Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

А. А. Столин, П. П. Кулиш, Е. В. Дамаскинский

О ПОСТРОЕНИИ УНИВЕРСАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА СКРУЧИВАНИЯ

1. Введение

Квантовые группы, как важный класс алгебр Хопфа, были введены в работе В. Г. Дринфельда [1]. В теории квантовых групп существенным объектом является универсальная R-матрица, связывающая коумножение Δ с противоположным коумножением Δ^{op}

$$\mathcal{R}\Delta = \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{R}, \tag{1}$$

а также, введенное позднее, преобразование скручивания (или твиста) [2, 3]

$$\Delta \to \Delta_t = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}, \tag{2}$$

где $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$ – элементы тензорного квадрата алгебры Хопфа. Для ряда квантовых групп, в частности, для квантовых деформаций универсальных обёртывающих алгебр некоторых алгебр Ли, твистующие элементы известны в явном виде.

Формализм ФРТ [4] позволяет по известному матричному представлению универсальной R-матрицы восстановить соответствующую квантовую группу. Однако этот метод не даёт явных выражений для универсальных элементов.

В определённом смысле аналогичный результат для универсальных твистов был получен Дринфельдом [2]. Он показал, что, если известна унитарная матрица R, являющаяся квазиклассическим решением уравнения Янга–Бакстера, то существует универсальный твист $\mathcal{F}$, такой что R является реализацией $\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}$ в векторном представлении. Эта ситуация аналогична указанной выше: возможно формальное восстановление универсального элемента по известному матричному решению уравнения Янга–Бакстера. Однако, как и выше, не существует вычислительного

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, гранты 00-01-00500, 02-01-00085.

метода получения явных выражений для универсального твиста $\mathcal{F}$. Эта задача определения явных выражений для универсальных твистов достаточно сложна. Некоторые явные формулы имеются в работах [5, 6] (и указанной там библиографии).

В настоящей работе мы предлагаем метод построения универсального твиста для заданного унитарного квазиклассического матричного решения уравнения Янга–Бакстера. Этот метод основан на исследовании ассоциативной алгебры, определяемой матричным соотношением $RT_1T_2 = T_2T_1, \quad T = \{t_{ij} \in U(gl_n)^*\}$. Эта алгебра является деформацией алгебры полиномов на группе GL_n (иногда, в конкретных примерах, удаётся ограничиться рассмотрением её подгрупп). Указанная ассоциативная алгебра изоморфна, как левая $U(g\ell_n)$-модуль алгебра, недеформированной (коммутативной) алгебре Fun полиномов на GL_n (конечно этот изоморфизм не является изоморфизмом алгебр). Напомним, что между Fun и $U(g\ell_n)$ существует невырожденное спаривание. Следовательно, существует невырожденное спаривание между $U(g\ell_n)$ и алгеброй порождаемой соотношением $RT_1T_2 = T_2T_1$. Эта двойственность порождает коассоциативную операцию $d : U(g\ell_n) \to U(g\ell_n) \otimes U(g\ell_n)$ (не являющуюся гомоморфизмом алгебр), а $\mathcal{F} = d(1)$ является искомым элементом твиста.

Таким образом скручивание $\mathcal{F} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ позволяет ввести на алгебре Хопфа $\mathcal{H}$ дополнительную структуру биалгебры:

$$d : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, \quad d := \mathcal{F}\Delta.$$

Структуры такого типа рассматривались в работах [7, 8] при анализе групп Ли–Пуассона. В частности, квантовый аналог определяется соотношением $RT_1T_2 = T_2T_1R_{21}$ [8].

Общая связь универсального элемента скручивания $\mathcal{F}$ алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ с матричной формой RTT-соотношения, задающего новое умножение в двойственной алгебре Хопфа $\mathcal{H}^*$ излагается в разделе 2. В разделе 3 приведены примеры использования этой связи для востановления универсального элемента скручивания по матрице R в случае (супер)алгебр Ли ранга 1. Ряд детализированных выкладок вынесен в приложение.

2. Модуль алгебры и твисты

Пусть $\mathcal{H}$ – алгебра Хопфа. Рассмотрим элемент $\mathcal{F} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, удовлетворяющий уравнению твиста (условию 2-коцикла)

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}$$

и соотношению

$$(\varepsilon \otimes id)\mathcal{F} = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{F} = 1 \otimes 1.$$

Такой элемент $\mathcal{F}$ называется *универсальным скручиванием* или *универсальным твистом.*

Определим отображение $d_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, такое что $d_{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}\Delta(a)$. Несложно показать, что отображение $d_{\mathcal{F}}$ коассоциативно, то есть удовлетворяет условию

$$(d \otimes id)d = (id \otimes d)d$$

и $d_{\mathcal{F}}(ab) = d_{\mathcal{F}}(a)\Delta(b)$.

Пусть $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ и $d(ab) = d(a)\Delta(b)$.

Лемма 2.1. *Если $\mathcal{F}$ твист, то справедливы условия:*

(a) $d_{\mathcal{F}}$ – *коассоциативное отображение.*
(b) $d_{\mathcal{F}}(ab) = d_{\mathcal{F}}(a)\Delta(b)$
(c) $(\varepsilon \otimes id)d_{\mathcal{F}}(a) = 1 \otimes a$ *и* $(id \otimes \varepsilon)d_{\mathcal{F}}(a) = a \otimes 1.$

Обратно, если $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ удовлетворяет условиям (a), (b) *и* (c), *то $\mathcal{F} = d(1)$ является твистом.*

Доказательство. Мы уже показали, что твист $\mathcal{F}$ порождает отображение $d_{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}\Delta(a)$, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c).

Обратно, если задано отображение d, то из свойств (a), (b) следует, что

$$\mathcal{F} = d(1) := \sum f_1 \otimes f_2$$

удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)(\mathcal{F})\,.$$

Положив $a = 1$ в (c) получаем $(\varepsilon \otimes id)\mathcal{F} = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{F} = 1 \otimes 1.$

Рассмотрим двойственное к $\mathcal{H}$ векторное пространство $\mathcal{H}^*$. Отметим, что $\mathcal{H}^*$ является правым $\mathcal{H}_{op}$-модулем так как

$$\langle \alpha, ab \rangle = \langle \alpha_{(1)}, a \rangle \langle \alpha_{(2)}, b \rangle := \langle \alpha\tilde{b}, a \rangle, \quad \alpha\tilde{b} = \alpha_{(1)}\langle \alpha_{(2)}, b \rangle.$$

где $\alpha \in \mathcal{H}^*$, $a, b \in \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{op}$ есть алгебра Хопфа $\mathcal{H}$ с противоположным умножением. Отображение $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ удовлетворяющее условиям (a)–(c). индуцирует ассоциативное умножение на $\mathcal{H}^*$

$$\begin{gathered}
\langle \alpha \circ \beta, a\rangle = \langle \alpha \otimes \beta, d(a)\rangle = \langle \alpha \otimes \beta, f_1 a_{(1)} \otimes f_2 a_{(2)}\rangle = \\
\langle \alpha, f_1 a_1\rangle \langle \beta, f_2 a_{(2)}\rangle = \langle \Delta^*(\alpha), f_1 \otimes a_{(1)}\rangle \langle \Delta^*(\beta), f_2 \otimes a_{(2)}\rangle = \\
\langle \alpha_{(1)}, f_1\rangle \langle \alpha_{(2)}, a_{(1)}\rangle \langle \beta_{(1)}, f_2\rangle \langle \beta_{(2)}, a_{(2)}\rangle = \\
\langle \alpha_{(1)}, f_1\rangle \langle \beta_{(1)}, f_2\rangle \langle \alpha_{(2)}, a_{(1)}\rangle \langle \beta_{(2)}, a_{(2)}\rangle = \\
\langle \alpha_{(1)}, f_1\rangle \langle \beta_{(1)}, f_2\rangle \langle \alpha_{(2)} \otimes \beta_{(2)}, a_{(1)} \otimes a_{(2)}\rangle = \\
\langle \alpha_{(1)}, f_1\rangle \langle \beta_{(1)}, f_2\rangle \langle \alpha_{(2)} \otimes \beta_{(2)}, \Delta(a)\rangle = \\
\langle \alpha_{(1)} \otimes \beta_{(1)}, \mathcal{F}\rangle \langle \alpha_{(2)} \otimes \beta_{(2)}, \Delta(a)\rangle = \\
\langle \alpha_{(1)} \otimes \beta_{(1)} \otimes \alpha_{(2)} \otimes \beta_{(2)}, \mathcal{F} \otimes \Delta(a)\rangle = \\
\left\langle \sigma_{23}\left(\alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)} \otimes \beta_{(1)} \otimes \beta_{(2)}\right), \mathcal{F} \otimes \Delta(a)\right\rangle = \\
\langle \sigma_{23}\Delta^*(\alpha) \otimes \Delta^*(\beta), \mathcal{F} \otimes \Delta(a)\rangle .
\end{gathered}$$

Следовательно $\alpha \circ \beta = \langle \alpha_{(1)} \otimes \beta_{(1)}, \mathcal{F}\rangle \alpha_{(2)}\beta_{(2)}$.

Предложение 2.2. *Твисты находятся во взаимно однозначном соответствии со структурами модуль алгебр (над $\mathcal{H}_{op}$) на $\mathcal{H}^*$, такими, что $\varepsilon \circ f = f \circ \varepsilon = f$, где коединица в $\mathcal{H}$ ε есть единица в $\mathcal{H}^*$, а f произвольный элемент $\mathcal{H}^*$.*

Действительно,

$$\begin{gathered}
\varepsilon \circ \beta = \langle \varepsilon \otimes f_{(1)}, \mathcal{F}\rangle \varepsilon f_{(2)} \\
= \langle 1 \otimes f_{(1)}, (\varepsilon \otimes id)\mathcal{F}\rangle f_{(2)} = \langle f_{(1)}, 1\rangle f_{(2)} = \varepsilon_*(f_{(1)}) f_{(2)} = f,
\end{gathered}$$

$$\langle \varepsilon \circ f, a\rangle = \langle \varepsilon \otimes f, d(a)\rangle = \langle 1 \otimes f, (\varepsilon \otimes id) d(a)\rangle = \langle f, a\rangle.$$

Следствие 2.3. *Пусть $\{e_0 = 1, e_1, e_2, \ldots\}$ и $\{e^0 = \varepsilon, e^1, e^2, \ldots\}$ дуальные базисы в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$, соответственно, и пусть*

$$e^i \circ e^j = \sum_k m_k^{ij} e^k.$$

Тогда

$$d(1) = \sum_{r,s} m_0^{rs} e_r \otimes e_s \quad \text{и} \quad m_r^{0k} = m_r^{k0} = \delta_r^k.$$

Действительно,

$$\left\langle e^j \circ e^i, e_p \right\rangle = \left\langle e^j \otimes e^i, d(e_p) \right\rangle$$

$$\left\langle e^j \circ e^i, e_p \right\rangle = \left\langle \sum\nolimits_k \mathring{m}_k^{j\,i} e^k, e_p \right\rangle = \sum\nolimits_k \mathring{m}_k^{j\,i} \left\langle e^k, e_p \right\rangle = \mathring{m}_p^{j\,i}$$

$$\left\langle e^j \otimes e^i, d(e_p) \right\rangle = \left\langle e^j \otimes e^i, \sum\nolimits_{r,s} d_p^{r\,s} e_r \otimes e_s \right\rangle$$

$$= \sum\nolimits_{r,s} d_p^{r\,s} \left\langle e^j \otimes e^i, e_r \otimes e_s \right\rangle =$$

$$= \sum\nolimits_{r,s} d_p^{r\,s} \left\langle e^j, e_r \right\rangle \left\langle e^i, e_s \right\rangle = d_p^{j\,i}$$

таким образом $d_p^{j\,i} = \mathring{m}_p^{j\,i}$ и

$$d(e_p) := \sum\nolimits_{r,s} d_p^{r\,s} e_r \otimes e_s = \sum\nolimits_{r,s} \mathring{m}_p^{r\,s} e_r \otimes e_s\,,$$

$$d(e_p) = d(1 e_p) = d(1)\Delta(e_p) = \mathcal{F}\Delta(e_p)\,.$$

3. Примеры

3.1. Случай $U(b_2)$**.** Пусть $\mathcal{H} = U(b_2)$ - универсальная обертывающая борелевской алгебры с генераторами h, x и определяющим соотношением $[h, x] = x$. Известно, что мономы $e_{m,k} = h^m x^k, m, k = 0, 1, 2, \ldots$ образуют линейный базис в $\mathcal{H}$ (PBW-теорема). Рассмотрим в качестве унитарного решения уравнения Янга–Бакстера жорданову R-матрицу вида [9]

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\xi & \xi & \xi^2 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 1 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ясно, что R - унитарна (то есть $R_{21}R = 1 \otimes 1$), и квазиклассическая, так, что, согласно [2], существует твист $\mathcal{F} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ такой, что $R = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1})$, где ρ – векторное представление для $U(b_2)$. Для того, чтобы найти F, рассмотрим следующую алгебру, которая не является алгеброй Хопфа:

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbb{C}\langle t_{11}, t_{12} \rangle}{R T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1}$$

Здесь

$$T_1 = T \otimes 1 = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & t_{12} & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & t_{12} \\ 0 & 0 & t_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

и

$$T_2 = 1 \otimes T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 \\ 0 & t_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{11} & t_{12} \\ 0 & 0 & 0 & t_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

а $\mathbb{C}\langle t_{11}, t_{12}\rangle$ – алгебра, порождаемая некоммутативными элементами t_{11}, t_{12}, связанными соотношением $RT_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$.

Предложение 3.1.

1) $\mathcal{A} = \frac{\mathbb{C}\langle t_{11}, t_{12}\rangle}{[t_{11}, t_{12}] = \xi \cdot 1}$

2) $\mathcal{A}$ - *левая модуль алгебра над* $\mathcal{H} = U(b_2)$ *с действием:*

$$\tilde{x} t_{12} = t_{11},\ \tilde{h} t_{12} = -\frac{1}{2} t_{12},\ \tilde{x} t_{11} = 0,\ \tilde{h} t_{11} = \frac{1}{2} t_{11}.$$

Доказательство. Оба утверждения проверяются непосредственно. Кроме того эти утверждения можно доказать следующим образом. Прежде всего, легко доказать для $\mathcal{A}$ теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта: мономы

$$f^{k,m} = t_{11}^k t_{12}^m$$

образуют линейный базис в $\mathcal{A}$. Рассмотрим алгебру полиномов на группе B_2

$$Fun = \frac{\mathbb{C}\langle t_{11}, t_{12}\rangle}{T_1 T_2 = T_2 T_1} = \mathbb{C}[t_{11}, t_{12}]\,.$$

Известно, что Fun левая $U(b_2)$-модуль алгебра и правая $U(b_2)_{op}$-модуль алгебра, причём $U(b_2)$ действует на Fun как левое дифференцирование а $U(b_2)_{op}$ как правое дифференцирование. Поскольку R в определяющем соотношении стоит слева, то можно показать, что структура левой $U(b_2)$-модуль алгебры на $\mathcal{A}$ наследуется из Fun.

Следствие 3.2. *Как левые $U(b_2)$-модуль алгебры $\mathcal{A}$ и Fun изоморфны.*

Напомним, что используемое нами спаривание между $U(b_2)$ и Fun, определяется соотношением $\langle f, b\rangle = f\tilde{b}(e)$, в котором $f \in Fun, b \in U(b_2)$, а e обозначает единичный элемент в группе B_2.

Итак нам осталось найти дуальные базисы в $U(b_2)$ и Fun. Однако, известно, что это не возможно, так что нам надо расширить алгебру Fun. Мы поступим в соответствии с методом предложенным в [10]. Напомним, что Fun алгебра Хопфа, а указанная выше дуализация является спариванием алгебр Хопфа Fun и $U(b_2)_{op}$.

Пусть φ и ω обозначают элементы дуальные с h и x, соответственно. Тогда

$$\langle h^k x^m, \varphi^p \omega^q\rangle = k!\, m! \cdot \delta_{k,p} \cdot \delta_{m,q},$$

и тензор

$$\mathcal{T} = \exp(h \otimes \varphi)\exp(x \otimes \omega) \in U(b_2) \otimes \widetilde{Fun}$$

является каноническим элементом. В этом соотношении мы обозначили $\widetilde{Fun}$ алгебру Хопфа, порождаемую элементами φ, ω, $e^{\pm\varphi/2}$, где $\Delta\varphi, \Delta\omega$ определено по

$$\langle \Delta(a), h^k x^m \otimes h^p x^q\rangle = \langle a, h^k x^m h^p x^q\rangle.$$

Можно проверить, что φ примитивен, а $\Delta\omega = \omega \otimes e^{-\varphi} + 1 \otimes \omega$. Ясно, что $\widetilde{Fun}$ является правой модуль алгеброй над $U(b_2)_{op}$.

Если $\mathcal{F} \in U(b_2) \otimes U(b_2)$ является твистом, то мы определим новое умножение в $\widetilde{Fun}$ следующим образом: поскольку $\mathcal{F}$ определяет коассоциативную операцию $d_{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}\Delta(a)$ на $U(b_2)$, то в силу двойственности между $U(b_2)$ и $\widetilde{Fun}$ мы получаем новое ассоциативное умножение на $\widetilde{Fun}$, которое можно описать следующим образом.

Определим

$$\mathcal{T}_1 = \exp(h \otimes 1 \otimes \varphi)\exp(x \otimes 1 \otimes \omega) \quad \text{и} \quad \mathcal{T}_2 = 1 \otimes \mathcal{T},$$

а также

$$\widetilde{T}_1 = (\rho \otimes \rho \otimes id)\mathcal{T}_1 \quad \text{и} \quad \widetilde{T}_2 = (\rho \otimes \rho \otimes id)\mathcal{T}_2,$$

где ρ обозначает 2-мерное векторное представление алгебры $U(b_2)$. Тогда $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$. Далее определим $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ по

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{T}).$$

Можно проверить, что тогда

$$\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 = \mathcal{F}_{21}(\Delta_{op} \otimes id)(\mathcal{T})$$

Действительно, записав $\mathcal{T}$ в виде $\sum e_i \otimes e^i$, где $\{e_i\}, \{e^i\}$ дуальные базисы в $U(b_2)$ и $\widetilde{Fun}$, соответственно, имеем

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \sum e_i \otimes e_j \otimes e^i \circ e^j = \mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{T}).$$

Вычисляя $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, получаем

$$\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 = \sum e_i \otimes e_j \otimes e^j \circ e^i = \mathcal{F}_{21}(\Delta_{op} \otimes id)(\mathcal{T}).$$

Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}$ и $R = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{R})$. Так как $\Delta = \Delta_{op}$ то мы доказали

Теорема 3.3. *$\mathcal{R}\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ и, следовательно, $R\tilde{T}_1 \circ \tilde{T}_2 = \tilde{T}_2 \circ \tilde{T}_1$.*

Эта теорема позволяет по заданной жордановой R-матрице (и не только жордановой) построить твист.

Действительно, несложные вычисления показывают, что учитывая, что

$$h = \frac{1}{2}\,\sigma^z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} e^{\varphi/2} & e^{\varphi/2} \cdot \omega \\ 0 & e^{-\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Тогда определяющее соотношение $R\widetilde{T}_1 \circ \widetilde{T}_2 = \widetilde{T}_2 \circ \widetilde{T}_1$ можно записать в виде

$$e^{\varphi/2} \circ \omega = \omega \circ e^{\varphi/2} + \xi e^{-\varphi/2}.$$

Замечание 3.1. Напомним, что

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbb{C}\langle t_{11}, t_{12}\rangle}{RT_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1}$$

является правой модуль алгеброй над $\mathcal{H}_{op} = U(b_2)_{op}$. Стандартные рассуждения (мы должны исходить из алгебры $\widetilde{Fun}$, являющейся левым $\mathcal{H}$-Хопф модулем и правым $\mathcal{H}_{op}$-Хопф модулем) показывают, что алгебра, порождаемая $\widetilde{T}$ с определяющим соотношением $R\widetilde{T}_1 \circ \widetilde{T}_2 = \widetilde{T}_2 \circ \widetilde{T}_1$ является правым $\mathcal{H}_{op}$-Хопф модулем изоморфным с $\widetilde{Fun}$ как правый $\mathcal{H}_{op}$-модуль. Преимущество в использовании $\widetilde{T}$ вместо T состоит в том, что мы получаем возможность использовать дуальные базисы. Изоморфизм дается соответствием:

$$\varphi^p \omega^q \longrightarrow \varphi \circ \varphi \ldots \circ \varphi \circ \omega \circ \ldots \circ \omega\,,$$

которое мы сокращенно обозначим $\varphi^p \circ \omega^q$.

Перепишем соотношение

$$e^{\varphi/2} \circ \omega = \omega \circ e^{\varphi/2} + \xi e^{-\varphi/2}$$

в виде

$$\varphi \circ \omega = \omega \circ \varphi + 2\xi e^{-\varphi}.$$

По индукции получаем

$$e^{n\varphi} \circ \omega - \omega \circ e^{n\varphi} = 2n\xi e^{(n-1)\varphi}.$$

Используя аналитическое продолжение (формально следует положить $z = e^{\varphi}$), приходим к выводу, что

$$e^{a\varphi} \circ \omega - \omega \circ e^{a\varphi} = 2a\xi e^{(a-1)\varphi}\,.$$

Используя индуцию по m получаем

$$\omega^m \circ e^{a\varphi} = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} a(a-1)\ldots(a-p+1)(2\xi)^p e^{(a-p)\varphi} \circ \omega^{m-p}\,. \quad (3)$$

Напомним, что для построения твиста следует найти коэффициенты при 1 в выражении $(\varphi^n \circ \omega^p) \cdot (\varphi^m \circ \omega^q)$ после его приведения к виду $\sum C_{rs}^{np,mq} \varphi^r \circ \omega^s$. Иными словами надо найти $C_{00}^{np,mq}$.

Из формулы (3) следует, что если n и q отличны от нуля, то $C_{00}^{qm,kn} = 0$. Итак, надо найти $C_{00}^{0m,k0}$. Более того, очевидно, что достаточно рассмотреть только последний член, а именно

$$(-1)^m (2\xi)^m a(a-1)\ldots(a-m+1) e^{(a-m)\varphi}\,.$$

Для нахождения правил коммутации элементов ω^m и φ^k, следует продифференцировть формулу (3) по "переменной a" несколько раз и положить $a = 0$. В частности, несложно заметить, что

$$C_{00}^{0m,k0} = \frac{(-2\xi)^m}{m!k!} \cdot \frac{d^k}{da^k}(a)_m \bigg|_{a=0}\,,$$

где $(a)_m = a(a-1)\dots(a-m+1)$. Тогда

$$\mathcal{F} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}(2\xi)^m \cdot x^m \otimes \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \frac{d^k}{da^k}(a)_m \bigg|_{a=0} .$$

где h, x – генераторы алгебры $U(b_2)$.

Второй сомножитель в тензорном произведении является разложением $(a)_m$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = h$. Таким образом окончательно получаем

$$\mathcal{F} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-2\xi x)^m \otimes (h)_m = (1\otimes 1 - 2\xi x \otimes 1)^{1\otimes h} = \exp(\ln(1-2\xi x)\otimes h) .$$

Можно проверить, что в фундаментальном представлении воспроизводится жорданова матрица

$$(\rho\otimes\rho)(\mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -\xi & \xi & \xi^2 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 1 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3.2. Еще один пример твиста $U(b_2)$. В качестве другого элементарного примера рассмотрим унитарное квазиклассическое решение уравнения Янга–Бакстера (см., например, [5])

$$\mathbf{R}_{triang} = \begin{pmatrix} 1 & -\xi & \xi & -\xi^2 \\ 0 & 1 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \xi r + \mathcal{O}(\xi^2) , \qquad (4)$$

где $r = \sigma^+ \otimes \sigma^0 - \sigma^0 \otimes \sigma^+$ и $\sigma^0 = \text{диаг}(1,1)$. Из структуры классической r-матрицы видно, что для построения носителя r-матрицы к борелевской алгебре Ли h, x из предыдущего примера необходимо добавить центральный элемент c. В качестве двойственных базисов в U и U^* выберем

$$h^m\, x^k\, c^p \quad \text{и} \quad \frac{\varphi^m\, \omega^k\, \alpha^p}{m!\, k!\, p!} \qquad (5)$$

Канонический элемент в $U \otimes U^*$ равен

$$\mathcal{T} = \exp\left(h\otimes\varphi\right)\exp\left(x\otimes\omega\right)\exp\left(c\otimes\alpha\right) , \qquad (6)$$

а в представлении $\rho(c) = 1,\ \rho(h) = \frac{1}{2}\sigma^z,\ \rho(x) = \sigma^+$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= e^{h\otimes\varphi} e^{x\otimes\omega} e^{c\otimes\alpha}\Big|_{\{\rho : c=1\,,\, h=\frac{1}{2}\sigma^z\,,\, x=\sigma^+\}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Соотношение $RTT = TT$ с R-матрицей (4) определяет новое (некоммутативное) умножение генераторов $U^* : \varphi,\ \omega,\ \alpha$

$$\varphi\alpha = \alpha\varphi, \quad \varphi\omega = \omega\varphi, \quad \alpha\omega = \omega\alpha + \xi\exp(-\varphi). \tag{8}$$

Для определения структурных констант нового умножения воспользуемся коммутативностью элемента φ и перестановочными соотношениями (8)

$$\varphi^m\omega^k\alpha^p \circ \varphi^{m_1}\omega^{k_1}\alpha^q = \varphi^{m+m_1}\omega^{k+k_1}\alpha^{p+q} + \ldots . \tag{9}$$

Чтобы иметь ненулевые структурные постоянные $m^{(mkp)(m_1k_1q)}_{(000)}$ для вычисления $\mathcal{F}$ необходимо положить $m = m_1 = 0,\ k = q = 0,\ p = k_1$. Используя следствие (8), для упорядочивания произведения генераторов $\alpha^p\omega^k$ имеем $(k \le p)$

$$\alpha^p\omega^k = \omega^k\alpha^p + \sum_{n=0}^{k}\omega^n\alpha^{p-k+n}C_k^n\xi^{k-n}C_p^{k-n}(k-n)!\,e^{-(k-n)\varphi} . \tag{10}$$

Таким образом, интересующие нас структурные константы равны $(k = p, n = 0)$

$$m^{(00p)(0p0)}_{(000)} = \frac{\xi^p}{p!},$$

а соответствующий универсальный элемент скручивания имеет вид

$$\mathcal{F} = \sum_p \frac{\xi^p}{p!}c^p \otimes x^p = \exp(\xi c \otimes x) . \tag{11}$$

В представлении $\mathbb{C}^2$ получаем 4×4-матрицу и выражение $R = F_{21}F^{-1}$ совпадает с исходной R-матрицей.

3.3. Случай супералгебры Ли sb_2. Рассмотрим пример супералгебры Ли sb_2, также имеющей два генератора: чётный h и нечетный x с коммутационными соотношениями

$$[h, x] = x, \quad [x, x] = 0 .$$

В универсальной обёртывающей супер-алгебре $U(sb_2)$ обозначение $[,]$ понимается как суперкоммутатор ($\mathbb{Z}_2$-градуированный коммутатор):

$$[a,b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba\,.$$

Унитарное квазиклассическое решение Z_2-градуированного уравнения Янга–Бакстера [11] выберем в виде

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \eta & -\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & 1 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где η нечётный грассманов параметр: $\eta^2 = 0$.

Генераторы двойственной алгебры $U^*(sb_2)$: $\{u, \omega\ :\ \langle u, h\rangle = 1,\ \langle \omega, x\rangle = 1\}$, $\omega^2 = 0$ взаимно коммутируют. Канонический элемент $\mathcal{T} \in U \otimes U^*$ равен

$$\mathcal{T} = e^{h\otimes u}\, e^{x\otimes\omega}\,. \tag{13}$$

Как и в первом примере супералгебра sb_2 имеет двумерное представление:

$$T = \begin{pmatrix} e^{u/2} & -e^{u/2}\omega \\ 0 & e^{-u/2} \end{pmatrix},$$

Фиксируем двойственные базисы в U и U^*

$$h^m x^k \quad \text{и} \quad u^m \omega^k/m!\,,$$

где $(m = 0, 1, \cdots; k = 0, 1)$. Соотношение $RTT = TT$ с R-матрицей (12) определяет новое (некоммутативное) умножение генераторов u, ω дуальной супералгебры U^*

$$\omega u = u\omega - 2\eta e^{-u}, \quad \omega^2 = 0. \tag{14}$$

Для определения структурных констант нового умножения воспользуемся коммутационными соотношениями (14). Чтобы структурная постоянная $m_{(00)}^{(mk)(m_1k_1)}$ была отлична от нуля при вычислении $\mathcal{F}$ необходимо положить $m = 0$, $k_1 = 0$, $m_1 = k = 1$. Как следствие (14), получаем $m_{(00)}^{(01)(10)} = -2\eta$, а соответствующий универсальный элемент скручивания имеет вид

$$\mathcal{F} = 1 - 2\eta x \otimes h. \tag{15}$$

Универсальная R-матрица

$$\mathcal{R} = 1 - 2\eta(x \otimes h - h \otimes x) = \exp(-2\eta(x \otimes h - h \otimes x)) \qquad (16)$$

линейна по генератору x из-за нильпотентности x и η.

3.4. Скручивание квантовой супералгебры $U_q(gl(1|1))$. Квантовая алгебра $U_q(gl(1|1))$ (см. приложение) даёт пример более сложной R-матрицы. В двумерном представлении квантовой алгебры эта R-матрица равна

$$R^{(t)} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & \xi \\ 0 & q & \omega & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

Соотношение $R^{(t)}TT = TTR$ с $R^{(t)}$-матрицей (17) определяет новое (некоммутативное) умножение элементов (генераторов) $U_q(gl(1|1))^* : \alpha, \varphi, b, g$ входящих в T-матрицу. При вычислении явного вида матриц T_1 и T_2 необходимо включать знаки связанные с Z_2-градуировкой (см. приложение):

$$T_1 = T \otimes I = \begin{pmatrix} a & 0 & u & 0 \\ 0 & a & 0 & -u \\ w & 0 & d & 0 \\ 0 & -w & 0 & d \end{pmatrix}, \quad T_2 = I \otimes T = \begin{pmatrix} a & u & 0 & 0 \\ w & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & u \\ 0 & 0 & w & d \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

В правой части $RTT = TT$-соотношения стоит R-матрица с $\xi = 0$. Единственное коммутационное соотношение, дающее ненулевую структурную константу $m_{(0)}^{(j)(k)}$ с ненулевыми мультииндексами для вычисления твиста $\mathcal{F}$, имеет вид

$$u^2 = \frac{\xi}{q + q^{-1}} d^2, \quad \text{или} \quad b^2 = \frac{\xi}{q + q^{-1}} 1 + \cdots,$$

где опущенные слогаемые содержат отличные от единицы генераторы. Таким образом $m_{(0000)}^{(0001)(0001)} = -\xi/(q + q^{-1})$ и искомый твист равен

$$\mathcal{F} = \exp\left(-\frac{\xi}{q + q^{-1}} e \otimes e\right) = 1 - \frac{\xi}{q + q^{-1}} e \otimes e\,.$$

4. Обсуждение

Аналогичным образом можно рассмотреть квантовую группу $U_q(g\ell_n)$. Известно, что дуальная алгебра Хопфа $Fun_q(GL_n)$, то есть алгебра функций на квантовой группе, получается из соотношения $R_qT_1T_2 = T_2T_1R_q$, где R_q есть R-матрица Дринфельда-Джимбо. Тогда определяемая $R'_qT_1T_2 = T_2T_1R_q$ алгебра будет правой модуль алгеброй над $U_q(g\ell_n)_{op}$. Здесь R'_q - другая R-матрица, такая что $\mathcal{P}R'_q$ и $\mathcal{P}R_q$ имеют один и тот же спектр ($\mathcal{P}$ – оператор перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$). Тогда существует универсальный твист $\mathcal{F} \in U_q(g\ell_n)^{\otimes 2}$, такой что $R'_q = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{F}_{21}\mathcal{R}_q\mathcal{F}^{-1})$, где $\mathcal{R}_q$ является универсальной R-матрицей а $\rho : U_q(g\ell_n) \to End(\mathbb{C}^n)$ есть фундаментальное векторное представление алгебры Хопфа $U_q(g\ell_n)$. Преобразование скручивания можно использовать для связи и классификации матричных решений уравнения Янга–Бакстера. Так ряд решений для $n = 2$, т.е. 4×4 матриц R, перечисленных в [12] как независимые, связаны твист-преобразованиями [13].

Приложение

А. Универсальная R-матрица для $gl_q(1|1)$.

Супералгебра $U_q(gl(1|1))$ порождается двумя чётными h, c, и двумя нечётными e, f элементами, из которых c – центральный, а остальные удовлетворяют соотношениям

$$[h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f, \quad e^2 = f^2 = 0, \quad [e,f]_+ = (q^c - q^{-c})/(q - q^{-1})$$

Z_2-градуированная структура алгебры Хопфа определяется копроизведением

$$\begin{aligned}
\Delta(h) &= h \otimes 1 + 1 \otimes h,\\
\Delta(c) &= c \otimes 1 + 1 \otimes c,\\
\Delta(e) &= e \otimes q^c + 1 \otimes e,\\
\Delta(f) &= f \otimes 1 + q^{-c} \otimes f,
\end{aligned}$$

и коединицей $\varepsilon(h) = \varepsilon(c) = \varepsilon(e) = \varepsilon(f) = 0$. Алгебра $U_q(gl(1|1))$ квазитреугольна с универсальной R-матрицей

$$\mathcal{R} = q^{\frac{1}{2}(c\otimes h + h\otimes c)}(1 - \omega\, e \otimes f) \in U_q(gl(1|1))^{\otimes 2},$$

где $\omega = (q - q^{-1})$. Эта универсальная R-матрица сплетает копроизведение с противоположным.

Отметим, что супералгебра $gl_q(1|1)$ допускает твист абелева типа, поскольку она имеет двумерную классическую абелеву подалгебру, растягиваемую элементами c и h с примитивным копроизведением. При специальном выборе такого твистующего элемента один из нечётных генераторов, скажем e, можно превратить в примитивный элемент. Действительно,

$$\Delta_t(e) = e^{\alpha h\otimes c}\Delta(e)e^{-\alpha h\otimes c} = e\otimes q^c e^{2\alpha c} + 1\otimes e = e\otimes 1 + 1\otimes e$$

если α положить равным $-\frac{1}{2}\log(q)$.

Следовательно, существует последующий твист с $\exp(\xi e\otimes e)$ в качестве твистующего коцикла. В результате таких преобразований получаем новую универсальную R-матрицу

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \exp(-\xi e\otimes e)e^{\alpha c\otimes h}\mathcal{R}e^{-\alpha h\otimes c}\exp(-\xi e\otimes e)\,,$$

имеющую в матричном представлении внедиагональный параметр.

B. Дуальная алгебра Хопфа $U_q(gl(1|1))^*$.

Генераторы дуальной к $U_q(gl(1|1))$ коквазитреугольной алгебры Хопфа определяются нетривиальными спариваниями

$$\langle\varphi, h\rangle = 1,\quad \langle\alpha, c\rangle = 1,\quad \langle b, e\rangle = 1,\quad \langle g, f\rangle = 1,$$

тогда как остальные спаривания обращаются в нуль. Генераторы φ и α четные, тогда как b, g нечетны. Канонический элемент

$$\mathcal{T} \in U_q(gl(1|1))\otimes U_q(gl(1|1))^*$$

определяется стандартнными экспонентами из-за нильпотентности генераторов e, f (и b, g)

$$\mathcal{T} = \exp(f\otimes g)\exp(c\otimes\alpha)\exp(h\otimes\varphi)\exp(e\otimes b),$$

$$\mathcal{T} = (1 + f\otimes g)\exp(c\otimes\alpha)\exp(h\otimes\varphi)(1 + e\otimes b).$$

Соотношения дуальности позволяют вычислить копроизведения и найти закон умножения генераторов дуальной алгебры Хопфа

$$\Delta_*(\varphi) = \varphi\otimes 1 + 1\otimes\varphi,$$
$$\Delta_*(\alpha) = \alpha\otimes 1 + 1\otimes\alpha - \frac{2\eta}{\omega}b\otimes g,$$
$$\Delta_*(b) = b\otimes\exp(-2\varphi) + 1\otimes b,$$
$$\Delta_*(g) = g\otimes 1 + \exp(-2\varphi)\otimes g,$$

$$[\alpha, b] = -\eta\, b, \quad [\alpha, g] = -\eta\ g, \quad b^2 = g^2 = 0, \quad [b, g]_+ = 0.$$

Для того чтобы проверить, что канонический элемент $\mathcal{T}$ является бихарактером

$$(\Delta \otimes 1)\mathcal{T} = \mathcal{T}_{13}\mathcal{T}_{23}\,, \quad (1 \otimes \Delta_*)\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12}\mathcal{T}_{13}\,,$$

надо, используя копроизведение Δ в алгебре Хопфа $U_q(gl(1|1))$ и двойственное копроизведение Δ_* в $U_q(gl(1|1))^*$, учесть конкретный вид формулы Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(tX + Y) = \exp(tX)\exp(\frac{1 - e^{-t}}{t}Y), \quad [X, Y] = Y.$$

Эта формула позволяет выделить множитель в $(1 \otimes \Delta_*)\mathcal{T}$

$$\exp(c \otimes (\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha - \frac{2\eta}{\omega} b \otimes g)) =$$
$$= \exp(c \otimes \alpha \otimes 1)\exp(-\frac{(q^c - q^{-c})}{\omega} b \otimes g))\exp(c \otimes 1 \otimes \alpha)\,,$$

из-за коммутационного соотношения

$$[c \otimes \alpha \otimes 1 + c \otimes 1 \otimes \alpha, 1 \otimes b \otimes g] = -2\eta c \otimes b \otimes g.$$

В двумерном представлении суперaлгебры Хопфа $U_q(gl(1|1))$ элементы 2×2-матрицы $T = \begin{pmatrix} a & u \\ w & d \end{pmatrix}$ можно выразить через генераторы дуальной суперaлгебры $U_q(gl(1|1))^*$

$$a = e^{(\alpha+\varphi)}, \quad u = e^{(\alpha+\varphi)}b, \quad w = ge^{(\alpha+\varphi)}, \quad d = e^{(\alpha-\varphi)} + ge^{(\alpha+\varphi)}b\,.$$

Литература

1. V. Drinfeld, *Quantum groups.* In: *Proccedings of the International Congress of Mathematician.* — Berkeley, CA, 1986. AMS, Providence, RI (1987).
2. В. Г. Дринфельд, *Постоянные квазиклассические решения квантового уравнения Янга-Бакстера.* — ДАН СССР **273**, No. 3 (1983), 531–535.
3. В. Г. Дринфельд, *Квази-хопфовы алгебры.* — Алгебра и Анализ **1:6** (1989), 114–148.
4. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Квантование групп и алгебр Ли.* — Алгебра и Анализ **1**, No. 1 (1989), 178–206.
5. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, A. I. Mudrov, *Extended jordanian twists for Lie algebras.* — J. Math. Phys. **40**, No. 9 (1999), 4569–4581.
6. V. D. Lyakhovsky, A. A. Stolin, P. P. Kulish, *Chains of Frobenius subalgebras of so(M) and the corresponding twists.* — J. Math. Phys. **42**, No. 10 (2001), 5006–5019.

7. S. Parmentier, *On coproducts of quasitriangular Hopf algebras*, Алгебра и Анализ **6**, вып. 4 (1994), 204–222.
8. S. Zakrzewski, *A characterization of coboundary Poisson Lie groups and Hopf algebras.* — Banach Center Publ. **40** (1997), 273–278.
9. E. E. Demidov, Yu. I. Manin, E. E. Mukhin, D. V. Zhdanovich, *Non-standard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang–Baxter equation*, In: Yukawa seminar *Common Trends in mathematics and quantum field theories.* — Ed. by T. Eguchi, T. Inami and T. Miwa. Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990), 203–218.
10. P. P. Kulish, A. I. Mudrov, *Quantization of inhomogeneous Lie bialgebras*, J. Geom. Phys. **42** (2002), 64–77.
11. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method: recent developments*, — in: Integrable quantum field theories. Ed. by J.Hietarinta, C.Montonen; Lect. Notes Phys. **151** (1982), 61–119.
12. J. Hietarinta, *Solving the two-dimensional constant Yang–Baxter equation* — J. Math. Phys., **34**, No. 5 (1993), 1725–1756.
13. P. P. Kulish, *Symmetries related to Yang–Baxter equation and reflection equations* — Intern. J. Mod. Phys., B**13**, No. 24/25 (1999), 2943–2951.

Stolin A. A., Kulish P. P., Damaskinsky E. V. On construction of universal twist element from R-matrix.

A method to construct a universal twist element using constant quasi-classical unitary matrix solution of the Yang - Baxter equation is proposed. The method is applied to few known R-matrices, corresponding to Lie (super)algebras of rank one.

Факультет математики,
Гётеборгский университет, Швеция
E-mail: E-mail: astolin@math.chalmers.se

Санкт-Петербургское отделение
Математического инситута им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: E-mail: kulish@pdmi.ras.ru

Военный инженерный технический университет
E-mail: E-mail: evd@pdmi.ras.ru