V_k^{(2)} = \overline{P}_k \overline{F}_k,$$

$\nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ – регулярная $m \times m$-матрица, точки спектра которой зависят от $q-1$ параметров $\overline{\mu}_{q-k}$.

(2) Формируется матрица $\overline{\Phi}_{k+1}[\psi_1[V_k^{(2)}]I_m, V_k^{(2)}] \in \mathcal{F}_m^{m\times(m+n)}$ и вычисляется ∇V-q-факторизация $\overline{\Phi}_{k+1}$:

$$\overline{\Phi}_{k+1} = \nabla_{k+1}V_{k+1},$$

где ∇_{k+1} есть $m \times m$ регулярная матрица, $V_{k+1} = [V_{k+1}^{(1)}, V_{k+1}^{(2)}]$ q-параметрическая $m \times (m+n)$ матрица с блоками $V_{k+1}^{(1)}$ и $V_{k+1}^{(2)}$, составленными из m и n столбцов V_{k+1} соответственно.

Выполнение операций (1), (2) заканчивается, когда $\det \overline{P}_{u_1} = \mathrm{const}$.

Результатом применения ΨV-метода к матрице $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ будут вычислены последовательность матриц $\{V_k^{(2)}\}$, $k = 0, 1, \ldots, u_1 - 1$, $S_0 = F$, и последовательности полиномов $\{\psi_1[V_k^{(2)}]\}$, $k = 0, 1, \ldots, u_i - 1$, и $\{\psi_1^{(i)}[V_k^{(2)}]\}$, $k = 1, \ldots, u_i - 1$; $i = 1, \ldots, q$. Заметим, что некоторые из полиномов $\psi_1^{(i)}[V_k^{(2)}]$ могут быть тривиальными.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *В условиях ΨV-метода имеют место следующие утверждения.*

1°. *Последовательность полиномов $\{\psi_1[V_k^{(2)}]\}$, $k = 0, 1, \ldots, u_1 - 1$ совпадает с последовательностью наследственных полиномов матрицы F : $\psi_{k+1}[F] = \psi_1[V_k^{(2)}]$, $k = 0, 1, \ldots, u_1 - 2$. Нули полиномов $\psi_1^{(i)}[V_k^{(2)}]$ для каждого фиксированного i ($i = 1, \ldots, q$) образуют в пространстве $\mathbb{C}^q$ цилиндрическое многообразие $\sigma_{zi}[F]$ регулярного спектра матрицы F относительно параметра μ_i.*

2°. *Конечный регулярный спектр матрицы $V_{u_1-1}^{(2)}$ из последовательности $\{V_k^{(2)}\}$, $k = 0, \ldots, u_1 - 1$, отличается от конечного регулярного спектра исходной матрицы F отсутствием цилиндрических многообразий: $\sigma_r[V_{u_1-1}^{(2)} \cup \sigma_{rz}[F] = \sigma_r[F]$, где $\sigma_{rz}[F]$ есть объединение всех нулей полиномов $\psi_1^{(i)}[V_k^{(2)}]$, $i = 1, \ldots, q$; $k = 0, 1, \ldots, u_1 - 2$.*

3°. *Имеет место равенство*

$$F = \nabla_1\nabla_2 \ldots \nabla_{u_1-1}V_{u_1-1}^{(2)},$$

где $\nabla_k = \prod_{i=1}^{q} \overline{\nabla}_i^{(k)}(\overline{\mu}_{q-i})$, $\det \nabla_k = \psi_k[F]$, $k = 1, \ldots, u_1 - 1$.

Доказательство теоремы основано на справедливости леммы 4 и свойств наследственных полиномов матрицы F, как полиномов нули которых образуют цилиндрические многообразия регулярного спектра матрицы F в пространстве $\mathbb{C}^q$.

Лемма 4. *В условиях ΨV-метода для любого $k = 0, 1, \dots, u_1 - 2$ справедливы следующие утверждения.*

1°. $\varphi[V_{k+1}^{(2)}] = \varphi_1[V_k^{(2)}]$;

2°. $\varphi[V_k^{(2)}] = \psi_1[V_k^{(2)}]\varphi[V_{k+1}^{(2)}]$;

3°. $\varphi[V_k^{(2)}] = \varphi_k[F]$;

4°. $\psi[V_k^{(2)}] = \psi_{k+1}[F]$;

Доказательство. Из ∇V-q-факторизации матрицы Φ_{k+1} находим $\Phi_{k+1} = \nabla_{k+1} V_{k+1}$, где $\Phi_{k+1} = [\psi_1[V_k^{(2)}]I, V_k^{(2)}]$, $V_{k+1} = [V_{k+1}^{(1)}, V_{k+1}^{(2)}]$. Отсюда с учетом, что ∇_{k+1} есть регулярная матрица, имеем $f[\Phi_{k+1}] = f[\nabla_{k+1}]f[V_{k+1}]$ или в развернутом виде

$$\left(\psi_1[V_k^{(2)}]\right)^m = f[\nabla_{k+1}]f[V_{k+1}^{(1)}]; \tag{12}$$

$$f[V_k^{(2)}] = f[\nabla_{k+1}]f[V_{k+1}^{(2)}]. \tag{13}$$

С учетом, что равенство $f[Q] = \varphi[Q]g[Q]$ есть неполная относительная факторизация полинома $f[Q]$ от q-переменных, из (13) находим:

$$\varphi[V_k^{(2)}] = \varphi[\nabla_{k+1}]\varphi[V_{k+1}^{(2)}]; \quad g[V_{k+1}^{(2)}] = g[\nabla_{k+1}]g[V_{k+1}^{(2)}].$$

Из свойств метода ∇V-q-факторизации следует, что $\sigma_r[\nabla_{k+1}] = \sigma_r[\Phi_{k+1}]$. Но $\sigma_r[\Phi_{k+1}] = \psi_1[V_k^{(2)}]$, так что $\varphi[V_k^{(2)}] = \psi_1[V_k^{(2)}]\varphi[V_{k+1}^{(2)}]$. С другой стороны, из свойств наследственных полиномов следует

$$\varphi[V_k^{(2)}] = \psi_1[V_k^{(2)}]\varphi_1[V_k^{(2)}], \tag{14}$$

так что $\varphi_1[V_k^{(2)}] = \varphi[V_{k+1}^{(2)}]$. Справедливость 1° установлена. Справедливость 2° следует из 1°.

Доказательство 3° и 4° проведем по индукции. При $k = 0$ с учетом 2° имеем $\varphi[V_0^{(2)}] \equiv \varphi[F] = \psi_1[F]\varphi[V_1^{(2)}]$. С другой стороны, по свойствам наследственных полиномов справедливо равенство $\varphi[F] = \psi_1[F]\varphi_1[F]$, так что имеем

$$\varphi[V_1^{(2)}] = \varphi_1[F]. \tag{15}$$

Далее с учетом равенств $\varphi[V_1^{(2)}] = \psi_1[V_1^{(2)}]\varphi_1[V_1^{(2)}]$, $\varphi_1[F] = \psi_2[F]\varphi_2[F]$ имеем

$$\psi_1[V_1^{(2)}] = \psi_2[F] \equiv \psi_2[V_0^{(2)}]. \tag{16}$$

Равенства (15) и (16) дают основание для индукции. Допустим, что 3° и 4° справедливы для любого $i \leqslant k$. Докажем для $i = k+1$. С учетом 2° имеем $\varphi[V_k^{(2)}] = \psi_1[V_k^{(2)}]\varphi[V_{k+1}^{(2)}]$. По предположению $\varphi[V_k^{(2)}] = \varphi_k[F]$ и $\psi_1[V_k^{(2)}] = \psi_{k+1}[F]$, так что $\varphi_k[F] = \varphi[V_k^{(2)}] = \psi_1[V_k^{(2)}]\varphi_1[V_k^{(2)}]$, т.е.

$$\psi_1[V_k^{(2)}]\varphi[V_{k+1}^{(2)}] = \psi_{k+1}[F]\varphi[V_{k+1}^{(2)}]. \tag{17}$$

Далее по свойствам наследственных полиномов

$$\varphi_k[F] = \psi_{k+1}[F]\varphi_{k+1}[F]. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует

$$\varphi[V_{k+1}^{(2)}] = \varphi_{k+1}[F], \tag{19}$$

т.е. справедливость 3° для любого k установлена.

Докажем справедливость 4°. Из свойств наследственных полиномов и (19) имеем

$$\varphi_{k+1}[F] = \psi_{k+2}[F]\varphi_{k+2}[F] = \varphi[V_{k+1}^{(2)}] = \psi_1[V_{k+1}^{(2)}]\varphi_1[V_{k+1}^{(2)}], \tag{20}$$

где по свойству 1° $\varphi_1[V_{k+1}^{(2)}] = \varphi[V_{k+2}^{(2)}]$. По свойству 3°

$$\varphi[V_{k+2}^{(2)}] = \varphi_{k+2}[F]. \tag{21}$$

Из 1° и (20) имеем $\psi_{k+2}[F] = \psi_1[V_{k+1}^{(2)}]$, т.е. справедливо 4°. Лемма доказана.

Замечания. 1. Если множество $\mathfrak{M} = \{\sigma_r[F] \cap \sigma_s^+[F]\} \neq \varnothing$, то регулярный спектр матрицы $S_{k+1} = \overline{P}_{u_1}$, (матрицы $V_{u_1-1}^{(2)}$), полученной на последнем шаге ΨW-метода (ΨV-метода) содержит точки этого множества.

2. Если матрица F имеет полный столбцовый ранг, то для вычисления цилиндрических многообразий регулярного спектра матрицы F, следует ΨW-метод (ΨV-метод) применить к матрице $F^{\intercal} \in \mathcal{F}_n^{n\times m}$, $n \geqslant m$.

3. Каждый из ΨW- и ΨV-методов можно рассматривать как методы исчерпывания цилиндрических многообразий из регулярного спектра начальной матрицы F.

4. Вычисление цилиндрических многообразий смешаного регулярного спектра $\sigma_{r2}[F]$ q-параметрической полиномиальной матрицы F полного ранга в пространствах $\mathbb{C}^{q-t}$, $t > 1$ можно реализовать аналогично вычислению цилиндрических многообразий в пространствах $\mathbb{C}^{q-t}$ собственно регулярного спектра $\sigma_{r1}[F]$ матрицы F (см. п. 2).

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *Методы и алгориты решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 7–329.
3. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 1. Методы вычисления наследственных полиномов и их применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 143–162.
4. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применение.* Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 89–107.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra 3. Cylindrical manifolds of the regular spectrum of a matrix.

Methods for computing polynomials (complete polynomials) whose zeros form in the space $\mathbb{C}^q$ cylindrical manofolds of the regular spectrum of a q-parameter polynomial matrix are considered. Based on the method of partial relative factorization of matrices, new methods for computing cylindrical manifolds are suggested. The ΨW and ΨV methods, previously proposed for computing complete polynomials of q-parameter polynomial matrices whose regular spectrum is independent of one of the parameters, are extended to a wider class of matrices.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 февраля 2003 г.