Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

**Л. Ю. Колотилина**

# О КРАЙНИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ БЛОЧНЫХ 2×2 ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

## §1. Введение

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geqslant 2)$ – симметричная матрица с собственными значениями

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A).$$

В работе [5] Парлетт рассматривает разброс собственных значений $A$, т.е. разность

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A)$$

ее крайних собственных значений (которую он называет спектральным диаметром $A$) как функцию диагональных элементов матрицы и устанавливает следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть $A = (a_{ij})$ – симметричная $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ матрица, граф которой является деревом. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \lambda_1(A - \operatorname{diag} A) - \lambda_n(A - \operatorname{diag} A), \tag{1.1}$$

*где* $\operatorname{diag} A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ *– это диагональная часть $A$.*

Заметим, что для произвольной симметричной матрицы неравенство (1.1), как было показно в [5], может и не выполняться.

Доказательство теоремы 1, представленное в [5], достаточно сложно и базируется на результатах из теории возмущений, теории графов и теории неотрицательных матриц. В частности, упомянутое доказательство использует следующие свойства вещественной симметричной матрицы $A$, граф которой является деревом. Во-первых, такая матрица обязательно неприводима. Во-вторых, существуют такая матрица-перестановка $P$ и такая знаковая диагональная матрица $S$ (т.е. диагональная матрица с $\pm 1$ на главной диагонали), что

$$SP^{\intercal}APS = \begin{bmatrix} D_1 & N \\ N^{\intercal} & D_2 \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

где $D_1$ и $D_2$ – диагональные матрицы, а матрица $N$ неотрицательна. Из этих двух свойств следует, что оба крайние собственные значения матрицы $A$ являются простыми, а им соответствующие собственные векторы не имеют нулевых компонент.

Первый основной результат этой статьи (см. теорему 2 в §2) состоит в следующем. Мы доказываем, что если

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

– $n \times n$ ($n \geqslant 2$) эрмитова матрица, представленная в блочном $2 \times 2$ виде, то

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\|A_{12}\| = \lambda_1(A - D_A) - \lambda_n(A - D_A), \tag{1.4}$$

где

$$D_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

– блочно диагональная часть $A$, а также мы указываем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неравенство (1.4) обращалось в равенство. Эти условия формулируются в терминах собственных векторов матрицы $A$, соответствующих $\lambda_1(A)$ и $\lambda_n(A)$.

Из этого результата почти сразу же следует (см. следствие 3 в §2), что неравенство Парлетта (1.1) справедливо для любой эрмитовой матрицы $A$, перестановочно подобной блочной $2 \times 2$ матрице, диагональные блоки которой диагональны, и, в частности, для любой симметричной матрицы, граф которой является деревом. Заметим, что прочие свойства такой матрицы, указанные выше (т.е. ее неприводимость, неотрицательность матрицы $N$ в (1.2), простота крайних собственных значений и отсутствие нулевых компонент в соответствующих собственных векторах), с точки зрения справедливости неравенства (1.1) несущественны.

Второй основной результат этой работы (см. теорему 4 в §2) состоит в том, что для любой $n \times n$ эрмитовой положительно определенной матрицы $A$ вида (1.3) равенство

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = \min_D \bigl\{\lambda_1(A + D) - \lambda_n(A + D)\bigr\}, \tag{1.5}$$

где $D$ пробегает все множество эрмитовых матриц вида

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

справедливо в том и только том случае, когда

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta}\left\{\frac{\lambda_1(\Delta^* A\Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A\Delta)}\right\}, \tag{1.7}$$

где $\Delta$ пробегает все множество невырожденных матриц вида (1.6), т.е. когда матрица $A$ оптимально обусловлена. Кроме того, оба равенства (1.5) и (1.7) выполнены тогда и только тогда, когда крайние собственные значения $A$ удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \|A_{12}\|\frac{1+\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|},$$

$$\lambda_n(A) = \|A_{12}\|\frac{1-\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}.$$

На основе этого результата вводится понятие матриц с оптимальными (относительно фиксированного блочного $2\times 2$ разбиения) крайними собственными значениями и приводятся примеры таких матриц.

В завершение этого вводного параграфа мы напоминаем простой и хорошо известный результат, касающийся собственных значений блочной $2\times 2$ эрмитовой матрицы с нулевыми диагональными блоками.

**Лемма 1.** *Пусть*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G^* & 0 \end{bmatrix}$$

*– эрмитова* $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ *матрица, где* $G$ *–* $m\times(n-m)$ *матрица,* $1 \leqslant m < n$. *Тогда*

$$\lambda_i(C) = \begin{cases} \sigma_i(G), & i = 1,\dots,\operatorname{rank} G, \\ 0, & i = \operatorname{rank} G+1,\dots,n-\operatorname{rank} G, \\ -\sigma_{n-i+1}(G), & i = n-\operatorname{rank} G+1,\dots,n, \end{cases}$$

*где* $\sigma_1(G)\geqslant\dots\geqslant\sigma_q(G)$ *– сингулярные значения* $G$ $(q=\min\{m,n-m\})$.

## §2. Результаты

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$D_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

– это блочно диагональная часть блочной $2 \times 2$ эрмитовой матрицы $A$ порядка $n$; $\operatorname{diag} A$ – (точечная) диагональная часть $A$, и

$$S = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{bmatrix},$$

где $m$ – это порядок блока $A_{11}$.

Справедливо следующее обобщение теоремы 1 Парлетта.

**Теорема 2.** *Пусть $A$ – $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ эрмитова матрица вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix},$$

*где $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $1 \leqslant m < n$. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \lambda_1(A - D_A) - \lambda_n(A - D_A) = 2\|A_{12}\|, \tag{2.1}$$

*причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что*

$$Az = \lambda_1(A)z \tag{2.2}$$

*и*

$$ASz = \lambda_n(A)Sz. \tag{2.3}$$

**Доказательство.** Пусть векторы $x \in \mathbb{C}^m$ и $y \in \mathbb{C}^{n-m}$ образуют пару сингулярных векторов блока $A_{12}$, ассоциированную с $\sigma_1(A_{12}) = \|A_{12}\|$, так что

$$A_{12}y = \|A_{12}\|x, \quad \|x\| = \|y\| = 1, \tag{2.4}$$

и пусть $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Тогда $\|z\|^2 = 2$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) \geqslant \frac{z^*Az}{\|z\|^2} &= \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y + x^*A_{12}y + y^*A_{12}x}{2} \\ &= \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y}{2} + \|A_{12}\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Аналогично из (2.4) выводится неравенство

$$\lambda_n(A) \leqslant \frac{(Sz)^*A(Sz)}{\|Sz\|^2} = \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y}{2} - \|A_{12}\|, \tag{2.6}$$

и требуемое неравенство

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\|A_{12}\|$$

немедленно следует из (2.5) и (2.6). Равенство же

$$\lambda_1(A - D_A) - \lambda_n(A - D_A) = 2\|A_{12}\|$$

является тривиальным следствием леммы 1.

Теперь для завершения доказательства теоремы 2 остается заметить, что неравенство (2.5) обращается в равенство тогда и только тогда, когда справедливо соотношение (2.2), а неравенство (2.6) обращается в равенство в том и только том случае, когда справедливо равенство (2.3). □

Теперь мы выведем некоторые следствия из теоремы 2. Сперва мы сформулируем обобщение неравенства (2.1), которое устанавливается с помощью симметричной перестановки строк и столбцов матрицы $A$.

**Следствие 1.** *Пусть $A = (a_{ij})$ – эрмитова $n{\times}n$ $(n \geqslant 2)$ матрица и пусть $J \subsetneq \langle\, n\,\rangle = \{1, \ldots, n\}$ – непустое собственное подмножество индексного множества. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\big\|A[J, \overline{J}\,]\big\|, \tag{2.7}$$

*где $\overline{J} = \langle\, n\,\rangle - J$ – дополнение подмножества $J$ в $\langle\, n\,\rangle$, а $A[J, \overline{J}\,] = \big\{a_{ij}\big\}_{\substack{i\in J\\ j\in\overline{J}}}$ – подматрица матрицы $A$, специфицируемая множеством $J$.*

*В частности, если матрица $A$ положительно полуопределена, то*

$$\lambda_1(A) \geqslant 2\big\|A[J, \overline{J}\,]\big\|, \tag{2.8}$$

*а если $A$ положительно определена, то неравенство (2.8) является строгим.*

Следующий результат, который легко выводится из следствия 1, представляет собой блочное обобщение хорошо известного неравенства

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\max_{i\neq j}|a_{ij}|,$$

справедливого для произвольной эрмитовой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n \geqslant 2$ [4, теорема III.4.3.2].

**Следствие 2.** *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{N}$, $2 \leqslant N \leqslant n$, *– блочная эрмитова матрица порядка* $n$ *с квадратными диагональными блоками. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \big\| [A_{i1}, \dots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \dots, A_{iN}] \big\| \tag{2.9}$$

*и*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \max_{i \neq j} \|A_{ij}\|. \tag{2.10}$$

**Доказательство.** Пусть $i \in \{1, \dots, N\}$ и пусть

$$J = \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} n_k + 1, \dots, \sum_{k=1}^{i} n_k \right\}$$

– множество индексов строк и столбцов блока $A_{ii}$ в $A$ (через $n_k$, $k = 1, \dots, N$, мы обозначаем порядок блока $A_{kk}$). Тогда по следствию 1 мы имеем

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \big\| A[J, \overline{J}] \big\|.$$

Поскольку

$$A[J, \overline{J}] = [A_{i1}, \dots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \dots, A_{iN}],$$

мы можем заключить, что

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \big\| [A_{i1}, \dots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \dots, A_{iN}] \big\|, \quad i = 1, \dots, N,$$

что и доказывает (2.9). Из последнего неравенства также следует и (2.10), поскольку

$$\begin{aligned} \big\| [A_{i1}, \dots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \dots, A_{iN}] \big\|^2 &= \Bigg\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (A_{ij})^* A_{ij} \Bigg\| \\ &\geqslant \|A_{ij}\|^2, \quad j \neq i, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N. \end{aligned}$$

□

Следующее следствие из теоремы 2 является непосредственным обобщением теоремы 1.

**Следствие 3.** *Если $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ эрмитова матрица $A$ перестановочно подобна матрице вида*

$$\begin{bmatrix} D_1 & G \\ G^* & D_2 \end{bmatrix},$$

*где блоки $D_1$ и $D_2$ оба диагональны, т.е. матрица $A$ является 2-циклической, то*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \lambda_1(A - \operatorname{diag} A) - \lambda_n(A - \operatorname{diag} A). \tag{2.11}$$

**Доказательство.** Пусть

$$B = P^{\mathsf{T}} A P = \begin{bmatrix} D_1 & G \\ G^* & D_2 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Тогда мы имеем:

$$D_B = \operatorname{diag} B = P^{\mathsf{T}} \operatorname{diag} AP. \tag{2.13}$$

Используя (2.12) и (2.13) и применяя теорему 2, мы выводим неравенство (2.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) - \lambda_n(A) &= \lambda_1(B) - \lambda_n(B) \geqslant \lambda_1(B - D_B) - \lambda_n(B - D_B) \\ &= \lambda_1(P^{\mathsf{T}} AP - P^{\mathsf{T}} \operatorname{diag} AP) - \lambda_n(P^{\mathsf{T}} AP - P^{\mathsf{T}} \operatorname{diag} AP) \\ &= \lambda_1(A - \operatorname{diag} A) - \lambda_n(A - \operatorname{diag} A). \end{aligned}$$

□

Заметим, что результат следствия 3 тривиально переносится и на случай блочно 2-циклических эрмитовых матриц, когда матрицы $D_1$ и $D_2$ в (2.12) являются блочно диагональными.

Теорему 2, очевидно, можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через $D(m, n-m)$, $1 \leqslant m < n$, множество всех эрмитовых $n\times n$ матриц вида

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

где $D_1$ и $D_2$ – матрицы порядков $m$ и $n-m$ соответственно. Тогда теорема 2 означает, что равенство

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = \min_{D \in D(m,n-m)} \left\{ \lambda_1(A+D) - \lambda_n(A+D) \right\}$$

справедливо тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что

$$Az = \lambda_1(A)z \quad \text{и} \quad ASz = \lambda_n(A)Sz.$$

В такой формулировке теорема 2 может рассматриваться как аддитивный аналог приводимой ниже теоремы, которая описывает блочные $2\times 2$ эрмитовы положительно определенные матрицы, оптимально обусловленные относительно невырожденных блочно диагональных преобразований подобия.

**Теорема 3** [1]. *Пусть $A$ – эрмитова положительно определенная $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ матрица вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix},$$

*где блок $A_{11}$ имеет порядок $m$, $1 \leqslant m < n$, и пусть $\Delta(m, n-m)$ – это группа всех невырожденных $n\times n$ матриц вида*

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix},$$

*где $\Delta_1$ – матрица порядка $m$. Тогда матрица $A$ оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$, т.е.*

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta\in\Delta(m,n-m)} \left\{ \frac{\lambda_1(\Delta^* A\Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A\Delta)} \right\} = \frac{1 + \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}{1 - \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}$$

*в том и только том случае, когда существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что*

$$Az = \lambda_1(A)z \quad \text{и} \quad ASz = \lambda_n(A)Sz.$$

Основываясь на теореме 2 в новой формулировке и теореме 3, мы можем доказать следующий важный результат.

**Теорема 4.** *Пусть*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

*– эрмитова положительно определенная $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ матрица и пусть блок $A_{11}$ имеет порядок $m$, $1 \leqslant m < n$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Матрица* $A$ *оптимально обусловлена относительно* $\Delta(m, n-m)$, *т.е.*

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta\in\Delta(m,n-m)} \left\{\frac{\lambda_1(\Delta^* A\Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A\Delta)}\right\} = \frac{1+\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{1-\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}; \quad (2.14)$$

(ii) $\lambda_1(A) - \lambda_n(A)$

$$= \min_{D\in D(m,n-m)} \left\{\lambda_1(A+D) - \lambda_n(A+D)\right\} = 2\|A_{12}\|; \qquad (2.15)$$

(iii) *существует ненулевой вектор* $z \in \mathbb{C}^n$, *такой что*

$$Az = \lambda_1(A)z \quad \textit{и} \quad ASz = \lambda_n(A)Sz;$$

(iv) *крайние собственные значения матрицы* $A$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda_1(A) = \|A_{12}\|\frac{1+\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}, \qquad (2.16)$$

$$\lambda_n(A) = \|A_{12}\|\frac{1-\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}. \qquad (2.17)$$

Заметим, что соотношения (2.16) и (2.17) дают явные выражения для крайних собственных значений матрицы $A$ через норму $\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|$ (которая инвариантна относительно преобразований подобия $A \to \Delta^* A\Delta$, $\Delta \in \Delta(m, n-m)$) и норму $\|A_{12}\|$ (инвариантную относительно аддитивных преобразований вида $A \to A + D$, $D \in D(m, n-m)$).

**Доказательство теоремы 4.** Равносильность утверждений (i) и (iii) следует из теоремы 3. Равносильность утверждений (ii) и (iii) вытекает из приведенной выше переформулировки теоремы 2. Наконец, как нетрудно убедиться, явные выражения (2.14) и (2.15) для отношения $\lambda_1(A)/\lambda_n(A)$ и разности $\lambda_1(A) - \lambda_n(A)$ равносильны формулам (2.16) и (2.17). $\square$

Теорема 4 позволяет нам говорить, что эрмитовы положительно определенные матрицы, удовлетворяющие условиям (i)–(iii), имеют *оптимальные* (относительно рассматриваемого блочного $2 \times 2$ разбиения) *крайние собственные значения*, которые определяются по формулам (2.16) и (2.17).

В заключение данной статьи мы рассмотрим некоторые примеры блочных $2\times 2$ эрмитовых положительно определенных матриц с оптимальными крайними собственными значениями.

**Пример 1.** В силу леммы 1, для произвольной матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} \alpha I_m & G \\ G^* & \alpha I_{n-m} \end{bmatrix}, \quad \alpha > \|G\|,$$

мы имеем

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = 2\|G\|,$$

так что по теореме 4 матрица $A$ имеет оптимальные крайние собственные значения. Заметим, что тот факт, что $A$ оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$, хорошо известен (см., например, [3] или [1]).

**Пример 2** [3]**.** Пусть

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 \end{array}\right], \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant 3.$$

Как легко видеть,

$$\lambda_1(A) = 3, \quad \lambda_2(A) = \alpha, \quad \lambda_3(A) = 1.$$

Поскольку

$$\lambda_1(A) - \lambda_3(A) = 2 = 2\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|,$$

матрица $A$ имеет оптимальные крайние собственные значения в силу теоремы 4.

**Пример 3.** Уравновешенные матрицы.

В соответствии с [2] эрмитова положительно определенная блочная $2 \times 2$ матрица

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

порядка $n$ ($n \geqslant 2$) называется *уравновешенной*, если

$$A_{ii} = A'_{ii}, \quad i = 1, 2,$$

где мы используем обозначение

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}.$$

Как было установлено в [2], любая уравновешенная матрица оптимально обусловлена относительно группы $\Delta(m, n-m)$, где $m$ – порядок блока $A_{11}$. Следовательно, по теореме 4 матрица $A$ имеет оптимальные крайние собственные значения.

**Пример 4.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix}, \quad ac > |b|^2,$$

– эрмитова положительно определенная $2 \times 2$ матрица. Тогда

$$\lambda_1(A) = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4|b|^2}}{2}, \quad \lambda_2(A) = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4|b|^2}}{2}.$$

С другой стороны, как показывает тривиальная проверка,

$$\|A_{12}\| \frac{1 \pm \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|} = \sqrt{ac} \pm |b|.$$

Следовательно, матрица $A$ имеет оптимальные собственные значения, определяемые формулами (2.16) и (2.17), тогда и только тогда, когда

$$\frac{a+c}{2} = \sqrt{ac} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{(a-c)^2+4|b|^2}}{2} = |b|$$

или, что равносильно, когда

$$a = c.$$

## Литература


1. Л. Ю. Колотилина, *Оптимально обусловленные блочные* $2 \times 2$ *матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **268** (2000), 72–85.
2. Л. Ю. Колотилина, *Об одном классе оптимально обусловленных блочных* $2 \times 2$ *матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 64–76.
3. S. C. Eisenstat, J. W. Lewis, M. H. Schultz, *Optimal block diagonal scaling of block 2-cyclic matrices.* — Linear Algebra Appl. **44** (1982), 181–186.
4. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* — Boston, Allyn and Bacon, Inc. (1964).

5. B. N. Parlett, *The spectral diameter as a function of the diagonal entries.* — Numer. Linear Algebra Appl., to appear.

Kolotilina L. Yu. On the extreme eigenvalues of block $2 \times 2$ Hermitian matrices.

The lower bound

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\|A_{12}\|$$

for the difference of the extreme eigenvalues of an $n \times n$ Hermitian block $2 \times 2$ matrix $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$ is established, and conditions necessary and sufficient for this bound to be attained at $A$ are provided. Some corollaries of this result are derived. In particular, for a positive-definite matrix $A$, it is demonstrated that $\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = 2\|A_{12}\|$ if and only if $A$ is optimally conditioned, and explicit expressions for the extreme eigenvalues of such matrices are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 22 ноября 2002 г.