Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

С. П. Хэкало

ИЗОГЮЙГЕНСОВЫ ДЕФОРМАЦИИ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

1. Введение. Проблема Адамара состоит в описании дифференциальных операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, то есть таких операторов, которые обладают фундаментальным решением с носителем коразмерности единица. Одним из методов отыскания таких операторов являются изогюйгенсовы деформации известных гюйгенсовых операторов. При этом деформации не должны получаться из исходного оператора элементарными преобразованиями. К элементарным – относят невырожденную замену переменных и умножение оператора на ненулевую функцию. Впервые метод деформаций фактически применил К. Штельмахер в работе [1].

Следуя Штельмахеру, Ю. Берест, А. Веселов и Ю. Молчанов [2, 3] рассмотрели операторы волнового типа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_q^2} + U_m(x)\right)^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \ldots$$

с потенциалами $U_m(x)$ Калоджеро–Мозера (определение потенциалов см. ниже в п. 4). В явном виде были найдены фундаментальные решения этих деформаций и как следствие установлены достаточные условия их гюйгенсовости: если нечетное q удовлетворяет неравенству

$$q \geqslant 1 + 2\lambda + 2M,$$

где $M = M(m)$ – явно определяемая функция аргумента m, то деформированные операторы – гюйгенсовы.

Настоящая работа посвящена применению различных методов (анзатц Адамара [4]; метод ядер Рисса [5, 2]; метод сплетающих операторов [2, 3]) для осуществления изогюйгенсовых деформаций ультрагиперболического оператора

$$\Box_{p+q} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_q^2}$$

и его степеней специальными потенциалами. В ней, во-первых, изучаются деформации

$$(\Box_{p+q} - U_k(t) + U_m(x))^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

при помощи потенциалов $U_k(t)$, $U_m(x)$ типа Калоджеро–Мозера по временным и пространственным переменным соответственно. Во-вторых, рассматриваются деформации

$$\left(\Box_{p+q}^2 + W_s\left(\frac{t \pm x_i}{2}, \beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2\right)^\lambda, \ i = 1, \dots, q, \ s, \lambda = 1, 2, \dots$$

оператора $\Box_{p+q}^2$ при помощи потенциалов $W_s(y,\beta)$ Лагнезе–Штельмахера [2] с переменным $y \in \mathbf{R}$ и параметром $\beta \in \mathbf{R}^s$ (определение потенциалов см. ниже в п. 4). В частности, приводятся новые примеры гюйгенсовых операторов волнового типа, являющиеся деформациями четных степеней волнового оператора при помощи потенциалов Лагнезе–Штельмахера.

2. Ядро Рисса оператора $\Box_{p+q}$. В этом пункте приводятся необходимые сведения из [6] о ядре Рисса в нужной нам форме и даются некоторые добавления.

Пусть

$$\gamma(t-\zeta, x-\xi) \equiv (t_1-\zeta_1)^2 + \dots + (t_p-\zeta_p)^2 - (x_1-\xi_1)^2 - \dots - (x_q-\xi_q)^2 = 0$$

характеристический конус оператора $\Box_{p+q}$ с вершиной в точке $(\zeta, \xi) \in \mathbf{R}^{p+q}$. Для комплексного параметра λ введем семейство целых по λ обобщенных функций

$$\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) = \frac{1}{H_{p+q}(\lambda)}\, \gamma_+^{\lambda-(p+q)/2},$$

связанных с квадратичной формой γ [6]. Здесь

$$H_{p+q}(\lambda) = (-1)^{[p/2]} 4^\lambda \pi^{(p+q-2)/2} \Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda + 1 - (p+q)/2),$$

Γ – гамма-функция Эйлера, $[\cdot]$ – целая часть вещественного числа.

В области $\operatorname{Re}\lambda > (p+q)/2 - 1$ обобщенная функция $\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma)$ задается интегралом

$$(\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma), f) = \frac{1}{H_{p+q}(\lambda)} \int\limits_{\gamma>0} \gamma^{\lambda-(p+q)/2}(t-\zeta, x-\xi) f(t,x)\, dt\, dx$$

и аналитически продолжается во всю комплексную плоскость параметра λ.

Ясно, что в общем случае носитель обобщенной функции лежит в замыкании конуса $V = \{(t;x) \mid \gamma(t-\zeta, x-\xi) > 0\}$ с вершиной в точке $(\zeta,\xi) \in \mathbf{R}^{p+q}$:

$$\operatorname{supp} \Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) \subset \overline{V}. \tag{1}$$

Непосредственным дифференцированием в области регулярного задания и последующим аналитическим продолжением устанавливается равенство

$$\Box_{p+q}^{d} \Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) = \Phi_0^{(\lambda-d)}(\gamma), \quad d = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Пусть δ – дельта-функция $p+q$ переменных.

Лемма 2.1. *При нечетном p имеет место равенство*

$$\Phi_0^{(0)}(\gamma) = \delta(t-\zeta, x-\xi). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть S^{p-1} и S^{q-1} сферы единичного радиуса в подпространствах $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q \subset \mathbf{R}^{p+q}$ соответственно. Переход в области регулярного задания обобщенной функции $\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma)$ к биполярным координатам $t = r\omega$; $x = s\tau$ $(\omega \in S^{p-1}, \tau \in S^{q-1})$ дает интеграл [6]

$$(\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma), f) =$$

$$= \frac{1}{4H_{p+q}(\lambda)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 u^{\lambda-1}(1-v)^{\lambda-(p+q)/2} v^{q/2-1} \psi_1(u, uv; \zeta, \xi) du\, dv,$$

где функция ψ_1 получена из среднего

$$\psi(r,s;\zeta,\xi) = \int\limits_{S^{p-1}} \int\limits_{S^{q-1}} f(r\omega+\zeta, s\tau+\xi) d\omega\, d\tau$$

возможной заменой $u = r^2$, $w = s^2$ и последующей подстановкой $w = uv$. Для нечетных p аналитическое продолжение дает $(c = (-1)^{[p/2]}/\pi^{(p+q-2)/2})$

$$(\Phi_0^{(0)}(\gamma), f) =$$

$$= c\int\limits_0^1 \frac{(1-v)^{\lambda-(p+q)/2}}{\Gamma(\lambda+1-(p+q)/2)}\, v^{q/2-1}dv \int\limits_0^\infty \frac{u^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\psi_1(u,uv;\zeta,\xi)du\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= c\frac{\Gamma(q/2)}{\Gamma(1-p/2)}\, f(\zeta,\xi) \int\limits_{S^{p-1}} d\omega \int\limits_{S^{q-1}} d\tau =$$

$$= (-1)^{[p/2]}\pi\frac{f(\zeta,\xi)}{\Gamma(p/2)\Gamma(1-p/2)} = (\delta(t-\zeta,x-\xi),f(t,x)).$$

Пусть далее $\delta^{(s)}(\gamma)$ – s-ая производная (по аргументу γ) дельта-функции, связанной с поверхностью $\gamma=0$ [6].

Лемма 2.2. *Для натурального $\lambda\in\mathbf{N}$, $\lambda<(p+q)/2$ и четного $p+q$ имеет место равенство*

$$\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) = \frac{(-1)^{p+[q/2]-\lambda-1}}{2^{2\lambda}\pi^{(p+q-2)/2}(\lambda-1)!}\,\delta^{((p+q)/2-\lambda-1)}(\gamma). \tag{4}$$

Доказательство. Положим $c_1 = (-1)^{[p/2]}/2^{2\lambda+2}\pi^{(p+q-2)/2}(\lambda-1)!$. Как и в доказательстве леммы 2.1 при $\lambda\in\mathbf{N}$, $\lambda<(p+q)/2$

$$(\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma),f) =$$

$$= c_1\int\limits_0^\infty u^{\lambda-1}du\int\limits_0^1 \frac{(1-v)^{(\mu-(p+q)/2)}}{\Gamma(\mu+1-(p+q)/2)}\Big|_{\lambda=\mu} v^{q/2-1}\psi_1(u,uv;\zeta,\xi)dv.$$

Учитывая равенство

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-k} = \delta^{(k-1)}(x),$$

для обобщенной функции одного переменного, получаем

$$(\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma),f) = (-1)^{(p+q)/2-\lambda-1}c_1\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \frac{\partial^{(p+q)/2-\lambda-1}}{\partial v^{(p+q)/2-\lambda-1}}\left[v^{q/2-1}\psi_1(u,uv;\zeta,\xi)\right]\big|_{v=1}u^{\lambda-1}du =$$

$$= (-1)^{(p+q)/2-\lambda-1}c_1\times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\partial^{(p+q)/2-\lambda-1}}{\partial w^{(p+q)/2-\lambda-1}} \left[w^{q/2-1}\psi_1(u,w;\zeta,\xi)\right]\big|_{w=u} u^{p/2-1} du =$$

$$= 4(-1)^{(p+q)/2-\lambda-1} c_1(\delta^{((p+q)/2-\lambda-1)}(\gamma), f).$$

Замечание 2.1. Формулы (1)–(3) показывают, что для нечетных p семейство обобщенных функций $\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma)$ является ядром Рисса для оператора $\Box_{p+q}$ в смысле работы [7].

Замечание 2.2. Из формул (2)–(4) следует, что при нечетных p, q и $d < (p+q)/2$ операторы $\Box_{p+q}^d$ являются гюйгенсовыми.

Замечание 2.3. Как устанавливается методом спуска в [8] или анализом фундаментальных решений оператора $\Box_{p+q}$ данных в [6], для размерностей p и q других четностей, принцип Гюйгенса для $\Box_{p+q}$ не имеет места. Таким образом, искать гюйгенсовы деформации ультрагиперболического типа при таких p и q не имеет смысла.

3. Анзатц Адамара для оператора $\Box_{p+q} + U(t,x)$. Подробная информация об анзатце Адамара и его применениях содержится в [4].

Следуя Адамару будем искать фундаментальное решение деформации $\mathcal{L} = \Box_{p+q} + U(t,x)$ при нечетных p в виде формального ряда

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t,\zeta;x,\xi)\Phi_0^{(i)}(\gamma), \quad \varphi_1 = 1, \tag{5}$$

где φ_i – дифференцируемые функции, а $\Phi_0^{(i)}(\gamma)$ – элементы ядра Рисса оператора $\Box_{p+q}$.

Потребуем выполнения равенства

$$\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta(t-\zeta; x-\xi), \tag{6}$$

разрешив при этом, переставлять знаки $\mathcal{L}$ и Σ. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) = \frac{t_i - \zeta_i}{2(\lambda-1)} \Phi_0^{(\lambda-1)}(\gamma), \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) = -\frac{x_i - \xi_i}{2(\lambda-1)} \Phi_0^{(\lambda-1)}(\gamma), \quad j = 1, \dots, q,$$

$$\frac{\gamma}{4\lambda}\,\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma) = \left(\lambda + 1 - \frac{p+q}{2}\right)\Phi_0^{(\lambda+1)}(\gamma),$$

на основании леммы 2.1, получим

$$\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta(t-\zeta; x-\xi) + \sum_{i=1}^{\infty}\left((\mathcal{L}\varphi_i) + \frac{1}{i}(\nabla_{p+q}\varphi_{i+1}) + \varphi_{i+1}\right)\Phi_0^{(i)}(\gamma),$$

где

$$\nabla_{p+q} = \sum_{i=1}^{p}(t_i-\zeta_i)\frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{q}(x_j-\xi_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Тогда по требованию (6), имеем

$$\begin{cases} (\nabla_{p+q}\varphi_i) + (i-1)\varphi_i = -(i-1)(\mathcal{L}\varphi_{i-1}), \quad i = 2,3,\dots, \\ \varphi_1 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Рассматривая оператор $\mathcal{L} = \Box_{p+q} + U(t,x)$ на соответствующем римановом пространстве с метрикой $s^2 = \gamma$, можно показать, что

$$\varphi_i = -\frac{i-1}{s^{i-1}}\int_{s_0}^{s}(\mathcal{L}\varphi_{i-1})s^{i-2}ds, \quad i = 2,3,\dots.$$

Возникает задача правильного подбора потенциала $U(t,x)$, дающего обрыв ряда-решения (5).

Пример 1 ([1]). В подпространстве $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^q$ рассмотрим систему корней $\mathcal{A}_1 = \{\alpha = (\pm 1, 0, \dots, 0)\}$. Для кратностей $m_\alpha = 1$ потенциал Калоджеро–Мозера приобретает наиболее простой вид

$$U_1(x) = \frac{2}{x_1^2}$$

и по существу является потенциалом Штельмахера. Фундаментальное решение оператора

$$\mathcal{L} = \Box_{1+5} + \frac{2}{x_1^2}$$

имеет вид

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{1}{\xi_1 x_1}\delta(\gamma) + 2\delta'(\gamma)\right).$$

Замечание. Из пункта 5 (теорема 1) в случае выбора системы корней типа $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_1$ можно извлечь фундаментальные решения в явном виде для гюйгенсовых операторов

$$\left(\Box_{1+q} + \frac{\lambda_0}{t^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{x_i^2}\right)^{\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots,$$

с общим потенциалом Штельмахера, где коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\lambda_k = -m_k(m_k+1), \quad m_k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{q} m_k \leqslant \frac{q-1}{2} - \lambda.$$

При $\lambda = 1$ эти операторы рассматривались Лагнезе и Штельмахером [9]. При $\lambda > 1$ и $\lambda_0 = 0$ – Ю. Берестом и А. Веселовым [2, 10].

Пример 2. Фундаментальное решение оператора

$$\mathcal{L} = \Box_{3+5} - \frac{2}{t_1^2} + \frac{2}{x_1^2}$$

имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{16\pi^3}\left(\frac{1}{\zeta_1 \xi_1 t_1 x_1}\,\delta(\gamma) + 2\left(\frac{1}{\zeta_1 t_1} - \frac{1}{\xi_1 x_1}\right)\delta'(\gamma) - 4\delta''(\gamma)\right).$$

В самом деле, оператор $\mathcal{L}$ деформирован потенциалами Калоджеро–Мозера, связанными с системой корней $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$ и отвечающими кратностям $m_\alpha = 1$ и $k_\alpha = 1$. Далее, из (7), при $i = 2$, получаем

$$\nabla_{3+5}\varphi_2 + \varphi_2 = \frac{2}{t_1^2} - \frac{2}{x_1^2}.$$

Полагая $\varphi_2 = \varphi_2^1(\zeta; t) + \varphi_2^2(\xi; x)$, имеем

$$\varphi_2^1 = \frac{-2 + c_1 t_1}{t_1(t_1 - \zeta_1)}; \quad \varphi_2^2 = \frac{2 - c_2 x_1}{t_1(x_1 - \xi_1)}.$$

Возникает задача подбора констант c_1 и c_2, значения которых на некотором этапе давали бы равенство $\mathcal{L}\varphi_i = 0$. Пусть $c_1 = 2/\zeta_1$ и $c_2 = 2/\xi_1$, тогда

$$\varphi_2 = \frac{2}{\zeta_1 t_1} - \frac{2}{\xi_1 x_1}.$$

Решая уравнение

$$\nabla_{3+5}\varphi_3 + \varphi_3 = -\frac{8(\zeta_1 x_1 + \xi_1 t_1)}{\zeta_1 \xi_1 t_1^2 x_1^2}$$

с дополнительным условием $\mathcal{L}\varphi_3 = 0$, получаем

$$\varphi_3 = -\frac{8}{\zeta_1 \xi_1 t_1 x_1}.$$

Тогда

$$\mathcal{E} = \Phi_0^{(1)}(\gamma) + 2\left(\frac{1}{\zeta_1 t_1} - \frac{1}{\xi_1 x_1}\right)\Phi_0^{(2)}(\gamma) - \frac{8}{\zeta_1 \xi_1 t_1 x_1}\Phi_0^{(3)}(\gamma).$$

На основании леммы 2.2, получаем утверждение примера 2.

Замечание. Очевидно, что метод Адамара можно применить лишь для уравнений второго порядка, когда система (7) решается в общем виде. В этой связи, в работах [2, 3,10] была предложена новая конструкция фундаментального решения в виде “анзатца” $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i \Phi_0^{(i)}$, где $\mathcal{D}_i$ – некоторые явно определяемые соответствующим оператором $\mathcal{L}$, дифференциальные операторы с переменными коэффициентами.

4. Потенциалы. Калибровочная эквивалентность операторов. Под произвольной системой корней $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^q$ будем понимать набор попарно несонаправленных векторов, порождающих евклидово пространство $\mathbf{R}^q$ и таких, что для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ отражения

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

переводит $\mathcal{R}$ в себя.

Пусть

$$U_k(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{Q}_+} k_\alpha(k_\alpha+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,t)^2}, \quad U_m(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} m_\alpha(m_\alpha+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,x)^2}$$

пара потенциалов, связанных с произвольными системами корней $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ в подпространствах $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{R}^q$ соответственно. Здесь $\mathcal{R}_+$, $\mathcal{Q}_+$ – множества положительных корней, $(\alpha,\cdot)$ – скалярное произведение, k_α, m_α – функции корней с неотрицательными целыми значениями, инвариантные относительно действия групп отражений систем $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно.

Далее, для параметра $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbf{R}^s$ рассмотрим функции $P_s(y) \equiv P_s(y + \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ по переменной $y \in \mathbf{R}$, которые определяются как решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P'_{s+1}P_{s-1} - P_{s+1}P'_{s-1} = (2s+1)P_s^2, \quad s = 1, 2, \dots, \quad P_0 := 1, \quad P_1 := y.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной y.

Введенные функции являются многочленами Бурчналла–Чаунди, степень которых равна $s(s+1)/2$ [10,11].

Потенциалы Лагнезе–Штельмахера задаются формулой

$$W_s(y, \beta) = 2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \log |P_s(y)|.$$

Если $\beta = 0$, то мы имеем потенциалы Штельмахера [1, 10]:

$$W_s(y, 0) = -\frac{s(s+1)}{y^2}.$$

Определение ([11]). *Для произвольных операторов A, B и C косое присоединенное действие определяется правилом*

$$\mathrm{ad}^k_{A,B} C := \mathrm{ad}^{k-1}_{A,B}(AC - CB), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Определение ([11]). *Два дифференциальных оператора $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ называются N-калибровочно эквивалентными, если найдутся ненулевая бесконечно дифференцируемая функция f и натуральное N такие, что*

$$\mathrm{ad}^{N+1}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} f = 0.$$

Пример. На $\mathbf{R}$ операторы

$$\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dx^2}$$

1-калибровочно эквивалентны при помощи функции $f = x$.

Пусть Δ_p и Δ_q – лапласианы по переменным t и x соответственно. Положим

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_+} k_\alpha, \quad \pi_k(t) = \prod_{\alpha \in \mathcal{Q}_+} (\alpha, t)^{k_\alpha}; \\ M &= \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} m_\alpha, \quad \pi_m(x) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_+} (\alpha, x)^{m_\alpha}. \end{aligned} \tag{8}$$

Утверждение 4.1 ([10]). *Имеет место соотношение*

$$\mathrm{ad}^{K+1}_{\Delta_p - U_k(t), \Delta_p} \pi_k(t) = 0,$$

то есть операторы $\Delta_p - U_k(t)$ *и* Δ_p K *– калибровочно эквивалентны.*

Пусть для $y \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{L}_0 = A\frac{\partial^2}{\partial y^2} + B\frac{\partial}{\partial y} + C,$$

где A, B и C перестановочные операторы, не зависящие от переменной y. Положим

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 + W_s(y,\beta)A,$$

$$\mathcal{P}_s(y) = \begin{cases} P_s(y), & \beta \neq 0, \\ y^s, & \beta = 0; \end{cases} \quad S = \begin{cases} s(s+1)/2, & \beta \neq 0, \\ s, & \beta = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Утверждение 4.2 ([12]). *Имеет место соотношение*

$$\mathrm{ad}^{S+1}_{\mathcal{L}_s, \mathcal{L}_0} \mathcal{P}_s(y) = 0,$$

то есть операторы $\mathcal{L}_s$ *и* $\mathcal{L}_0$ S*-калибровочно эквивалентны.*

Замечание. Условия калибровочной эквивалентности гарантируют обрыв ряда-фундаментального решения (5) и заменяют трудно решаемую систему типа (7), которая возникает в результате непосредственного дифференцирования ряда-“анзатца”.

5. Изогюйгенсовы деформации ультрагиперболического оператора. В этом пункте приводятся основные результаты по деформациям ультрагиперболического оператора, доказательство которых помещено в следующем пункте 6.

На $\mathbf{R}^{p+q}$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \Box_{p+q} - U_k(t) + U_m(x),$$

где U_k, U_m – пара потенциалов типа Калоджеро–Мозера.

Пусть как и ранее $\Phi_0^{(\lambda)}(\gamma)$ – элемент ядра Рисса ультрагиперболического оператора; $K, M, \pi_k(t)$, $\pi_m(x)$ – соответственно константы и функции, определенные равенствами (8).

Теорема 1. *При нечетном p фундаментальное решение интерированного оператора $\mathcal{L}^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, имеет вид*

$$\Phi_{k,m}^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi) = \frac{1}{\pi_k(\zeta)\pi_m(\xi)} \sum_{s=0}^{K}\sum_{r=0}^{M}(-1)^{r+s}\binom{r+s}{r}\binom{\lambda+r+s-1}{r+s}$$

$$\times(\mathrm{ad}^s_{\Delta_p - U_k(t),\Delta_p}\pi_k(t)\mathrm{ad}^r_{-\Delta_q+U_m(x),-\Delta_q}\pi_m(x))\Phi_0^{(\lambda+r+s)}(\gamma).$$

Следствие 1. *Для оператора $\mathcal{L}^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, выполняется принцип Гюйгенса, если p и q нечетные и*

$$p + q \geqslant 2(1 + \lambda + K + M).$$

Приведем примеры гюйгенсовых ультрагиперболических операторов:

1. Для системы корней $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \times (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \subset \mathbf{R}^{2+3}$, вложенной в $\mathbf{R}^{3+q}$, и кратностей $k_\alpha = m_\alpha \equiv 1$ оператор
$$\Box_{3+q} - \frac{2}{t_1^2} - \frac{2}{t_2^2} + \frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{2}{x_3^2}$$
гюйгенсов, если $q = 11, 13, 15, \ldots$;
2. Для системы корней $\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2$ с кратностями $k_\alpha = m_\alpha \equiv 1$ и пространства $\mathbf{R}^{3+q}$ оператор
$$\Box_{3+q} - \frac{2}{t_1^2} - \frac{16(t_1^2 + 3t_2^2)}{(t_1^2 - 3t_2^2)^2} + \frac{2}{x_1^2} + \frac{16(x_1^2 + 3x_2^2)}{(x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$
гюйгенсов, если $q = 13, 15, 17, \ldots$;
3. Для системы $\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^{3+q}$ и кратностей $k_\alpha = m_\alpha \equiv 1$ оператор
$$\Box_{3+q} - \frac{2}{t_1^2} - \frac{16(t_1^2 + 3t_2^2)}{(t_1^2 - 3t_2^2)^2} + \frac{4}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{2}{x_1^2} + \frac{4}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{2}{x_2^2}$$

гюйгенсов, если $q = 15, 17, 19, \ldots$.

Далее на $\mathbf{R}^{p+q}$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{Z}_s = \Box_{p+q}^2 + W_s\left(\frac{t_i \pm x_j}{2}, \beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t_i} \mp \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2, \ i = 1, \ldots, p; \ j = 1, \ldots, q.$$

Здесь W_s – потенциал Лагнезе–Штельмахера; S, $\mathcal{P}_s$ – определены равенствами (9).

Теорема 2. *При нечетном p фундаментальное решение интерированного оператора $\mathcal{Z}_s^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, имеет вид*

$$\Psi_s^{(\lambda)}(t, \zeta; x, \xi) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{P}_s\left(\frac{\zeta_i \pm \xi_j}{2}\right)} \sum_{r=0}^{S} (-1)^r \binom{\lambda + r - 1}{r} \left(\mathrm{ad}^r_{\mathcal{Z}_s, \mathcal{Z}_0} \mathcal{P}_s\left(\frac{t_i \pm x_j}{2}\right)\right) \Phi_0^{(2\lambda+2r)}(\gamma).$$

Следствие 2. *Для оператора $\mathcal{Z}_s^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, выполняется принцип Гюйгенса, если p и q нечетные и*

$$p + q \geqslant 4(\lambda + S) + 2.$$

Следствие 3. *Для оператора*

$$\left(\Box_{1+q}^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \log \left| P_s\left(\frac{t \pm x_i}{2}\right)\right| \left(\frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2\right)^\lambda$$

выполняется принцип Гюйгенса, если q нечетное и

$$q \geqslant 4(\lambda + S) + 1.$$

Пример. На пространстве $\mathbf{R}^{1+9}$ рассмотрим оператор волнового типа ($\beta = 0$ и $s = 1$):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_9^2}\right)^2 - \frac{8}{(t \pm x_1)^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2.$$

Его фундаментальное решение имеет вид

$$\Psi_1^{(1)}(t, \zeta; x, \xi) = \frac{2}{\zeta \pm \xi_1}\left(\frac{t_1 \pm x_1}{2}\, \Phi_0^{(2)}(\gamma) - \mathrm{ad}_{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_0} \frac{t_1 \pm x_1}{2}\, \Phi_0^{(4)}(\gamma)\right)$$

или более явно

$$\Psi_1^{(1)}(t, \zeta; x, \xi) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{t_1 \pm x_1}{\zeta \pm \xi_1} + \frac{\zeta \pm \xi_1}{t_1 \pm x_1}\right) \Phi_0^{(2)}(\gamma).$$

6. Метод сплетающих операторов и доказательство теорем. Введем обозначения:

$$\mathcal{G}_k^s(t) = \mathrm{ad}^s_{\Delta_p - U_k(t), \Delta_p}\pi_k(t); \quad \mathcal{G}_m^r(x) = \mathrm{ad}^r_{-\Delta_q + U_m(x), -\Delta_q}\pi_m(x);$$

$$\mathcal{D}_k(t) \equiv \mathcal{D}_k\left(t, \zeta, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \frac{1}{\pi_k(\zeta)} \sum_{s=0}^{K} \frac{(-1)^s}{s!} \mathcal{G}_k^s(t) \frac{\partial^s}{\partial \tau^s}, \quad \tau \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{D}_m(x) \equiv \mathcal{D}_m\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{\pi_m(\xi)} \sum_{r=0}^{M} \frac{(-1)^r}{r!} \mathcal{G}_m^r(x) \frac{\partial^r}{\partial \eta^r}, \quad \eta \in \mathbf{R}$$

(τ, η – спектральные параметры).

Из утверждения (4.1) непосредственно следуют сплетающие соотношения

$$(-\Delta_q + U_m(x) - \eta) \circ \mathcal{D}_m(x) = \mathcal{D}_m(x) \circ (-\Delta_q - \eta),$$

$$(\Delta_p - U_k(t) - \tau) \circ \mathcal{D}_k(t) = \mathcal{D}_k(t) \circ (\Delta_p - \tau).$$

Лемма 6.1. *Для оператора* $\mathcal{L} = \Box_{p+q} - U_k(t) + U_m(x)$ *и* $\lambda \in \mathbf{N}$ *имеет место сплетающее соотношение*

$$(\mathcal{L} - \tau - \eta)^\lambda \circ \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) = \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) \circ (\Box_{p+q} - \tau - \eta)^\lambda.$$

Доказательство. Равенство достаточно доказать для $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L} - \tau - \eta) \circ \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) = \\
&= (\Delta_p - U_k(t) - \tau) \circ \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) + (-\Delta_q + U_m(x) - \eta) \circ \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) \\
&= \mathcal{D}_m(x) \circ (\Delta_p - U_k(t) - \tau) \circ \mathcal{D}_k(t) + \mathcal{D}_k(t) \circ (-\Delta_q + U_m(x) - \eta) \circ \mathcal{D}_m(x) \\
&= \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) \circ (\Delta_p - \tau) + \mathcal{D}_m(x) \circ D_k(t) \circ (-\Delta_q - \eta) \\
&= \mathcal{D}_m(x) \circ \mathcal{D}_k(t) \circ (\Delta_p - \Delta_q - \tau - \eta) = \mathcal{D}_m(x) \circ D_k(t) \circ (\Box_{p+q} - \tau - \eta).
\end{aligned}$$

Далее, для $\lambda \in \mathbf{N}$, рассмотрим многочлен достаточно большой степени N

$$\Phi_0^{(\lambda)}(t, \zeta; x, \xi; \tau, \eta) = \sum_{i=0}^{N} \binom{\lambda + i - 1}{i} \Phi_0^{(\lambda+i)}(\gamma)(\tau + \eta)^i$$

по сумме переменных $\tau, \eta \in \mathbf{R}$ с коэффициентами из ряда Рисса.

Лемма 6.2. *Для $\lambda \in \mathbf{N}$ и нечетного p*

$$\mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)(\Box_{p+q} - \tau - \eta)\Phi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0} =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)\Phi_0^{(\lambda-1)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0}, & \lambda > 1, \\ \delta(t-\zeta, x-\xi), & \lambda = 1. \end{cases}$$

Доказательство.

$$\mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)(\Box_{p+q} - \tau - \eta)\Phi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0} =$$

$$= \frac{1}{\pi_k(\zeta)\pi_m(\xi)} \sum_{s=0}^{K} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{M} (-1)^{r+s} \frac{(r+s)!}{s!r!} \binom{\lambda+r+s-1}{r+s} \mathcal{G}_k^s(t)\mathcal{G}_m^r(x)\Phi_0^{(\lambda+r+s-1)}(\gamma) -$$

$$- \frac{1}{\pi_k(\zeta)\pi_m(\xi)} \sum_{s=0}^{K} \times$$

$$\times \sum_{\substack{r=0,\\ r+s>0}}^{M} (-1)^{r+s} \frac{(r+s)!}{s!r!} \binom{\lambda+r+s-2}{r+s-1} \mathcal{G}_k^s(t)\mathcal{G}_m^r(x)\Phi_0^{(\lambda+r+s-1)}(\gamma) =$$

$$= \frac{\pi_k(t)\pi_m(x)}{\pi_k(\zeta)\pi_m(\xi)} \Phi_0^{(\lambda-1)}(\gamma) + \frac{1}{\pi_k(\zeta)\pi_m(\xi)} \sum_{s=0}^{K} \times$$

$$\times \sum_{\substack{r=0,\\ r+s>0}}^{M} (-1)^{r+s} \frac{(r+s)!}{s!r!} \binom{\lambda+r+s-2}{r+s} \mathcal{G}_k^s(t)\mathcal{G}_m^r(x)\Phi_0^{(\lambda+r+s-1)}(\gamma) =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)\Phi_0^{(\lambda-1)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0}, & \lambda > 1, \\ \delta(t-\zeta, x-\xi), & \lambda = 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Непосредственно проверяется, что

$$\Phi_{k,m}^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi) = \mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)\Phi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0}.$$

Покажем, что

$$\mathcal{L}^\lambda \Phi^{(\lambda)}_{k,m}(t,\zeta;x,\xi) = \delta(t-\zeta, x-\xi).$$

На основании лемм 6.1 и 6.2 имеем

$$\mathcal{L}^\lambda \Phi^{(\lambda)}_{k,m}(t,\zeta;x,\xi) = (\mathcal{L}-\tau-\eta)^\lambda \mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)\Phi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0} =$$

$$= (\mathcal{L}-\tau-\eta)^{\lambda-1}\mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)(\Box_{p+q}-\tau-\eta)\Phi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0} =$$

$$\mathcal{L}^{\lambda-1}\big(\mathcal{D}_m(x)\mathcal{D}_k(t)(\Box_{p+q}-\tau-\eta)\Phi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\tau,\eta)\big|_{\tau=\eta=0}\big) =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{L}^{\lambda-1}\Phi^{(\lambda-1)}_{k,m}(t,\zeta;x,\xi), & \lambda > 1, \\ \delta(t-\zeta, x-\xi), & \lambda = 1 \end{cases}$$

и доказательство завершено.

Доказательство теоремы 2. Для $s = 1, 2, \dots,$ $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ обозначим

$$\mathcal{D}_s(t_i \pm x_j) \equiv \mathcal{D}_s\left(t_i \pm x_j, \zeta_i \pm \xi_j, \frac{\partial}{\partial\eta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{P}_s\left(\frac{\zeta_i \pm \xi_j}{2}\right)} \sum_{r=0}^{S} \frac{(-1)^r}{r!}\left(\mathrm{ad}^r_{\mathcal{Z}_s,\mathcal{Z}_0}\mathcal{P}_s\left(\frac{t_i \pm x_j}{2}\right)\right)\frac{\partial^r}{\partial\eta^r}.$$

Из утверждения (4.2) непосредственно следует сплетающее соотношение

$$(\mathcal{Z}_s - \eta)^\lambda \circ \mathcal{D}_s(t_i \pm x_j) = \mathcal{D}_s(t_i \pm x_j) \circ (\Box^2_{p+q} - \eta)^\lambda.$$

Таким образом, для многочлена достаточно большой степени N

$$\Psi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\eta) = \sum_{i=0}^{N}\binom{\lambda+i-1}{i}\Phi_0^{(2\lambda+2i)}(\gamma)\eta^i$$

по переменной η с коэффициентами из ядра Рисса, справедливо равенство

$$\mathcal{D}_s(t_i \pm x_j)(\Box^2_{p+q} - \eta)\Psi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\eta)\big|_{\eta=0} =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{D}_s(t_i \pm x_j)\Psi_0^{(\lambda-1)}(t,\zeta;x,\xi;\eta)\big|_{\eta=0}, & \lambda > 1, \\ \delta(t-\zeta, x-\xi), & \lambda = 1. \end{cases}$$

Тогда для

$$\Psi_s^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi) = \mathcal{D}_s(t_i \pm x_j)\Psi_0^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\eta)\big|_{\eta=0}$$

имеем

$$\mathcal{Z}_s^{\lambda}\Psi_s^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi) = \mathcal{Z}_s^{\lambda-1}\big(\mathcal{D}_s(t_i \pm x_j)\Box_{p+q}^2 - \eta)\Psi_s^{(\lambda)}(t,\zeta;x,\xi;\eta)\big|_{\eta=0}\big) =$$

$$= \mathcal{Z}_s^{\lambda-1}\Psi_s^{(\lambda-1)}(t,\zeta;x,\xi),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Литература

1. K. L. Stellmacher, *Ein Beispiel einer Huygennchen differentialgleichung.* Nachr. Akad. Wiss., Gottingen Math. Phys. Kl. Pa., **10** (1953), 133–138.
2. Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов, *Проблема Адамара и группы Кокстера: новые примеры гюйгенсовых уравнений.* Функц. анал. и его прил., **28**, No. 1 (1994), 3–15.
3. Yu. Berest, Yu. Molchanov, *Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance.* J. Math. Phis., **36(8)** (1995), 4324–4339.
4. В. М. Бабич, *Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения.* Алгебра и анализ, **3**, в. 5 (1991), 1–37.
5. M. Riesz, *L'integrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchi.* Acta Math., **81** (1949), 1–223.
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* М., Физматгиз, (1958).
7. Yu. Yu. Berest, I. M. Loutsenko, *Huygens' principle in Minkowski spaces and soliton solutions of the Korteweg de Vries equation.* Comm. Math. Phis. **190** (1997), 113–132.
8. Foures-Bruhat Ivonne, *Solution elementaire d'equations ultra hyperboliques.* J. Math. Pure et Appl., **35(3)** (1956), 277–288.
9. J. E. Lagnese, K. L. Stellmacher, *A method of generating class of Huygens' operators.* J. Math. Mech., **17**, No. 5 (1967), 461–472.
10. Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов, *Принцип Гюйгенса и интегрируемость.* УМН, **49**, 6(300) (1994), 8–78.
11. Yu. Berest, *Hierarchies of Huygens' operators and Hadamard's conjecture.* Acta Appl. Math., **53** (1998), 125–185.
12. С. П. Хэкало, *Изогюйгенсовы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга 3.* Матем. замет., **70**, 6 (2001), 927–940.

Khekalo S. Isohuygens deformation of the ultrahyperbolic operator.

New examples of the isohuygens deformation of the ultrahyperbolic operator and its powers with Calogero–Moser and Lagnese–Stellmacher potentials.

Коломенский государственный
педагогический институт

Поступило 20 декабря 2001 г.