Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

А. А. Гриб, Г. Н. Парфёнов

МОЖЕТ ЛИ ИГРА БЫТЬ КВАНТОВОЙ?

Математические структуры часто находят естественное применение за пределами области их возникновения. Формализм квантовой механики – не исключение: первоначально приспособленный к физике микромира, он начал использоваться при моделирования некоторых макроскопических взаимодействий содержащих элемент неопределенности. Так, в недавней дискуссионной работе D. Deutsch [1], статьях I.Polley [2] и J. Finkelstein [3] принципы квантовой механики обсуждаются в контексте теории принятия решений. Несмотря на спорный характер и неясность некоторых ключевых моментов, многочисленные публикации только лишь последнего года свидетельствуют о начале "квантового штурма" теории игр – проквантованным оказался даже "Английский Аукцион" [4].

Хотя содержание многих работ часто вырывается за рамки теоретической физики, в подавляющем большинстве публикаций квантовость обусловлена использованием микрочастиц или основанных на них квантовых компьютеров. Вместе с тем, круг явлений, допускающих естественное объяснение на основе принципов квантовой механики значительно шире. В предваряющей "эпоху квантизации игр и решений" книге А. А. Гриба [5], а также в книге А. А. Гриба и Jr. W. A. Rodrigues [6] продемонстрировано квантовомеханическое описание *макроскопических* систем, поведение которых основано на нарушении свойства дистрибутивности случайных событий. Как известно, в физике микромира недистрибутивность носит объективный характер и не может быть устранена в принципе. Оказывается, что для макросистем сочетание недистрибутивности и случайности выражает некоторый специфический вариант "незнания" наблюдателя, выходящий за рамки стандартной вероятностной интерпретации. В настоящей работе дан пример применения квантовомеханического форма-

---

Один из авторов (А. А. Г.) благодарит фонд министерства образования РФ за финансовую поддержку (грант E0-00-14).

лизма к анализу конфликтного взаимодействия, построенного на обобщении примеров макроскопических автоматов, симулирующих поведение некоторых квантовых систем, рассмотренных ранее А. А. Грибом и Р. Р. Запатриным [7, 8].

Специфическая особенность возникающей на этой основе антагонистической игры состоит в том, что действия противоборствующих строн идут вразрез с традиционной логикой – дизъюнкция и конъюнкция не подчинены дистрибутивному закону. Это приводит к крушению классической интерпретации смешанной стратегии: сумма вероятностей альтернативных исходов оказывается большей единицы. Квантовый характер игры проявляется в том, что логика взаимодействия игроков описывается посредством той же самой недистрибутивной орторешетки, что и квантовая система со спином $\frac{1}{2}$. Учет этого обстоятельства приводит к новому представлению о смешанной стратегии, в роли которой выступает “волновая функция” – нормированный вектор гильбертова пространства. Вычисления соответствующих вероятностей и среднего выигрыша проводятся при этом в соответствии со стандартными правилами квантовой механики. В отличие от примеров квантовых игр [9–11], так или иначе апеллирующих к свойствам микромира, в данной работе рассматривается сугубо макроскопическая игра, квантовая природа которой никак не связана с микрочастицами. Она описывает простейшую из многочисленных ситуаций неопределенности, имеющих место в экономике, биологии, социальном поведении, адекватным средством анализа которых могут явиться идеи и методы, используемые в квантовой механике.

1. Где ты был, Боб?

Игра “Хитрая Алиса” является “квантовой” модификацией хорошо известной игры, каждый из участников которой называет какой-либо из предварительно оговоренных предметов и при несовпадении результатов один из них выигрывает у другого некоторую заранее обусловленную сумму. Участники игры – Алиса и Боб имеют квадратную коробку и шарик. Боб размещает шарик в каком-либо из углов коробки, но, где именно, партнерше не сообщает. Алиса должна это угадать. Она выдвигает соответствующие гипотезы и предлагает их партнеру в форме вопросов, на которые тот отвечает “да” или “нет”. Считается, что Боб –

парень честный и всегда говорит правду. Отрицательный ответ вызывает у Алисы негодование. Объясняя причину неудачи "неправильными" действиями Боба, женщина требует, чтобы тот выплатил ей соответствующую компенсацию. Если же гипотеза подтверждается, Алиса, гордая своей проницательностью, претензий не высказывает.

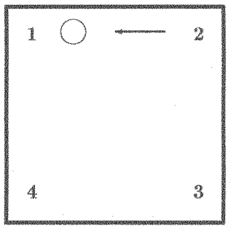

Рис. 1. Шарик Боба устремляется в задуманное Алисой место

В отличие от известных игр подобного типа [12, 13], правила "Хитрой Алисы" содержат одну дополнительную особенность: после получения вопроса Бобу предоставлена возможность перемещения шарика в любую из *смежных* вершин квадрата. Это дополнительное условие решительно меняет поведение Боба, побуждая его проявлять активность под воздействием суждений Алисы. Поскольку отрицательные ответы для него невыгодны, он, когда это возможно, прибегает к перемещению шарика в соответствующую смежную вершину. Так, располагаясь в вершинах **2** или **4** и получив от Алисы вопрос "Ты в вершине **1**?", Боб быстро перегоняет шарик в названную вершину и совершенно честно отвечает "да". Вместе с тем, если изначально шарик Боба находился в вершине **3**, ему не избежать отрицательного ответа, в какую бы из соседних вершин он не перемещал свой шарик, и он проигрывает. Обратим внимание, что в этом случае Алиса получает не только выигрыш, но еще и *точную информацию*[1] об исходном местоположении шарика – ведь честный отри-

[1]Требуя компенсации, Алиса хитрит – в действительности, ее интересует не подтверждение собственной проницательности, а *изначальное* положение шарика Боба. Поощрение правильных ответов такой возможности не дает.

цательный ответ простодушного Боба тотчас же обнаруживает его изначальную позицию.

2. Равновесие – это когда все довольны

Взаимодействие игроков описывается 4×4-матрицей (h_{jk}) выигрышей Алисы в каждой из 16 возможных игровых ситуаций:

Таблица 1. Платежная матрица Алисы

$A \backslash B$	**1**	**2**	**3**	**4**
1?	0	0	a	0
2?	0	0	0	b
3?	c	0	0	0
4?	0	d	0	0

где a, b, c, $d > 0$ – значения ее выигрышей отвечающие тем ситуациям, когда Боб не в состоянии ответить на вопрос партнерши утвердительно. Основной задачей теории матричных игр [13, 14] является нахождение так называемых *точек равновесия* – игровых ситуаций (j_0, k_0) удовлетворяющих системе неравенств фон Неймана–Нэша:

$$h_{j,k_0} \leq h_{j_0,k_0} \leq h_{j_0,k}.$$

Равновесие выгодно для каждого из игроков – выход из него в одностороннем порядке, может разве лишь уменьшить его выигрыш. Непосредственная проверка показывает, что в данном случае равновесие невозможно и, таким образом, ни Алиса, ни Боб не располагают стратегиями, которых было бы разумно придерживаться в отдельном туре игры.

Одним из основных достижений теории игр является переориентация рационализма с однократного выбора на выбор “линий поведения” при многократном повторении игры, в качестве которых выступают так называемые “смешанные” стратегии – распределения вероятностей применения обычных, “чистых” стратегий. В качестве критерия оптимальности выступает суммарный выигрыш или, более точно, средний выигрыш в расчете на один тур. Понятие равновесия буквально переносится с чистых стратегий на смешанные:

$$\mathcal{H}(x, y^0) \leq \mathcal{H}(x^0, y^0) \leq \mathcal{H}(x^0, y), \tag{1}$$

где $x^0 = (x_j^0)_{1\le j\le 4}$, $y^0 = (y_k^0)_{1\le j\le 4}$ – оптимальные смешанные стратегии, а $\mathcal{H}(x,y)$ – *платежная функция* Алисы – средний выигрыш в результате применении ею смешанной стратегии x, а Бобом смешанной стратегии y. В случае, когда действия игроков *независимы*, например, при отсутствии между ними обмена информацией, средний выигрыш Алисы дается выражением

$$\mathcal{H}(x,y) = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk} x_j y_k, \tag{2}$$

а существование равновесий в смешанных стратегиях гарантируется теоремой фон Неймана – основной теоремой теории матричных игр. Их нахождение сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования.

Применимо ли все это к рассматриваемой игре? Правильно ли, найденные таким образом, оптимальные стратегии отражают поведение игроков? С одной стороны, каждый из них делает свой выбор в независимости от партнера, с другой, – их действия не вполне независимы: ведь Боб реагирует на вопросы Алисы.

3. Классическая "Глупая Алиса"

В классической теории матричных игр игроки информацией не обмениваются, а оптимальные стратегии полностью определяются их интересами. Этот недостаток фон неймановской теории игр, с одной стороны, привел к формированию иных концепций равновесия, например, по фон Штакельбергу [15], а, с другой, к изучению влияния психологического отношения на исходы игр [16]. Наше внимание будет сосредоточено на *логическом* аспекте конфликтного взаимодействия игроков. Чтобы понять, какую роль здесь может играть логика, рассмотрим несколько иную, с точки зрения поведения участников, игру "Глупая Алиса", имеющую однако ту же самую платежную матрицу, что и игра с шариком.

Алиса и Боб решили встретиться на углу четырехугольного дома, но на каком именно, не договорились. Как водится, Боб приходит на свидание первым. Если Алиса приходит к тому из углов, откуда ей удается видеть Боба, она довольна, в противном случае, полагая, что тот "опять не пришел", уходит обиженной и на следующий день Боб вынужден завоевывать ее благосклонность с помощью соответствующего подарка. В отличие от предыдущей игры, каждый участник этой игры занимает *пассивную* позицию. Действительно, если Боб не видит Алисы, у него нет оснований перебегать от одного угла дома к другому, поскольку его подруга может быть еще просто не пришла.

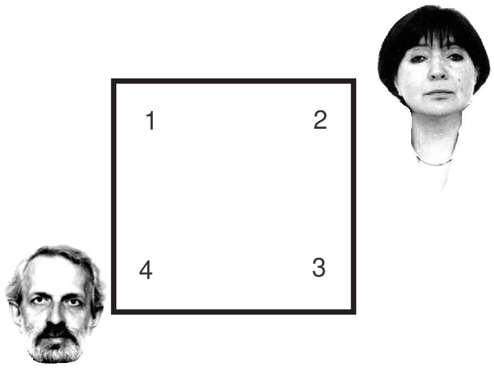

Рис. 2. Алиса не видит Боба и очень этим расстроена

Для удобства закодируем стратегии Алисы и Боба векторами $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ \alpha_4)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, состоящими из нулей и единиц так, что компонента, равная единице отвечает применяемой чистой стратегии. Поскольку

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j = \sum_{j=1}^{4} \beta_j = 1, \qquad \alpha_j \cdot \alpha_k = \beta_j \cdot \beta_k = 0, \quad j \neq k,$$

выигрыш Алисы в одном туре любой из рассматриваемых игр составит величину

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk} \alpha_j \beta_k. \tag{3}$$

Таким образом, в *отдельном* туре игры “хитрая” Алиса ничем не отличается от “глупой”. Как будет видно далее, различия проявляются в их *поведении*, при многократном повторении игр и выражаются в разном способе подсчета *среднего* выигрыша.

Рассмотрим классический вариант взаимодействия. Поскольку стратегии "глупой" Алисы и стратегии Боба не коррелируют

$$E(\alpha_j \cdot \beta_k) = E\alpha_j \cdot E\beta_k,$$

усреднение выигрыша $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ приводит к классическому выражению (2)

$$E\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk} E\alpha_j \cdot E\beta_k = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk} x_j y_k = \mathcal{H}(x, y),$$

где x_j, y_k – частоты применения соответствующих чистых стратегий. Таким образом, платежная функция "глупой" Алисы имеет вид:

$$\mathcal{H}(x, y) = a x_1 y_3 + b x_2 y_4 + c x_3 y_1 + d x_4 y_2. \tag{4}$$

Несложные вычисления показывают, что "Глупая Алиса" имеет единственную точку равновесия:

$$x = (\mu a^{-1},\ \mu b^{-1},\ \mu c^{-1},\ \mu d^{-1}), \qquad y = (\mu c^{-1},\ \mu d^{-1},\ \mu a^{-1},\ \mu b^{-1}),$$

где $\mu = (a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1})^{-1}$ – *цена* игры, т.е. средний выигрыш Алисы в ситуации равновесия. Таким образом, оптимальные частоты посещения Бобом углов дома обратно пропорциональны штрафам, которому может подвергнуть его обиженная подруга. Оптимальная стратегия Алисы является более изощренной: сдерживая алчность, она старается "подлавливать" Боба в тех местах, которые способны подвергнуть его меньшему штрафу.

Напишем выражение функции выигрыша "глупой" Алисы в форме, удобной для последующих сравнений получаемых ею результатов с результатами ее "хитрой" подруги. С этой целью рассмотрим случайные события A_{13}, $A_{24} \subset \mathcal{S}_A$, и B_{13}, $B_{24} \subset \mathcal{S}_B$, где $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ – множества чистых стратегий Алисы и, соответственно, Боба. Каждое из указанных событий соответствует выбору пары противоположных углов дома. Поскольку события $A_{jk} \cap B_{lm}$ образуют разбиение пространства $\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B$, функцию выигрыша Алисы можно записать как смесь условных математических ожиданий:

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{jk,lm} E_{A_{jk} \cap B_{lm}} \mathcal{H} \cdot P(A_{jk} \cap B_{lm}).$$

В случае нашей платежной матрицы это выражение принимает вид:

$$E_{A_{13}\cap B_{13}}\mathcal{H}\cdot P(A_{13}\cap B_{13})+E_{A_{24}\cap B_{24}}\mathcal{H}\cdot P(A_{24}\cap B_{24}), \qquad (5)$$

где p^l_{jk}, q^l_{jk} – условные вероятности выбора угла l, из заданной пары взаимно противоположных углов $\{j,k\}$. При этом:

$$\begin{gathered} P(A_{jk}\cap B_{jk})=(x_j+x_k)(y_j+y_k),\\ p^l_{jk}=x_l/(x_j+x_k), \quad q^l_{jk}=y_l/(y_j+y_k) \end{gathered} \qquad (6)$$

Если оба игрока выбирают диагональ $\{1,3\}$, средний условный выигрыш Алисы

$$E_{A_{13}\cap B_{13}}\mathcal{H}=ap^1_{13}q^3_{13}+cp^3_{13}q^1_{13},$$

а в случае одновременного выбора диагонали $\{2,4\}$ он составляет величину

$$E_{A_{24}\cap B_{24}}\mathcal{H}=bp^2_{24}q^4_{24}+dp^4_{24}q^2_{24}.$$

При выборе разных диагоналей, условный выигрыш равен нулю, поскольку в этом случае Алиса всегда имеет возможность видеть Боба и ему не приходится тратиться на подарки.

4. Разные логики – разное поведение

В отличие от игры “Глупая Алиса”, “Хитроумная Алиса” представляет собой модель процедуры измерения, в некоторой степени напоминающей процесс квантового измерения: желая знать изначальное положение шарика, Алиса своими вопросами активизирует Боба, “приготовляя” его в определенном “состоянии”. Алиса задает вопросы, однако логика ее предположений несколько необычна. Остановимся на этом подробнее.

Будем исходить из того, что хитрую Алису выигрыш интересует лишь в той мере, в какой его получение способствует выяснению исходной позиции Боба. С этой точки зрения неудивительно, что при тожественности платежных матриц “хитрой” и “глупой” Алис, соответствующие игровые взаимодействия отличаются друг от друга. Глупая Алиса *всегда знает*, какую из стратегий применил ее партнер. Хитрая же Алиса способна *достоверно* определить выбранную ее партнером стратегию не во всех случаях, а лишь тогда, когда ее гипотеза оказывается неверной. Для этого ей так же, как и “глупой” приходится рассуждать от противного, но руководствоваться, при этом, иной –

квантовой логикой, в основе которой лежит не булева алгебра, а *недистрибутивная орторешетка* [17, 18]. Если обозначить α_k, $(k = 1, 2, 3, 4)$ предположения Алисы о том, что шарик Боба *находится* в вершине под номером k, то их отрицания строятся по следующей схеме:

$$\neg\alpha_1 = \alpha_3, \quad \neg\alpha_3 = \alpha_1, \quad \neg\alpha_2 = \alpha_4, \quad \neg\alpha_4 = \alpha_2.$$

Действительно, всякий раз, когда хитроумная Алиса узнает, что шарик Боба не находится в данной вершине квадрата, она понимает, что тот располагался в его противоположной вершине. Верно и обратное. Например, если на вопрос α_1 получен положительный ответ, Алиса твердо знает, что шарик партнера *не мог* находиться в третьей вершине. Помимо стандартных логических тождеств

$$(\neg\alpha_j) \wedge \alpha_j = 0, \quad (\neg\alpha_j) \vee \alpha_j = 1$$

предположения Алисы удовлетворяют дополнительной системе соотношений, не имеющих места в классической булевской логике. Ответная реакция Боба приводит к тому, что на один из двух любых вопросов Алиса всегда получит положительный ответ:

$$\alpha_j \vee \alpha_k = 1, \quad \alpha_j \wedge \alpha_k = 0.$$

Вместе с тем, хотя любая пара различных суждений составляет альтернативу, не все из них являются "взаимно противоположными" – *ортодополнительными*.

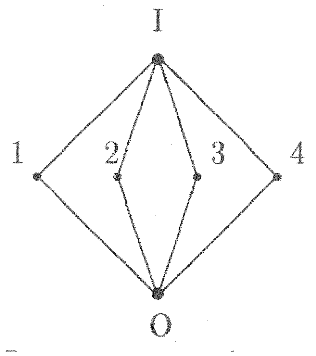

Рис. 3. Решетка вопросов Алисы и ответов Боба

Таковыми являются лишь пары суждений, имеющих одинаковую "четность": $\{\alpha_1; \alpha_3\}$ и $\{\alpha_2; \alpha_4\}$. Важным моментом, отличающим логику хитрой Алисы от классической, является нарушение дистрибутивности – для любой тройки попарно различных j, k, l:

$$(\alpha_j \vee \alpha_k) \wedge \alpha_l \neq (\alpha_j \wedge \alpha_l) \vee (\alpha_k \wedge \alpha_l).$$

Действительно, левая часть этого неравенства равна α_l, в то время как правая есть нуль. Несмотря на указанные отличия, выполняется закон двойного отрицания и законы двойственности Де Моргана:

$$\neg(\alpha_j \wedge \alpha_k) = (\neg\alpha_j) \vee (\neg\alpha_k), \quad \neg(\alpha_j \vee \alpha_k) = (\neg\alpha_j) \wedge (\neg\alpha_k).$$

Совершенно аналогично устроена и логика Боба. Положение шарика, описывается системой предикатов β_k, принимающих значение 1 для тех вершин, в которых он оказывается под воздействием вопросов Алисы. На рисунке 3 изображена диаграмма Хассе, отвечающая недистрибутивной логике наших игроков. В терминах введенных величин α_j, β_k выражение платежной функции хитрой Алисы можно записать следующим образом:

$$a\alpha_1\beta_3 + b\alpha_2\beta_4 + c\alpha_3\beta_1 + d\alpha_4\beta_2.$$

Действительно, если Алиса считает, что шарик в первой вершине, благодаря попарной дизъюнктности величин α_j, все слагаемые, кроме первого равны нулю. По аналогичной причине, остающееся первое слагаемое равно a лишь тогда, когда шарик Боба находится в третей вершине. То же самое относится и к остальным слагаемым. Несмотря на то, что смысл символов, входящих в выражение платежной функции хитрой Алисы совершенно иной, обнаруживается сходство с написанной ранее платежной функцией глупой Алисы (3). Это сходство не только формальное – вспомним, что с точки зрения платежей, в каждом отдельном туре игры идентичны. Однако, если переходить к рассмотрению многоразовых вариантов игры это уже не так. Для хитроумной Алисы возникает проблема вычисления среднего выигрыша. Поскольку ортодополнительные вопросы и ответы связаны соотношениями

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 + \beta_3 = 1, \quad \beta_2 + \beta_4 = 1,$$

соответствующие средние значения $p_j = E\alpha_j$, $q_k = E\beta_k$ можно трактовать как вероятности, однако соотношения

$$p_1 + p_3 = 1, \quad p_2 + p_4 = 1, \quad q_1 + q_3 = 1, \quad q_2 + q_4 = 1,$$

противоречат основному свойству вероятностей альтернативных исходов

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2, \qquad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2,$$

что делает невозможной стандартную интерпретацию смешанной стратегии. Выход из сложившегося положения подсказывается идеями квантовой механики.

5. К усреднению через квантование

Обратим внимание, что орторешетка, отвечающая логике "Хитроумной Алисы" изоморфна орторешетке инвариантных подпространств квантовой системы со спином $\frac{1}{2}$ и наблюдаемыми типа S_x и S_θ. На приведенном ниже рисунке 4 изображены две пары взаимно ортогональных одномерных подпространств $\{l^1; l^3\}$ и $\{l^2; l^4\}$ двумерного гильбертова пространства. Одна из них диагонализирует оператор S_x, другая – S_θ. Если в качестве логических связок взять пересечение и линейную оболочку, а под отрицанием понимать ортогональное дополнение, получается орторешетка, изоморфная логике хитрой Алисы. Изоморфизм устанавливается с помощью соответствия $\alpha_j \mapsto l^j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

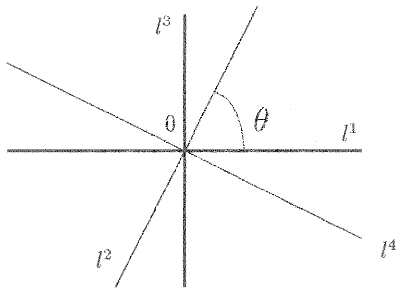

Рис. 4. Решетка инвариантных подпространств наблюдаемых S_x и S_θ

Поскольку в отдельном туре игры ни Алиса, ни Боб четких стратегий не имеют, возникает вопрос об оптимальных "линиях поведения" – оптимальных частотах применения чистых стратегий в повторяющейся игре. Как уже выяснено, в контексте недистрибутивной логики этот вопрос неразрешим, поскольку на множестве чистых стратегий невозможно задать вероятностную меру, совместимую с решеточными операциями. Выход из этой ситуации можно найти прибегая к квантованию, хотя к квантовой физике рассматриваемое конфликтное взаимодействие непосредственного отношения не имеет.

Следуя традициям квантовой механики, будем характеризовать линии поведения игроков не смешанными стратегиями, а "волновыми функциями" – одномерными подпространствами гильбертова пространства. С этой целью рассмотрим пару двумерных гильбертовых пространств H_A и H_B – пространств стратегического выбора Алисы и Боба. Выход в гильбертово пространство открывает путь к операторным представлениям недистрибутивной логики наших игроков, когда вопросам Алисы α_j и соответствующим положениям шарика Боба β_k сопоставляются самосопряженные проекторы $\widehat{\alpha}_j$, $\widehat{\beta}_k$.

Нетрудно понять, что проекторозначное представление орторешетки может быть реализовано бесчисленным множеством способов. Опишем эти реализации на примере вопросов Алисы. Поставим в соответствие вопросу α_1 произвольное одномерное подпространство в H_A, отвечающий ему ортпроектор обозначим $\widehat{\alpha}_1$, а вопрос α_3 представим ортогонально дополнительным проектором $\widehat{\alpha}_3 = I - \widehat{\alpha}_1$. Ясно, что $\widehat{\alpha}_1 \cdot \widehat{\alpha}_3 = \widehat{\alpha}_3 \cdot \widehat{\alpha}_1 = O$, $\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_3 = I$. Выбирая, далее, произвольное одномерное подпространство, *отличное от собственных* подпространств проектора $\widehat{\alpha}_1$, сопоставим вопросу α_2 соответствующий ортпроектор $\widehat{\alpha}_2$. Вопросу α_4 припишем проектор $\widehat{\alpha}_4 = I - \widehat{\alpha}_2$, в результате $\widehat{\alpha}_2 \cdot \widehat{\alpha}_4 = \widehat{\alpha}_4 \cdot \widehat{\alpha}_2 = O$, $\widehat{\alpha}_2 + \widehat{\alpha}_4 = I$.

Выбор перечисленных проекционных операторов однозначен с точностью до унитарной эквивалентности. Проекторы из разных прямых разложений не коммутируют и второе получается из первого поворотом на угол, не кратный 90^0, т.е. для некоторого унитарного оператора u, задающего класс унитарно эквивалентных реализаций орторешетки, имеем:

$$\widehat{\alpha}_2 = u^{-1}\widehat{\alpha}_1 u \quad \text{и} \quad \widehat{\alpha}_4 = u^{-1}\widehat{\alpha}_3 u. \tag{7}$$

Аналогичные построения для решетки Боба приводят к проекторам $\widehat{\beta_k}$ и классифицирующему унитарному оператору v, сплетающему "четные" и "нечетные" наблюдаемые:

$$\widehat{\beta}_2 = v^{-1}\widehat{\beta}_1 v \quad \text{и} \quad \widehat{\beta}_4 = v^{-1}\widehat{\beta}_3 v. \tag{8}$$

Квантовым аналогом классического пространства игровых ситуаций является $\mathrm{H}_A \otimes \mathrm{H}_B$, снабженное естественной гильбертовой стуктурой.

Для введения наблюдаемой, отвечающей выигрышу Алисы, "проквантуем" классическое выражение (3) ее функции выигрыша

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk}\alpha_j\beta_k,$$

подставляя в него соответствующие проекторы. В результате получим самосопряженный оператор

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk}\widehat{\alpha}_j \otimes \widehat{\beta}_k$$

– наблюдаемую выигрыша Алисы. Если Алиса и Боб выбрали свои линии поведения – нормированные векторы $\varphi \in \mathrm{H}_A$ и $\psi \in \mathrm{H}_B$, то в игре складывается ситуация $s = \varphi \otimes \psi$, описываемая нормированным вектором из $\mathrm{H}_A \otimes \mathrm{H}_B$. Вычислим средний выигрыш Алисы в этой ситуации по стандартным правилам квантовой механики:

$$\langle \widehat{\mathcal{H}}s,\, s\rangle = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk}\langle(\widehat{\alpha}_j \otimes \widehat{\beta}_k)\, \varphi\otimes\psi,\ \varphi\otimes\psi\rangle.$$

После несложных преобразований это приводит к следующему выражению:

$$E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi, \psi) = \sum_{j,k=1}^{4} h_{jk}\langle\widehat{\alpha}_j\varphi,\, \varphi\rangle \cdot \langle\widehat{\beta}_k\psi,\, \psi\rangle.$$

Подставляя в полученную формулу элементы конкретной платежной матрицы и обозначая $p_j = \langle\widehat{\alpha}_j\varphi,\, \varphi\rangle$, $q_k = \langle\widehat{\beta}_k\psi,\, \psi\rangle$, получаем окончательно:

$$E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi, \psi) = ap_1q_3 + cp_3q_1 + bp_2q_4 + dp_4q_2. \tag{9}$$

6. Амплитуды вероятностей вместо вероятностей

При всем внешнем сходстве классическая (4) и квантовая (9) функции выигрыша существенно различны. Отличие – в статусе переменных состояния. Если x_j и y_k представляют собой компоненты смешанных стратегий, то числа p_j и q_k на эту роль претендовать не могут, ибо $p_1+p_3 = \langle(\widehat{\alpha}_1+\widehat{\alpha}_3)\,\varphi,\varphi\rangle = 1$ вместе с аналогичным тождеством $p_2+p_4=1$ приводят к $p_1+p_2+p_3+p_4=2$. Для выяснения вероятностного смысла величин p_j и q_k предположим, что стратегия Алисы описывается нормированным вектором $\varphi \in \mathrm{H}_A$, а ξ_1^+, $\xi_1^- \in \mathrm{H}_A$ – нормированные собственные векторы оператора $\widehat{\alpha}_1$, отвечающие собственным значениям 1 ("да") и 0 ("нет"). Раскладывая стратегию Алисы по этому базису $\varphi = c_+\xi_1^+ + c_-\xi_1^-$, находим, что она обнаруживает шарик Боба в первой вершине квадрата с вероятностью

$$p_1 = \langle\widehat{\alpha}_1(c_+\xi_1^+ + c_-\xi_1^-),\ c_+\xi_1^+ + c_-\xi_1^-\rangle = \langle c_+a_1^+,\ c_+\xi_1^+ + c_-\xi_1^-\rangle = |c_+|^2,$$

а в противоположной – с вероятностью $p_3 = |c_-|^2$. Таким образом, как и в квантовой механике, числа p_j и q_k есть квадраты модулей *амплитуд* вероятностей.

Интересно сопоставить выражение (9) для квантованного среднего

$$E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi,\psi) = (ap_1q_3 + cp_3q_1) + (bp_2q_4 + dp_4q_2)$$

с формулой (5), по которой, на основе условных вероятностей и условных математических ожиданий, вычислялось классическое среднее:

$$E\mathcal{H} = (ap_{13}^1q_{13}^3 + cp_{13}^3q_{13}^1)\cdot P_{13} + (bp_{24}^2q_{24}^4 + dp_{24}^4q_{24}^2)\cdot P_{24}.$$

В случае, когда соответствующие квадраты модулей амплитуд совпадают с классическими условными вероятностями

$$p_1 = p_{13}^1,\quad p_3 = p_{13}^3,\quad p_2 = p_{24}^2,\quad p_4 = p_{24}^4$$
$$q_1 = q_{13}^1,\quad q_3 = q_{13}^3,\quad q_2 = q_{24}^2,\quad q_4 = q_{24}^4$$

мы приходим к интересному выводу: "хитроумная" Алиса обеспечивает себе выигрыш больший, чем тот, который способна получить ее "глупая" тезка:

$$E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi,\psi) \geqslant E\mathcal{H}.$$

Для ожидания таких совпадений, впрочем, нет никаких оснований. Действительно, в отличие от классической игры, где равновесие ищется на множестве неотрицательных чисел, подчиненных линейным соотношениям $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, $y_1+y_2+y_3+y_4=1$, в квантовой игре помимо явных линейных соотношений $p_1+p_3=1$, $p_2+p_4=1$, $q_1+q_3=1$, $q_2+q_4=1$ между квадратами модулей амплитуд вероятностей имеются еще и скрытые, нелинейные соотношения между самими амплитудами, индуцированные формулами сплетения (7), (8). Поэтому квантовую точку равновесия невозможно найти, отправляясь лишь от выражения (9) среднего выигрыша как функции восьми переменных $\{p_j, q_k\}$, подчиненных линейным соотношениям. Оно определяется не только комбинацией квадратов модулей амплитуд вероятностей, но сочетанием самих *амплитуд* $\varphi \in \mathrm{H}_A$ и $\psi \in \mathrm{H}_B$ Алисы и Боба.

Обратим внимание на одно любопытное отличие квантового варианта игры от классического. Средний выигрыш хитрой Алисы оказывается равным *сумме* условных средних, а не их *смеси*, как это имеет место в классическом случае.

7. Поведение игрока как реализация логики

Помимо амплитуд, характеризующих линии поведения игроков в модель входят еще две структурные характеристики – унитарные повороты u и v, фиксирующие операторное представление орторешеток Алисы и Боба с точностью до унитарной эквивалентности. Каждый из них может быть охарактеризован углом между соответствующими собственными подпространствами. Обозначим θ_A угол между образами операторов $\widehat{\alpha}_1$ и $\widehat{\alpha}_2$, и θ_B – аналогичный угол, характеризующий операторную реализацию логики Боба. В отличие амплитуд, являющихся *переменными* модели, названные углы являются ее *параметрами*. Они фиксируют тип игроков, их отношение к выбору той или иной диагонали квадрата. Таким образом, в квантовой модели фигурируют не только, представленные в виде платежной матрицы, интересы игроков, но и некоторые их персональные характеристики, от которых, в конечном счете, зависит уровень реализации интересов.

На основе углов θ_A, θ_B определяются коммутационные соотношения между соответствующими проекционными операторами. Остановимся на этом подробнее и рассмотрим, например, операторы $\widehat{\alpha}_1$ и $\widehat{\alpha}_2$. Фиксируя в пространстве состояний Алисы H_A нормированный собственный базис $\widehat{\alpha}_1$, напишем матрицы этой пары операторов:

$$\widehat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_A & \sin\theta_A\cos\theta_A \\ \sin\theta_A\cos\theta_A & \sin^2\theta_A \end{pmatrix},$$

где θ_A – угол, на который собственный базис оператора $\widehat{\alpha}_2$ повернут относительно собственного базиса вопросного оператора $\widehat{\alpha}_1$. Вычисление коммутатора этих матриц приводит к соотношению, параметром которого как раз и является угол θ_A:

$$i[\widehat{\alpha}_1,\, \widehat{\alpha}_2] = \frac{1}{2}\sin 2\theta_A \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные соотношения выполняются и для проекционных операторов Боба.

8. В поисках квантового равновесия

Определение равновесия в смысле фон Неймана–Нэша в квантовом случае не претерпевает по отношению к классическому случаю (1) никаких изменений:

$$E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi, \psi^0) \leqslant E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi^0, \psi^0) \leqslant E\widehat{\mathcal{H}}(\varphi^0, \psi).$$

Зафиксируем в пространстве стратегий Алисы H_A нормированные собственные базисы $\{\xi_1^+, \xi_1^-\}$ и $\{\xi_2^+, \xi_2^-\}$, отвечающие проекторам $\widehat{\alpha}_1$, $\widehat{\alpha}_2$ и аналогичные базисы $\{\eta_1^+, \eta_1^-\}$ и $\{\eta_2^+, \eta_2^-\}$ в пространстве Боба H_B. Углы между старшими собственными векторами обозначим θ_A и, соответственно, θ_B. Тогда квадраты модулей амплитуд p_j, q_k можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos^2\alpha, \quad p_3 = \sin^2\alpha, \quad p_2 = \cos^2(\alpha-\theta_A), \quad p_4 = \sin^2(\alpha-\theta_A), \\ q_1 &= \cos^2\beta, \quad q_3 = \sin^2\beta, \quad q_2 = \cos^2(\beta-\theta_B), \quad q_4 = \sin^2(\beta-\theta_B), \end{aligned}$$

где α и β – углы, составляемые векторами φ, ψ с соответствующими осями. В качестве диапазона значений этих углов достаточно взять промежуток $[0^0; 180^0]$. Квантовая функция выигрыша в этом представлении имеет вид

$$\begin{gathered} F(\alpha,\beta) = a\cos^2\alpha\sin^2\beta + c\sin^2\alpha\cos^2\beta + \\ + b\cos^2(\alpha-\theta_A)\sin^2(\beta-\theta_B) + d\sin^2(\alpha-\theta_A)\cos^2(\beta-\theta_B) \end{gathered}$$

и проблема поиска точек равновесия квантовой игры сводится к решению задачи на минимакс функции двух угловых переменных на квадрате $[0^0; 180^0] \times [0^0; 180^0]$.

Решение таких задач является трудной, плохо изученной проблемой. Известно [19], что для существования седловых точек одних только требований непрерывности или гладкости функции выигрыша недостаточно. Имеющиеся в настоящее время теоремы существования апеллируют к свойствам выпуклости или вогнутости этой функции. Однако в нашем случае эти условия нарушены. Конкретные примеры показывают, что при некоторых значениях элементов a, b, c, d платежной матрицы (табл. 1) функция $F(\alpha, \beta)$ седловых точек не имеет. Не лучше обстоит дело и с методами поиска седловых точек. Поскольку задача не допускает простого аналитического решения, исследование приходиться проводить с помощью численных методов. В основу расчетов положен алгоритм, основанный на построении так называемых "кривых реакции" или "кривых наилучших ответов" участников игры.

Определение кривых реакции основано на следующем рассуждении. Если бы Алиса знала, какое решение примет Боб, она могла бы сделать *оптимальный* выбор. Но суть игровой ситуации в том и состоит, что она этого не знает. Она должна предусмотреть его различные стратегии и на каждый возможный ход партнера найти оптимальный ответный ход. Ее рассуждения напоминают размышления игрока, выражаемые формулой: "если они – так, то мы – эдак". Точно так же рассуждает и Боб. Таким образом, в рассмотрение вводятся две функции: $x = \mathcal{R}_A(y)$ и $y = \mathcal{R}_B(x)$, графики которых называются кривыми реакции Алисы и, соответственно, Боба. Согласно определению, эти функции удовлетворяют соотношениям:

$$\max_{\lambda} F(\lambda, y) = F(\mathcal{R}_A(y), y), \quad \min_{\mu} F(x, \mu) = F(x, \mathcal{R}_B(x)).$$

Нетрудно догадаться, что пересечения кривых реакции дают точки квантового равновесия в смысле фон Неймана–Нэша. Численные эксперименты показывают, что в зависимости от значений параметров a, b, c, d платежной матрицы и углов, характеризующих тип игрока наблюдаются качественно различные картины. Пересечения могут отсутствовать, возможно единственное пересечение и, наконец, возможен случай двух точек равновесия с разными значениями цены игры, чего не бывает в случае классической матричной игры.

9. Примеры

1. Две точки равновесия возникают в случае платежной матрицы с $a = 3$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 1$. Кривые реакции в этом случае оказываются *разрывными*. Для удобства, разрывы показаны тонкими линиями. Импульсивный характер реакции Алисы не дал возможности состояться еще одому равновесию.

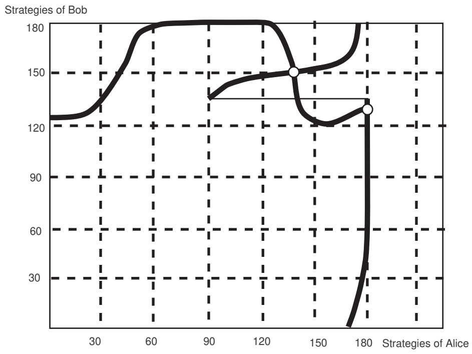

Рис. 5. Две точки равновесия Нэша

Одно из равновесий имеет место при $\alpha = 145,5^0$, $\beta = 149,5^0$ и дает следующие значения квадратов модулей амплитуд

$$\begin{array}{ll} \text{для Алисы:} & p_1 = 0.679;\ p_2 = 0.509;\ p_3 = 0.321;\ p_4 = 0.491; \\ \text{для Боба:} & q_1 = 0.258;\ q_2 = 0.967;\ q_3 = 0.742;\ q_4 = 0.033. \end{array}$$

Цена квантовой игры, т.е. равновесное значение выигрыша Алисы в этом случае равна $E\widehat{\mathcal{H}} = 2.452$. Вторая точка равновесия отвечает углам $\alpha = 180^0$, $\beta = 123,5^0$ и квадратам модулей амплитуд

$$\begin{array}{ll} \text{для Алисы:} & p_1 = 1.000;\ p_2 = 0.967;\ p_3 = 0.000;\ p_4 = 0.033 \\ \text{для Боба:} & q_1 = 0.695;\ q_2 = 0.646;\ q_3 = 0.305;\ q_4 = 0.354. \end{array}$$

Значение цены игры во второй точке равновесия равно $E\widehat{\mathcal{H}} = 1.926$. Для *классической* игры с той же самой платежной матрицей (см. раздел 3) цена игры оказывается несколько меньшей и составляет $\frac{28}{15} \approx 1.867$. В отличие от квантовой, классическая игра имеет *единственную* точку равновесия, которая достигается при следующих вероятностях

$$\begin{array}{ll} \text{для глупой Алисы:} & x_1 = \dfrac{5}{28};\ x_2 = \dfrac{5}{28};\ x_3 = \dfrac{15}{28};\ x_4 = \dfrac{3}{28}; \\ \text{для ее партнера:} & y_1 = \dfrac{3}{28};\ y_2 = \dfrac{15}{28};\ y_3 = \dfrac{5}{28};\ y_4 = \dfrac{5}{28}. \end{array}$$

Для сравнения квантовой игры с классической найдены условные вероятности выбора вершин квадрата после выбора диагонали:

$$\begin{array}{lll} \text{для Алисы:} & p_{13}^1 = \dfrac{1}{4};\ p_{13}^3 = \dfrac{3}{4}; & p_{24}^2 = \dfrac{5}{8};\ p_{24}^4 = \dfrac{3}{8}; \\ \text{для Боба:} & q_{13}^1 = \dfrac{3}{8};\ q_{13}^3 = \dfrac{5}{8}; & q_{24}^2 = \dfrac{5}{6};\ q_{24}^4 = \dfrac{1}{6}. \end{array}$$

и условные средние выигрыши для каждой из диагоналей:

$$E_{13}\mathcal{H} = 1.875; \quad E_{24}\mathcal{H} = 1.016.$$

Цена классической игры получается умножением этих выражений на вероятности соответствующих условий, приведенные в разделе (3). Ассоциированные с этими условными средними слагаемые квантового выигрыша в случае первой точки равновесия равны

$$ap_1q_3 + cp_3q_1 = 1.927; \quad bp_2q_4 + dp_4q_2 = 0.525.$$

Для второй точки равновесия, соответственно, имеем:

$$ap_1q_3 + cp_3q_1 = 0.915; \quad bp_2q_4 + dp_4q_2 = 1.048.$$

2. Единственность равновесия наблюдается, например, в случае платежной матрицы, в которой все ненулевые выигрыши одинаковы и равны единице и представления, отвечающего углам $\theta_A = 45^0$, $\theta_B = 45^0$. Точка равновесия расположена в верхней правой вершине квадрата. Представленная на левом из рисунков 6 кривая реакции Боба *непрерывна*, а аналогичная кривая Алисы терпит разрыв, когда Боб применяет стратегию, отвечающую значению $\beta = 90^0$. Для наглядности, разрыв соединен тонкой линией. На самом деле разрывны *обе* функции реакции. Это становится понятным, если продолжить эти функции на всю числовую ось с учетом периодичности: график одной из них получатся сдвигом графика другой на полупериод – 90^0.

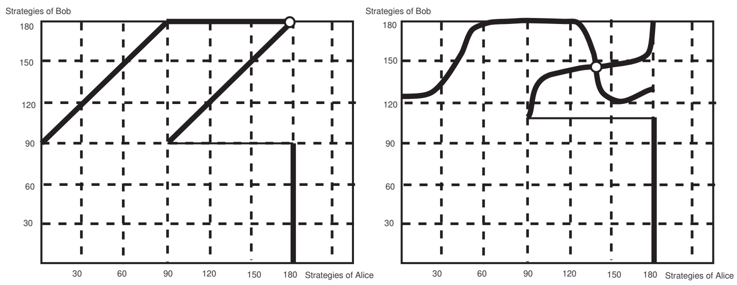

Рис 6. Случаи единственного равновесия

Квадраты модулей амплитуд в этом случае имеют следующие значения:

$$\begin{array}{ll} \text{для Алисы:} & p_1 = 1;\ p_2 = 0.5;\ p_3 = 0;\ p_4 = 0.5; \\ \text{для Боба:} & q_1 = 1;\ q_2 = 0.5;\ q_3 = 0;\ q_4 = 0.5. \end{array}$$

Средний выигрыш "хитроумной" Алисы в этом случае составляет $E\widehat{\mathcal{H}} = 0.5$, в то время как ее классическая тезка выигрывает всего лишь 0.125. В отличие от квантового случая для классических игроков с такой платежной матрицей все вершины квадрата равновероятны. Единственное равновесие, расположенное внутри квадрата имеет место для *первоначальной* платежной матрицы $a = 3$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 1$ и значений угловых переменных $\theta_A = 15^0$, $\theta_B = 35^0$.

3. Отсутствие равновесий – пожалуй самое интересное явление в квантовой модели, поскольку, для классической матричной игры равновесия в смешанных стратегиях существуют, как известно, всегда. К отсутствию равновесий можно прийти, отправляясь от той платежной матрицы, для которой уже были получены как одна, так и две точки равновесия.

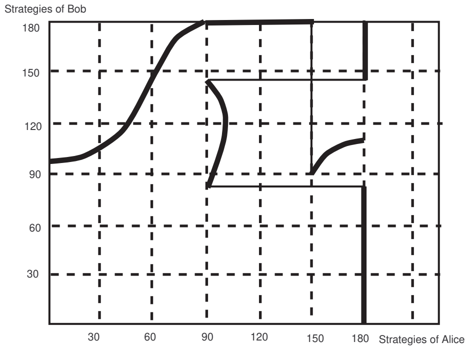

Рис. 7. Отсутствие равновесий

Для этого достаточно взять операторное представление орторешетки, отвечающее типизирующим углам $\theta_A = 30^0$, $\theta_B = 20^0$. Отсутствие равновесий, как это видно из рисунка 7, обусловлено разрывностью функций реакции, не имеющей места в классическом случае. С этим явлением мы уже сталкивались в первом примере, когда имелись две точки равновесия. Этот последний пример показывает, сколь важную роль играет *реализация* недистрибутивной орторешетки.

В переводе на язык теории игр это можно понимать так: при одних и тех же интересах игроки могут формировать свое поведение качественно различным способом. Тем самым, математик может дать клиенту, например Алисе, стратегические рекомендации, каким образом ей следует изменить стиль поведения, чтобы увеличить выигрыш, оставаясь в рамках тех же самых платежных условий. Разумеется, для этого ему необходимо знать выбор представления логики Боба.

Заключительные замечания

История развития квантовой физики есть, в некотором смысле, история развития концепции среднего. Достаточно вспомнить работу М. Планка о спектре излучения абсолютно черного тела, в основе которой лежал новый способ подсчета средней энергии осциллятора. Предложенная схема квантования игры следует именно этой традиции. Допустимо ли, однако, использование идей и методов физики микромира в теории игр, предметом изучения которой являются свойства *макроскопических* объектов? На этот счет имеется положительный опыт статистической механики: держа в ладони алмаз и непосредственно ощущающая его холод, мы можем ничего не знать о формуле Эйнштейна–Дебая, объясняющей его аномальную теплоемкость. Стоит ли удивляться подобным объяснениям иных макроявлений.

В случае недистрибутивной логики классические процедуры вычисления средних приводят к противоречиям и приходится прибегать к другому аппарату. Если, возникающая при этом решетка представима решеткой подпространств, то ответ отчасти дается теоремой Глисона, утверждающей, что вероятностные меры на решетке проекторов устроены совершенно определенным образом. Тем самым, при решении проблемы усреднения функции выигрыша, учитывающей *логические условия*, в которые поставлены участники игры, переход к квантованию в некотором смысле предопределен.

Построение квантовой платежной функции почти полностью воспроизводит переход от классической функции Гамильтона к оператору Шрёдингера. Структура классического выражения платежной функции словно специально создана, для подстановки в нее проекционных операторов. Это приводит к общей схеме квантования игр, позволяющей рассматривать игры нескольких лиц, в которых интересы игроков уже не прямо противоположны – принципы квантования остаются прежними.

Построенная схема квантования предусматривает проведение различия между логикой и ее операторным представлением. Каждое из возможных представлений может быть описано угловым параметром и коммутационными соотношениями между соответствующими проекторами. Пары некоммутирующих проекторов отвечают взаимодополнительным вопросам, ни один из которых не является отрицанием другого. Как показывают примеры, существование равновесий связано с выбором операторного представления решетки.

В квантовой игре, в отличие от классической, возникает проблема существования равновесий, отсутствие которых возможно связано с тем, что поведение игроков представлено векторами гильбертовых пространств, а игровые ситуации – *разложимыми* элементами их тензорного произведения. Как и в классической теории игр, понятие равновесия можно обобщить, переходя к смешанному расширению на основе матриц плотности. В данной работе перепутанные состояния не рассматривались. Как показано в работе [8], они приводят значительно более сложным недистрибутивным решеткам. Поиск равновесий среди перепутанных, а не только факторизованных состояний открывает дополнительные возможности в решении проблемы существования равновесия в случае квантовых игр.

Литература

1. D. Deutsch, *Quantum Theory of Probability and Decisions. Proc. R. Soc. Lond. A.*, (1999) (quant-ph/9906015).
2. I. Polley, *Reducing the Statistical Axiom. Phys. Dep. Oldenburg Univ.* D-26111, July (1999).
3. J. Finkelstein, *Quantum Probability from Decisions Theory?.* SJSU-99-20, June (1999).
4. E. W. Piotrowski, *Quantum English Auctions.* arXiv:quant-ph/0108017v1 3Aug (2001).
5. А. А. Гриб, *Нарушение неравенств Белла и проблема измерения в квантовой теории.* — Лекции для молодых ученых. Дубна: ОИЯИ (1992).
6. A. A. Grib, Jr. W. A. Rodrigues, *Nonlocality in Quantum Physics.* Kluwer Academic Plenum Publishers. N.Y., Boston, Dodrecht, London, Moscow (1999).
7. A. A. Grib, R. R. Zapatrin, — Int. Journ. Theor. Phys. **29** (2) (1990), 113.
8. A. A. Grib, R. R. Zapatrin, — Int. Journ. Theor. Phys. **30** (7) (1991), 949.
9. J. Eisert et all, — Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 3077.
10. A. K. Ekert, — Phys. Rev. Lett. **67** (1999), 661.
11. L. Marinatto, T. Weber, — Phys. Lett. A **272** (2000), 291.
12. H. Moulin, *Théorie des jeux pour l'économie et la politique.* Hermann, Paris (1981).
13. G. Owen, *Game Theory.* W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto (1968).
14. J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton. Princeton Univ. Press (1953).
15. H. von Stackelberg, *Marktform und Gleiwicht.* Wien: Springer (1934). (English vers.: The theory of the market economy. – Oxford: Oxford Univ. Press 1952).
16. J. D. Kemeny, G. L. Thompson, *The effect of psychological attitudes on the outcomes of games.* Contributions to theory of games **3**, Princeton (1957), pp. 273–298.
17. Birkhoff, *Lattice Theory.* AMS Colloc. Publ., **25**, AMS, Providence, Rhode, Island (1993).
18. G. Grätzer, *Lattice Theory.* San Francisco: Freeman & Co. (1971).
19. N. N. Vorob'ev, *Foundations of Game Theory. Noncooperative games.* Birkhäuser Verlag. Basel, Boston, Berlin (1994).

Grib A. A., Parfenov G. N. Can the game be quantum?

The game in which acts of participants do not have an adequate description in terms of Boolean logic and classical theory of probabilities is considered. The model of the game interaction is constructed on the basis of a non-distributive orthocomplemented lattice. Mixed strategies of the participants are calculated by the use of probability amplitudes according to the rules of quantum mechanics. A scheme of quantization of the payoff function is proposed and an algorithm for the search of Nash equilibrium is given. It is shown that differently from the classical case in the quantum situation a discrete set of equilibrium is possible.

Фридмановская Лабoратрия
Теоретической Физики
Кафедра высшей математики
grib@friedman.usr.lgu.spb.su
СПбГУЭФ, С. Петербург, Россия
your@GP5574.spb.edu

Поступило 25 ноября 2002 г.