Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

Л. А. Молотков

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ, ПЕРЕРЕЗАННОЙ СИСТЕМАМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРЕЩИН

Настоящая работа посвящена исследованию распространения волн в трещиноватых средах. Такие среды часто встречаются в земной коре, а иногда являются коллекторами нефти и газа. Исследование волновых процессов в этих средах проводится на основе эффективных моделей. В связи с этим в предлагаемой работе выводятся уравнения эффективных моделей, описывающих однородные анизотропные упругие среды, перерезанные одной, двумя или тремя системами параллельных трещин. Трещины разных систем ортогональны. При выводе эффективной модели каждая трещина заменяется плоской границей, на которой имеют место скачки смещений и напряжений. Эти скачки являются линейными функциями средних на границе смещений и напряжений, и каждая граница характеризуется матрицей 6×6, определяющей эту зависимость. Упомянутые матрицы для всех трещин одной системы предполагаются одинаковыми, и среда является периодической вдоль осей декартовой системы координат.

Построение эффективной модели проводится методом матричного осреднения [1, 2]. Этим методом последовательно выполняется осреднение вдоль координатных осей, и результат в этом случае оказывается не зависящим от порядка осреднения. Полученные уравнения, как и уравнения теории упругости, состоят из уравнений закона Гука и сплошной среды. Только в особых частных случаях полученные уравнения могут быть приведены к уравнениям теории упругости. На основании уравнений эффективных моделей выводятся выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий волнового поля и выясняется, при каких условиях в эффективной модели отсутствует затуха-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонд фундаментальных исследований (РФФИ) грант No. 02-01-00260.

ние волн.

В заключение введения остановимся на кратком обзоре работ, в которых трещины рассматривались как границы со скачками смещений и напряжений. Отдельная трещина в упругой среде исследовалась в работе [3]. Трещины в виде вытянутых эллипсоидов рассматривались, в частности, в статьях [4, 5]. Упругие среды, перерезанные системой бесконечных плоских трещин, на которых смещения испытывают скачки, рассматривались в работах [6–10]. Система параллельных трещин, на которых скачки смещений выражаются через непрерывные напряжения с помощью положительно определенных матриц 3×3, исследовались в статье [11] и монографии [12]. Трещиноватые среды со скачками смещений на трещинах также рассматривались в цикле статей [13–15]. В этих статьях исследовались эффективные модели в случаях двух формально введенных систем трещин с разрывами смещений и различных видов анизотропии. В отличие от упомянутых работ в предлагаемой статье обоснованно рассматриваются анизотропные упругие среды с одной, двумя или тремя системами трещин, на которых испытывают скачки не только смещения, но и напряжения.

§1. Уравнения эффективной модели в случае упругой среды с одной системой параллельных трещин

Пусть задана однородная упругая среда $0 \leqslant z \leqslant H$ с анизотропией общего вида (рис. 1). Среда пересечена плоскостями $z = h$, $z = 2h, \dots, z = (n-1)h$ $(h = H/n)$, на которых выполняются

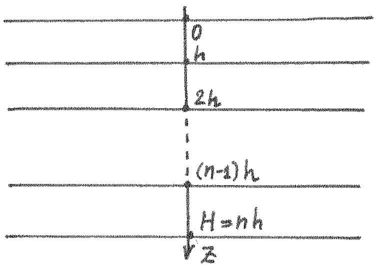

Рис. 1.

граничные условия

$$\big([u_x],[u_y],[u_z],[t_{zz}],[t_{yz}],[t_{xz}]\big)^{\intercal} = h\mathbf{L}(\overline{u}_x,\overline{u}_y,\overline{u}_z,\overline{t}_{zz},\overline{t}_{yz},\overline{t}_{xz})^{\intercal}, \quad (1.1)$$

где u_x, u_y, u_z – смещения, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz} – компоненты тензора напряжений, $\intercal$ – символ транспонирования и $\mathbf{L}$ – заданная матрица 6×6. Величины $[u_x]$, $[u_y]$, $[u_z]$, $[t_{zz}]$, $[t_{yz}]$, $[t_{xz}]$ описывают скачки смещений и напряжений на указанных плоскостях и выражаются равенствами

$$\begin{gathered}[u_x]=u_{x2}-u_{x1}, \quad [u_y]=u_{y2}-u_{y1}, \quad [u_z]=u_{z2}-u_{z1},\\ [t_{zz}]=t_{zz2}-t_{zz1}, \ \ [t_{yz}]=t_{yz2}-t_{yz1}, \ \ [t_{xz}]=t_{xz2}-t_{xz1} \quad (1.2)\\ (z=ih, \quad i=1,2,\ldots,n-1),\end{gathered}$$

в которых индекс 2 соответствует предельному значению при $z=ih+0$, а индекс 1 – значению при $z=ih-0$. Выражения $\overline{u}_x$, $\overline{u}_y$, $\overline{u}_z$, $\overline{t}_{zz}$, $\overline{t}_{yz}$, $\overline{t}_{xz}$ являются средними арифметическими значениями на границах и

$$\begin{gathered}\overline{u}_x=0.5(u_{x1}+u_{x2}), \ \ \overline{u}_y=0.5(u_{y1}+u_{y2}), \ \ \overline{u}_z=0.5(u_{z1}+u_{z2}),\\ \overline{t}_{zz}=0.5(t_{zz1}+t_{zz2}), \ \ \overline{t}_{yz}=0.5(t_{yz1}+t_{yz2}), \ \ \overline{t}_{xz}=0.5(t_{xz1}+t_{xz2})\end{gathered} \quad (1.3)$$

при $z=ih$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$. На внешних границах $z=0$ и $z=H$ выполняются некоторые линейные условия. Среда возбуждается источником, расположенным внутри или вне среды. Для проводимых исследований явный вид этих линейных условий и характеристики указанного источника оказываются несущественными.

В образующемся волновом поле совершим предельный переход при условиях

$$n\to\infty, \quad h\to 0, \quad H=nh=\mathrm{const} \quad (1.4)$$

и выведем уравнения, которым удовлетворяет предельное волновое поле. С этой целью представим граничные условия (1.1) с учетом соотношений (1.2) и (1.3) в виде равенства

$$\begin{gathered}\big(u_{x2},u_{y2},u_{z2},t_{zz2},t_{yz2},t_{xz2}\big)^{\intercal}=\\ =(\mathbf{E}-0.5h\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{E}+0.5h\mathbf{L})\big(u_{x1},u_{y1},u_{z1},t_{zz1},t_{yz1},t_{xz1}\big)^{\intercal},\end{gathered} \quad (1.5)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Используя элементарные приближенные соотношения для матриц, заменим при достаточно малых h равенство (1.5) формулой

$$\mathbf{W}_2 = (\mathbf{E} + h\mathbf{L})\mathbf{W}_1, \tag{1.6}$$

в которой введено обозначение

$$\mathbf{W}_i = \left(u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}, t_{zzi}, t_{yzi}, t_{xzi}\right)^{\intercal} \quad (i = 1, 2). \tag{1.7}$$

Равенство (1.6) устанавливает связь между матрицами $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$, определяющими волновое поле на разных сторонах плоскости $z = ih$.

Определим теперь аналогичную связь между матрицами $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_0$ соответственно при $z = ih - 0$ и $z = (i-1)h + 0$. Для этого используем уравнения сплошной среды

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

и уравнения закона Гука для упругой среды с общей анизотропией

$$\begin{gathered}
\left(t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, t_{xy}\right)^{\intercal} = \\
= \mathbf{A}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^{\intercal},
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{A}$ – положительно определенная симметричная матрица 6×6 с элементами a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, 6)$. Согласно используемому методу матричного осреднения [2], выразим из 9 уравнений (1.8) и (1.9) производные $\partial u_x/\partial z$, $\partial u_y/\partial z$, $\partial u_z/\partial z$, $\partial t_{zz}/\partial z$, $\partial t_{yz}/\partial z$, $\partial t_{xz}/\partial z$ через величины u_x, u_y, u_z, t_{zz}, t_{yz} и t_{xz}. С этой целью полезно, как и в работах [2, 11], заменить матричное уравнение (1.9) на другое равносильное матричное уравнение

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}\right)^{\intercal} = \\
= \mathbf{B}\left(t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^{\intercal},
\end{gathered} \tag{1.10}$$

в котором

$$\mathbf{B} = \frac{1}{A^{345}_{345}}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} A^{45}_{45} & -A^{35}_{45} & A^{34}_{45} & -A^{345}_{145} & -A^{345}_{245} & -A^{345}_{456} \\ -A^{45}_{35} & A^{35}_{35} & -A^{34}_{35} & A^{345}_{135} & A^{345}_{235} & A^{345}_{356} \\ A^{45}_{34} & -A^{35}_{34} & A^{34}_{34} & -A^{345}_{134} & -A^{345}_{234} & -A^{345}_{346} \\ A^{145}_{345} & -A^{135}_{345} & A^{134}_{345} & A^{1345}_{1345} & A^{1345}_{2345} & -A^{1345}_{3456} \\ A^{245}_{345} & -A^{235}_{345} & A^{234}_{345} & A^{2345}_{1345} & A^{2345}_{2345} & -A^{2345}_{3456} \\ A^{456}_{345} & -A^{356}_{345} & A^{346}_{345} & -A^{3456}_{1345} & -A^{3456}_{2345} & A^{3456}_{3456} \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Величины $A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\varepsilon\theta\eta\zeta}$, $A^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\theta\eta}$, $A^{\alpha\beta}_{\varepsilon\theta}$ – миноры матрицы $\mathbf{A}$, при этом верхние значки определяют номера входящих в миноры строк, а нижние индексы – номера столбцов в минорах. На основании соотношений (1.8) и (1.10) записывается равенство

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial t_{zz}}{\partial z}, \frac{\partial t_{yz}}{\partial z}, \frac{\partial t_{xz}}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}} = \\ = \varkappa\left(u_x, u_y, u_z, t_{zz}, t_{yz}, u_{xz}\right)^{\mathsf{T}},\end{gathered} \tag{1.12}$$

в котором элементы матрицы $\varkappa$ $\varkappa_{ik}$ $(i,k = 1,2,\ldots,6)$ являются или постоянными величинами, или дифференциальными операторами и определяются соотношения (1.10), (1.11) и

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \left(b_{34}\frac{\partial}{\partial x} + b_{36}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_x + \left(b_{36}\frac{\partial}{\partial x} + b_{35}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_y - \\ - \frac{\partial u_z}{\partial x} + b_{31}t_{zz} + b_{32}t_{yz} + b_{33}t_{xz},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \left(b_{24}\frac{\partial}{\partial x} + b_{26}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_x + \left(b_{26}\frac{\partial}{\partial x} + b_{25}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_y - \\ - \frac{\partial u_z}{\partial y} + b_{21}t_{zz} + b_{22}t_{yz} + b_{23}t_{xz},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \left(b_{14}\frac{\partial}{\partial x}+b_{16}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_x+\left(b_{16}\frac{\partial}{\partial x}+b_{15}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_y+b_{11}t_{zz}+b_{12}t_{yz}+b_{13}t_{xz},$$

$$\frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial t_{xz}}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= -\left[b_{64}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{66}+b_{54})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + b_{56}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u_x + \\ &+ \left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2b_{56}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - b_{55}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u_y - \left(b_{61}\frac{\partial}{\partial x} + b_{51}\frac{\partial}{\partial y}\right)t_{zz} - \\ &- \left(b_{62}\frac{\partial}{\partial x} + b_{52}\frac{\partial}{\partial y}\right)t_{yz} - \left(b_{63}\frac{\partial}{\partial x} + b_{53}\frac{\partial}{\partial y}\right)t_{xz},\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} &= \left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2b_{46}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - b_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u_x - \\ &- \left[b_{46}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{45}+b_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + b_{65}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u_y - \left(b_{41}\frac{\partial}{\partial x} + b_{61}\frac{\partial}{\partial y}\right)t_{zz} - \\ &- \left(b_{42}\frac{\partial}{\partial x} + b_{62}\frac{\partial}{\partial y}\right)t_{yz} - \left(b_{43}\frac{\partial}{\partial x} + b_{63}\frac{\partial}{\partial y}\right)t_{xz},\end{aligned}$$

где b_{ik} – элементы матрицы $\mathbf{B}$. Подобные выражения для матрицы $\boldsymbol{\varkappa}$ были получены в работе [11] при осреднении периодической упругой структуры с общей анизотропией и с жестким контактом на границах.

Уравнение (1.12) с использованием обозначений (1.7) запишем в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} = \boldsymbol{\varkappa}\mathbf{W} \tag{1.14}$$

и решим уравнение (1.14) с начальным условием

$$\mathbf{W}\Big|_{z=(i-1)h} = \mathbf{W}_0. \tag{1.15}$$

В результате приходим к равенству

$$\mathbf{W}_1 = e^{h\boldsymbol{\varkappa}}\mathbf{W}_0, \tag{1.16}$$

связывающему матрицы $\mathbf{W}$ на границах одного слоя. На основании соотношений (1.6) и (1.16) и периодичности рассматриваемой среды, запишем равенство

$$\mathbf{W}(H) = \left[(\mathbf{E} + h\mathbf{L})e^{h\boldsymbol{\varkappa}}\right]^n e^{-h\boldsymbol{\varkappa}}\mathbf{W}(0), \tag{1.17}$$

устанавливающее связь между матрицами $\mathbf{W}$ на внешних границах среды. При выполнении предельного перехода величина h может рассматриваться как малая величина. С учетом этого утверждения оказываются справедливыми приближенные формулы

$$\begin{aligned} e^{h\boldsymbol{\varkappa}} &= \mathbf{E} + h\boldsymbol{\varkappa}, \\ (\mathbf{E} + h\mathbf{L})e^{h\boldsymbol{\varkappa}} &= \mathbf{E} + h(\mathbf{L} + \boldsymbol{\varkappa}) \end{aligned} \tag{1.18}$$

и соотношение (1.17) заменяется на равенство

$$\mathbf{W}(H) = \left[\mathbf{E} + (\mathbf{L} + \boldsymbol{\varkappa})\frac{H}{h}\right]^n (\mathbf{E} - h\mathbf{L})\mathbf{W}(0). \tag{1.19}$$

Осуществляя предельный переход при условиях (1.4) в формуле (1.19) и используя определение числа e, приходим к соотношению

$$\mathbf{W}(H) = e^{(\mathbf{L}+\boldsymbol{\varkappa})H}\mathbf{W}(0). \tag{1.20}$$

Так как среда может быть ограничена любой плоскостью $z =$ const $(0 < z \leqslant H)$, то справедливо равенство

$$\mathbf{W}(z) = e^{(\mathbf{L}+\boldsymbol{\varkappa})z}\mathbf{W}(0). \tag{1.21}$$

Соотношение (1.21) описывает предельное волновое поле. После дифференцирования этого соотношения по z приходим к матричному уравнению

$$\frac{d\mathbf{W}}{\partial z} = (\mathbf{L} + \boldsymbol{\varkappa})\mathbf{W}, \tag{1.22}$$

которое равносильно 6 скалярным уравнениям относительно u_x, u_y, u_z, t_{zz}, t_{yz} и t_{xz}. Чтобы выразить остальные 3 величины t_{xx}, t_{yy} и t_{xy}, необходимо использовать матричное равенство (1.10), из которого следуют соотношения

$$t_{xx} = b_{41}t_{zz} + b_{42}t_{yz} + b_{43}t_{xz} + b_{44}\frac{\partial u_x}{\partial x} + b_{45}\frac{\partial u_y}{\partial y} + b_{46}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right),$$

$$\begin{aligned} t_{yy} = b_{51}t_{zz} + b_{52}t_{yz} + b_{53}t_{xz} + b_{54}\frac{\partial u_x}{\partial x} + b_{55}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \\ + b_{56}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$t_{xy} = b_{61}t_{zz} + b_{62}t_{yz} + b_{63}t_{xz} + b_{64}\frac{\partial u_x}{\partial x} + b_{65}\frac{\partial u_y}{\partial y} + b_{66}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

При осуществлении предельного перехода соотношения (1.23) не изменяются, и поэтому предельное волновое поле также описывается 3 уравнениями (1.23). Таким образом, после предельного перехода волновое поле определяется уравнениями (1.22) и (1.23).

Остановимся теперь на различии в уравнениях, описывающих волновые поля в заданной упругой анизотропной среде до и после предельного перехода. Нетрудно заметить, что уравнение (1.14) отличается от уравнения (1.22) тем, что матрица $\boldsymbol{\varkappa}$ заменена на сумму матриц $\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{L}$. Это различие является единственным различием между уравнениями, так как уравнение (1.23) справедливо для обеих сравниваемых сред. Чтобы учесть указанное различие, получим на основании формулы (1.6) равенство

$$[\mathbf{W}] = h\mathbf{L}\mathbf{W}, \tag{1.24}$$

в котором у матрицы $\mathbf{W}$ опущен индекс 1. Исключение этого индекса стало возможным, поскольку после предельного перехода матрица $\mathbf{W}$ стала непрерывной вдоль оси z и границы исчезли. С учетом (1.24) уравнение (1.22) заменяется соотношениями

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} = \boldsymbol{\varkappa}\mathbf{W} + [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,], \quad [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,] = \lim_{h\to 0}\frac{[\mathbf{W}]}{h}. \tag{1.25}$$

В случае, когда в заданной среде вместо скачков на границах имеет место жесткий контакт и $[\,\widetilde{\mathbf{W}}\,] = 0$, упругая анизотропная среда описывается уравнениями (1.23) и матричным уравнением

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} = \boldsymbol{\varkappa}\mathbf{W}. \tag{1.26}$$

Этим уравнениям равносильны уравнения (1.8) и (1.9). Учет граничных условий (1.1) и результатов предельного перехода приводит к тому, что равенство (1.26) заменяется на соотношение (1.25), а уравнения (1.23) остаются неизменными. Отсюда следует, что переход от упругой среды к полученной эффективной модели сводится только к замене в уравнении (1.25)

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} \to \frac{d\mathbf{W}}{dz} - [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,]. \tag{1.27}$$

Перейдем теперь от уравнений (1.23) и (1.25) к уравнениям, аналогичным равенствам (1.8) и (1.9). Такой переход проводится теми же способами, как и в случае перехода от уравнений (1.23) и (1.26) к соотношениям (1.8) и (1.9). Так как при этих переходах не выполняются операции дифференцирования и интегрирования по z, то уравнения (1.23) и (1.25) равносильны уравнениям (1.8) и (1.9), в которых проведены замены

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial z} \to \frac{\partial u_x}{\partial z} - [\,\widetilde{u}_x\,], && \frac{\partial u_y}{\partial z} \to \frac{\partial u_y}{\partial z} - [\,\widetilde{u}_y\,],\\
&\frac{\partial u_z}{\partial z} \to \frac{\partial u_z}{\partial z} - [\,\widetilde{u}_z\,], && \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \to \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{zz}\,],\\
&\frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \to \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{yz}\,], && \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \to \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{xz}\,],
\end{aligned} \tag{1.28}$$

соответствующие замене (1.27). В результате эффективная модель описывается уравнениям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{xz}\,] = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{yz}\,] = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{zz}\,] = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
&\left(t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, t_{xy}\right)^{\mathsf{T}} =\\
&= \mathbf{A}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z} - [\,\widetilde{u}_z\,], \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} - [\,\widetilde{u}_y\,],\right.\\
&\left.\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} - [\,\widetilde{u}_x\,], \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^{\mathsf{T}},
\end{aligned} \tag{1.30}$$

в которых

$$\begin{aligned}
&[\,\widetilde{u}_x\,] = l_{11}u_x + l_{12}u_y + l_{13}u_z + l_{14}t_{zz} + l_{15}t_{yz} + l_{16}t_{xz},\\
&[\,\widetilde{u}_y\,] = l_{21}u_x + l_{22}u_y + l_{23}u_z + l_{24}t_{zz} + l_{25}t_{yz} + l_{26}t_{xz},\\
&[\,\widetilde{u}_z\,] = l_{31}u_x + l_{32}u_y + l_{33}u_z + l_{34}t_{zz} + l_{35}t_{yz} + l_{36}t_{xz},\\
&[\,\widetilde{t}_{zz}\,] = l_{41}u_x + l_{42}u_y + l_{43}u_z + l_{44}t_{zz} + l_{45}t_{yz} + l_{46}t_{xz},\\
&[\,\widetilde{t}_{yz}\,] = l_{51}u_x + l_{52}u_y + l_{53}u_z + l_{54}t_{zz} + l_{55}t_{yz} + l_{56}t_{xz},\\
&[\,\widetilde{t}_{xz}\,] = l_{61}u_x + l_{62}u_y + l_{63}u_z + l_{64}t_{zz} + l_{65}t_{yz} + l_{66}t_{xz},
\end{aligned} \tag{1.31}$$

а коэффициенты l_{ik} являются элементами матрицы $\mathbf{L}$, определяющей с помощью равенства (1.1) скачки смещений и напряжений.

Полученные уравнения (1.29)–(1.31) следует рассматривать как обобщенные уравнения теории упругости, так как они, по сравнению с уравнениями (1.8) и (1.9), содержат дополнительные члены. Появление этих членов связано с заменами (1.27) и (1.28), соответствующими определению производной по сокращающемуся промежутку. Кроме того, уравнения сплошной среды (1.29), как и одноименные уравнения теории упругости (1.8), описывают равенства сил в направлениях координатных осей с учетом сил, возникающих вследствие разрывов смещений и напряжений. Это утверждение позволяет сделать вывод о том, что величины t_{ik} $(i, k = x, y, z)$ также описывают напряжения. Равенства (1.29) с дополнительными членами также выражают видоизмененный закон Гука. В заключение отметим, что в частном случае, который будет рассмотрен в §3, уравнения эффективной модели (1.29)–(1.31) приводятся к уравнениям теории упругости.

§2. Уравнения эффективной модели в случаях двух и трех систем трещин

Используемый подход, если в нем провести некоторые обобщения, позволяет рассматривать не только одну систему параллельных трещин с граничными условиями (1.1), но и также позволяет описывать две или три системы подобных трещин. В каждой такой системе трещины параллельны между собой и перпендикулярны одной из координатных осей. Возможность построения эффективной модели в случае двух или трех систем указанных трещин основана на том, что полученные уравнения (1.29)–(1.31) могут быть дополнительно осреднены вдоль осей x и y.

Рассмотрим теперь упругую анизотропную среду

$$0 \leqslant x \leqslant H_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant H_y, \quad 0 \leqslant z \leqslant H_z \tag{2.1}$$

с тремя системами трещин

$$\begin{aligned} &x = h_x, \quad x = 2h_x, \dots, x = (n_x - 1)h_x \quad (h_x = H_x/n_x), \\ &y = h_y, \quad y = 2h_y, \dots, y = (n_y - 1)h_y \quad (h_y = H_y/n_y), \\ &z = h_z, \quad z = 2h_z, \dots, z = (n_z - 1)h_z \quad (h_z = H_z/n_z), \end{aligned} \tag{2.2}$$

на которых выполняются соответствующие граничные условия

$$\begin{aligned}
&\big([u_x]_x,[u_y]_x,[u_z]_x,[t_{xz}]_x,[t_{xy}]_x,[t_{xx}]_x\big)^{\mathsf T}=\\
&=h_x\mathbf{L}_x\big(\overline{u}_x,\overline{u}_y,\overline{u}_z,\overline{t}_{xz},\overline{t}_{xy},\overline{t}_{xx}\big)^{\mathsf T},\\
&\big([u_x]_y,[u_y]_y,[u_z]_y,[t_{yz}]_y,[t_{yy}]_y,[t_{xy}]_y\big)^{\mathsf T}=\\
&=h_y\mathbf{L}_y\big(\overline{u}_x,\overline{u}_y,\overline{u}_z,\overline{t}_{yz},\overline{t}_{yy},\overline{t}_{xy}\big)^{\mathsf T},\\
&\big([u_x]_z,[u_y]_z,[u_z]_z,[t_{zz}]_z,[t_{yz}]_z,[t_{xz}]_z\big)^{\mathsf T}=\\
&=h_z\mathbf{L}_z\big(\overline{u}_x,\overline{u}_y,\overline{u}_z,\overline{t}_{zz},\overline{t}_{yz},\overline{t}_{xz}\big)^{\mathsf T}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

В волновом поле в этой среде совершим предельный переход при условиях

$$\begin{aligned}
&n_x\to\infty,\quad n_y\to\infty,\quad n_z\to\infty,\quad h_x\to 0,\quad h_y\to 0,\quad h_z\to 0,\\
&H_x=\mathrm{const},\qquad H_y=\mathrm{const},\qquad H_z=\mathrm{const}\,.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Полученное в результате этого предельного перехода волновое поле будет удовлетворять уравнениям, которые описывают эффективную модель.

Для вывода этих уравнений отметим, что в случае, когда в среде существует только одна система трещин, пересекающих ось x, а вдоль осей y и z смещения и напряжения непрерывны, такая среда, согдасно §1, описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}-[\,\widetilde{t}_{xx}\,]_x=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}-[\,\widetilde{t}_{xy}\,]_x=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}-[\,\widetilde{t}_{xz}\,]_x=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};
\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
&\big(t_{xx},t_{yy},t_{zz},t_{yz},t_{xz},t_{xy}\big)^{\mathsf T}=\mathbf{A}\bigg(\frac{\partial u_x}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_x\,]_x,\frac{\partial u_y}{\partial y},\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y},\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_z\,]_x,\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_y\,]_x\bigg)^{\mathsf T},
\end{aligned}\tag{2.6}$$

которые аналогичны равенствам (1.29) и (1.30).

Введем в этой среде вторую систему трещин, перпендикулярных оси z и описываемых третьими граничным условия (2.3) на плоскостях, заданных третьей строкой равенств (2.2). Вывод уравнений эффективной модели в этом случае проводится в основном теми же примемами, как и в §1. Связь между матрицами $\mathbf{W}$, определяющими смещения и напряжения на разных берегах трещин, перпендикулярных оси z, дается соотношением (1.6), в котором величине h и матрице $\mathbf{L}$ добавляются нижние индексы z. Для установления связи между матрицами $\mathbf{W}$ на границах одного слоя запишем матричное соотношение

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_z\,]_x, t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}\right)^{\mathsf{T}}= \\ =\mathbf{B}\left(t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, \frac{\partial u_x}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_x\,]_x, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_y\,]_x\right)^{\mathsf{T}},\end{gathered} \tag{2.7}$$

аналогичное равенству (1.10). Матрица $\mathbf{B}$ в уравнении (2.7) попрежнему выражается формулой (1.11). На основании равенств (2.5) и (2.7) записывается уравнение

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz}=\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{W}+\boldsymbol{\Delta} \tag{2.8}$$

вместо равенства (1.14). Элементы матрицы $\boldsymbol{\varkappa}$ определяются формулами (1.13), а матрица $\boldsymbol{\Delta}$ выражается формулой

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Delta}=\Big(-b_{34}[\,\widetilde{u}_x\,]_x-b_{36}[\,\widetilde{u}_y\,]_x+[\,\widetilde{u}_z\,]_x, -b_{24}[\,\widetilde{u}_x\,]_x-b_{26}[\,\widetilde{u}_y\,]_x, -b_{14}[\,\widetilde{u}_x\,]_x- \\ -b_{16}[\,\widetilde{u}_y\,]_x, [\,\widetilde{t}_{xz}\,]_x, \left(b_{64}\frac{\partial}{\partial x}+b_{54}\frac{\partial}{\partial y}\right)[\,\widetilde{u}_x\,]+\left(b_{66}\frac{\partial}{\partial x}+b_{56}\frac{\partial}{\partial y}\right)[\,\widetilde{u}_y\,]+[\,\widetilde{t}_{xy}\,]_x, \\ \left(b_{44}\frac{\partial}{\partial x}+b_{64}\frac{\partial}{\partial y}\right)[\,\widetilde{u}_x\,]_x+\left(b_{46}\frac{\partial}{\partial x}+b_{66}\frac{\partial}{\partial y}\right)[\,\widetilde{u}_y\,]_x+[\,\widetilde{t}_{xx}\,]_x\Big)^{\mathsf{T}}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.8) с начальным условием

$$\mathbf{W}\Big|_{z=0}=\mathbf{W}_0 \tag{2.10}$$

представляется соотношением

$$\mathbf{W}(z)=e^{z\boldsymbol{\varkappa}}(\mathbf{W}_0+\boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta})-\boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta}. \tag{2.11}$$

Из равенства (2.10) с учетом формулы (1.6) следуют выражения

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}(h_z-0)=e^{h_z\boldsymbol{\varkappa}}(\mathbf{W}_0+\boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta})-\boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta}, \\ &\mathbf{W}(h_z+0)=(\mathbf{E}+h_z\mathbf{L}_z)\Big[e^{h_z\boldsymbol{\varkappa}}(\mathbf{W}_0+\boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta})-\boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\Big]\end{aligned} \tag{2.12}$$

для матрицы $\mathbf{W}$ на берегах трещины $z = h_z$. Аналогичные равенства

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}(ih_z - 0) = e^{h_z \boldsymbol{\varkappa}}\Big[\mathbf{W}\big((i-1)h_z - 0\big) + \boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\Big] - \boldsymbol{\varkappa}^{-1}\boldsymbol{\Delta},\\
&\mathbf{W}(ih_z + 0) = (\mathbf{E} + h_z\mathbf{L}_z)\mathbf{W}(ih_z - 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

записываются для матрицы $\mathbf{W}$ на берегах трещины $z = ih_z$. С учетом малости толщины h_z соотношения (2.13) полезно заменить на формулы

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}(ih_z + 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}\big((i-1)h_z - 0\big) + \mathbf{F},\\
&\mathbf{W}(ih_z - 0) = (\mathbf{E} + h_z\mathbf{L}_z)^{-1}\mathbf{W}(ih_z + 0),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

в которых

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + h_z(\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{L}_z), \quad \mathbf{F} = h\big[\mathbf{E} + h_z(\mathbf{L}_z + \boldsymbol{\varkappa}/2)\big]\boldsymbol{\Delta}. \tag{2.15}$$

Равенства (2.14) могут рассматриваться как рекуррентные соотношения и позволяют установить связь

$$\mathbf{W}(\mathbf{H}_z) = (\mathbf{E}+h_z\mathbf{L}_z)^{-1}\Big[\mathbf{G}^n\mathbf{W}_0 + \big(\mathbf{G}^{n-1} + \mathbf{G}^{n-2} + \ldots \mathbf{G} + \mathbf{E}\big)\mathbf{F}\Big] \tag{2.16}$$

между матрицами $\mathbf{W}$ на внешних границах области. Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии и равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{G}^n = e^{H_z(\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{L}_z)}, \tag{2.17}$$

получим после предельного перехода соотношение

$$\mathbf{W}(\mathbf{H}_z) = e^{H_z(\boldsymbol{\varkappa}+\mathbf{L}_z)}\mathbf{W}_0 + \Big[e^{H_z(\boldsymbol{\varkappa}+\mathbf{L}_z)} - \mathbf{E}\Big](\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{L}_z)^{-1}\boldsymbol{\Delta}. \tag{2.18}$$

Так как среда может быть ограничена любой плоскостью $z =$ const $(0 < z \leqslant H_z)$, то справедливо равенство

$$\mathbf{W}(z) = e^{z(\boldsymbol{\varkappa}+\mathbf{L}_z)}\mathbf{W}_0 + \Big[e^{z(\boldsymbol{\varkappa}+\mathbf{L}_z)} - \mathbf{E}\Big](\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{L}_z)^{-1}\boldsymbol{\Delta}, \tag{2.19}$$

аналогичное соотношению (1.21).

После дифференцирования формулы (2.19) по z приходим к матричному уравнению

$$\frac{d\mathbf{W}(z)}{dz} = (\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{L}_z)\mathbf{W}(z) + \boldsymbol{\Delta}, \tag{2.20}$$

описывающему предельное волновое поле. Уравнение (2.20) равносильно 6 скалярным уравнениям относительно u_x, u_y, u_z, t_{zz}, t_{yz} и t_{xz}. Чтобы выразить остальные 3 величины t_{xx}, t_{yy} и t_{xy}, необходимо использовать матричное равенство (2.7), из которого следуют соотношения

$$\begin{aligned}
&t_{xx} = b_{41}t_{zz} + b_{42}t_{yz} + b_{43}t_{xz} + b_{44}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - [\,\widetilde{u}_x\,]_x\right) + b_{45}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \\
&+ b_{46}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - [u_y]_x\right), \\
&t_{yy} = b_{51}t_{zz} + b_{52}t_{yz} + b_{53}t_{xz} + b_{54}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - [\,\widetilde{u}_x\,]_x\right) + b_{55}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \\
&+ b_{56}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - [u_y]_x\right), \\
&t_{xy} = b_{61}t_{zz} + b_{62}t_{yz} + b_{63}t_{xz} + b_{64}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - [\,\widetilde{u}_x\,]_x\right) + b_{65}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \\
&+ b_{66}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - [u_y]_x\right),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

аналогичные (1.23). Равенства (2.21) справедливы до и после предельного перехода. Сравнивая уравнения (2.8) и (2.21) до предельного перехода с уравнениями (2.20) и (2.21) после предельного перехода, приходим к выводу, что в результате предельного перехода матрица $\varkappa$ заменяется, как и в §1, на сумму $\varkappa + \mathbf{L}_z$. Для матричного произведения $\mathbf{L}_z\mathbf{W}$, определяющего скачки на трещинах вдоль оси z, справедливы, согласно исследованиям §1, формулы

$$\mathbf{L}_z\mathbf{W} = [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,]_z, \quad [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,]_z = \lim_{h\to 0}\frac{[\mathbf{W}]_z}{h}. \tag{2.22}$$

С учетом (2.22) соотношение (2.20) заменяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} = \varkappa\mathbf{W} + \Delta + [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,]_z. \tag{2.23}$$

На основании сравнения уравнений (2.8) и (2.23) следует, что переход от упругой среды с одной системой трещин к упругой среде с двумя системами трещин сводится к замене

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} \to \frac{d\mathbf{W}}{dz} - [\,\widetilde{\mathbf{W}}\,]_z \tag{2.24}$$

в уравнениях. Аналогичная замена была также проведена в §1. При переходе от уравнений (2.21) и (2.23) к уравнениям, аналогичным равенствам (2.5) и (2.6), не выполняются операции дифференцирования и интегрирования по z. Учитывая это утверждение и проводя операции, выполненные в §1, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{xx}\,]_x - [\,\widetilde{t}_{xz}\,]_z = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{xy}\,]_x - [\,\widetilde{t}_{yz}\,]_z = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} - [\,\widetilde{t}_{xz}\,]_x - [\,\widetilde{t}_{zz}\,]_z = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
&\big(t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, t_{xy}\big)^{\mathsf T} =\\
&= \mathbf{A}\bigg(\frac{\partial u_x}{\partial x} - [\,\widetilde{u}_x\,]_x, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z} - [\,\widetilde{u}_z\,]_z, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} - [\,\widetilde{u}_y\,]_z,\\
&\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} - [u_z]_x - [u_x]_z, \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - [u_y]_z\bigg)^{\mathsf T};
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
&\Big([\,\widetilde{u}_x\,]_x, [\,\widetilde{u}_y\,]_x, [\,\widetilde{u}_z\,]_x, [\,\widetilde{t}_{xz}\,]_x, [\,\widetilde{t}_{xy}\,]_x, [\,\widetilde{t}_{xx}\,]_x\Big)^{\mathsf T} =\\
&= \mathbf{L}_x\big(u_x, u_y, u_z, t_{xz}, t_{xy}, t_{xx}\big)^{\mathsf T},\\
&\Big([\,\widetilde{u}_x\,]_z, [\,\widetilde{u}_y\,]_z, [\,\widetilde{u}_z\,]_z, [\,\widetilde{t}_{zz}\,]_z, [\,\widetilde{t}_{yz}\,]_z, [\,\widetilde{t}_{xz}\,]_z\Big)^{\mathsf T} =\\
&= \mathbf{L}_z\big(u_x, u_y, u_z, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}\big)^{\mathsf T},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

описывающим эффективную модель упругой среды, пересеченной двумя системами трещин, перпендикулярных осям x и z. Как видно из уравнений (2.25)–(2.27), координаты x и z оказываются “равноправными” в полученных уравнениях и результат не зависит от порядка осреднений. Последнее обстоятельство расширяет область применимости уравнений (2.25)–(2.27) и позволяет перейти к рассмотрению случая, когда имеет место три системы трещин, перпендикулярных осям x, y и z.

Пусть задана упругая среда, описываемая уравнениями (1.8) и (1.9) и перерезанная трещинами (2.2), на которых выполняются условия (2.3). Для получения уравнений, описывающих эффективную модель этой среды, необходимо провести третье осреднение. Так как это осреднение проводится теми же методами, как и второе осреднение, то ограничимся приведением результатов. Эффективная модель упругой среды с тремя системами трещин описывается уравнениями

$$\begin{gathered}
\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}-[\,\widetilde{t}_{xx}\,]_x-[\,\widetilde{t}_{xy}\,]_y-[\,\widetilde{t}_{xz}\,]_z=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
\frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}-[\,\widetilde{t}_{xy}\,]_x-[\,\widetilde{t}_{yy}\,]_y-[\,\widetilde{t}_{yz}\,]_z=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}-[\,\widetilde{t}_{xz}\,]_x-[\,\widetilde{t}_{xz}\,]_y-[\,\widetilde{t}_{zz}\,]_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};
\end{gathered}\tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
&\bigl(t_{xx},t_{yy},t_{zz},t_{yz},t_{xz},t_{xy}\bigr)^{\mathsf T}=\mathbf{A}\biggl(\frac{\partial u_x}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_x\,]_x,\frac{\partial u_y}{\partial y}-[\,\widetilde{u}_y\,]_y,\\
&\frac{\partial u_z}{\partial z}-[\,\widetilde{u}_z\,]_z,\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}-[\,\widetilde{u}_y\,]_z-[\,\widetilde{u}_z\,]_y,\\
&\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_x\,]_z-[\,\widetilde{u}_z\,]_x,\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}-[\,\widetilde{u}_x\,]_y-[\,\widetilde{u}_y\,]_x\biggr)^{\mathsf T};
\end{aligned}\tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
&\Bigl([\,\widetilde{u}_x\,]_x,[\,\widetilde{u}_y\,]_x,[\,\widetilde{u}_z\,]_x,[\,\widetilde{t}_{xz}\,]_x,[\,\widetilde{t}_{xy}\,]_x,[\,\widetilde{t}_{xx}\,]_x\Bigr)^{\mathsf T}=\\
&=\mathbf{L}_x\bigl(u_x,u_y,u_z,t_{xz},t_{xy},t_{xx}\bigr)^{\mathsf T},\\
&\Bigl([\,\widetilde{u}_x\,]_y,[\,\widetilde{u}_y\,]_y,[\,\widetilde{u}_z\,]_y,[\,\widetilde{t}_{yz}\,]_y,[\,\widetilde{t}_{yy}\,]_y,[\,\widetilde{t}_{xy}\,]_y\Bigr)^{\mathsf T}=\\
&=\mathbf{L}_y\bigl(u_x,u_y,u_z,t_{yz},t_{yy},t_{xy}\bigr)^{\mathsf T},\\
&\Bigl([\,\widetilde{u}_x\,]_z,[\,\widetilde{u}_y\,]_z,[\,\widetilde{u}_z\,]_z,[\,\widetilde{t}_{zz}\,]_z,[\,\widetilde{t}_{yz}\,]_z,[\,\widetilde{t}_{xz}\,]_z\Bigr)^{\mathsf T}=\\
&=\mathbf{L}_z\bigl(u_x,u_y,u_z,t_{zz},t_{yz},t_{xz}\bigr)^{\mathsf T},
\end{aligned}\tag{2.30}$$

§3. Преобразования уравнения закона Гука для эффективных моделей

Недостаток уравнений (1.30) и соотношений (1.31) состоит в том, что компоненты тензора напряжений входят в обе части уравнений (1.30). Поэтому полезно выразить эти компоненты из указанных уравнений. С этой целью представим уравнения (1.30) и (1.31) в виде равенств

$$\begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y \\ \partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x \\ \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x \end{pmatrix} - \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [\,\widetilde{u}_z\,] \\ [\,\widetilde{u}_y\,] \\ [\,\widetilde{u}_x\,] \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} [\,\widetilde{u}_z\,] \\ [\,\widetilde{u}_y\,] \\ [\,\widetilde{u}_x\,] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{34} & l_{35} & l_{36} \\ l_{24} & l_{25} & l_{26} \\ l_{14} & l_{15} & l_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Объединяя уравнения (3.1) и (3.2), приходим к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y \\ \partial u_x/\partial z + \partial_z/\partial x \\ \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x \end{pmatrix} - \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{pmatrix} - \mathbf{A}\mathbf{L}' \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{34} & l_{35} & l_{36} & 0 \\ 0 & 0 & l_{24} & l_{25} & l_{26} & 0 \\ 0 & 0 & l_{14} & l_{15} & l_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & 0 & 0 & 0 \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.3) следует равенство

$$\begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{pmatrix} = (\mathbf{E}+\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{L}})^{-1}\mathbf{A} \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y \\ \partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x \\ \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x \end{pmatrix} -$$

$$-(\mathbf{E}+\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{L}})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}' \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

в котором компоненты напряжений выражаются только через смещения.

В случае, когда матрица

$$\begin{pmatrix} l_{34} & l_{35} & l_{36} \\ l_{24} & l_{25} & l_{26} \\ l_{14} & l_{15} & l_{16} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

– симметричная и положительно определенная, полезно заменить уравнение (3.5) равенством

$$\begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y \\ \partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x \\ \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x \end{pmatrix} - \mathbf{L}' \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{L})^{-1}. \tag{3.8}$$

Так как $\mathbf{A}$ – симметричная и положительно определенная матрица, то на основании теорем об обратных симметричных и положительно определенных матрицах и о сумме таких матриц следует, что $\mathbf{D}$ – также симметричная и положительно определенная матрица. В случае, когда $\mathbf{L}'$ – нулевая матрица и второе слагаемое в правой части равенства (3.7) отсутствует, соотношение (3.7) полностью соответствует закону Гука для упругой среды.

Этот случай был рассмотрен в работе [11]. В отличие от работы [11] полученная в настоящей статье эффективная модель описывается уравнениями (1.29) и (3.7), в которых содержатся дополнительные слагаемые, содержащие величины $[\widetilde{t}_{xz}]$, $[\widetilde{t}_{yz}]$, $[\widetilde{t}_{zz}]$ и матрицу $\mathbf{L}'$. Для дальнейших исследований заменим уравнение (3.7) на соотношение

$$
\begin{gathered}
\left(t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, t_{xy}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{D}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z} - [u_z]',\right.\\
\left.\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} - [u_y]', \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} - [u_x],' \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^{\mathsf{T}},
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
{[u_x]'} &= l_{11}u_x + l_{12}u_y + l_{13}u_z,\\
{[u_y]'} &= l_{21}u_x + l_{22}u_y + l_{23}u_z,\\
{[u_z]'} &= l_{31}u_x + l_{32}u_y + l_{33}u_z.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Полученные уравнения (3.9) и (3.10) подобны уравнениям (1.30) и (1.31).

Проведенные преобразования уравнений закона Гука могут быть выполнены также и в случае, когда среда разделена тремя системами трещин, перпендикулярных координатным осям. Так как в этом случае преобразования аналогичны преобразованиям для одной системы трещин, то ограничимся кратким изложением способа получения новых уравнений. На основании соотношения (2.10) и (2.11) приходим к матричному уравнению

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} t_{xx}\\ t_{yy}\\ t_{zz}\\ t_{yz}\\ t_{xz}\\ t_{xy}\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x\\ \partial u_y/\partial y\\ \partial u_z/\partial z\\ \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y\\ \partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x\\ \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x\end{pmatrix} - \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{L}}_x + \widetilde{\mathbf{L}}_y + \widetilde{\mathbf{L}}_z)\begin{pmatrix} t_{xx}\\ t_{yy}\\ t_{zz}\\ t_{yz}\\ t_{xz}\\ t_{xy}\end{pmatrix} - \\
-\mathbf{A}\left(\mathbf{L}'_x + \mathbf{L}'_y + \mathbf{L}'_z\right)\left(u_x, u_y, u_z, 0, 0, 0\right)^{\mathsf{T}},
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

в котором

$$\widetilde{\mathbf{L}}_x + \widetilde{\mathbf{L}}_y + \widetilde{\mathbf{L}}_z =$$

$$= \begin{pmatrix} l_{x16} & 0 & 0 & 0 & l_{x14} & l_{x15} \\ 0 & l_{y25} & 0 & l_{y24} & 0 & l_{y26} \\ 0 & 0 & l_{z34} & l_{z35} & l_{z36} & 0 \\ 0 & l_{y35} & l_{z24} & l_{y34} + l_{z25} & l_{z26} & l_{y36} \\ l_{x36} & 0 & l_{z14} & l_{z15} & l_{x34} + l_{z16} & l_{x35} \\ l_{x26} & l_{y15} & 0 & l_{y14} & l_{x24} & l_{x25} + l_{y16} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{L}'_x + \mathbf{L}'_y + \mathbf{L}'_z =$$

$$= \begin{pmatrix} l_{x11} & l_{x12} & l_{x13} & 0 & 0 & 0 \\ l_{y21} & l_{y22} & l_{y23} & 0 & 0 & 0 \\ l_{z31} & l_{z32} & l_{z33} & 0 & 0 & 0 \\ l_{y31} + l_{z21} & l_{y32} + l_{z22} & l_{y33} + l_{z23} & 0 & 0 & 0 \\ l_{x31} + l_{z11} & l_{x32} + l_{z12} & l_{x33} + l_{z13} & 0 & 0 & 0 \\ l_{x21} + l_{y11} & l_{x22} + l_{y12} & l_{x23} + l_{y13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

и l_{xik}, l_{yik}, l_{zik} – собственно элементы матриц $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$ и $\mathbf{L}_z$. Из равенства (3.11) следует уравнение

$$\begin{gathered} \left(t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{xz}, t_{xy}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{D}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - [u_x]', \frac{\partial u_y}{\partial y} - [u_y]'_y,\right. \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} - [u_z]', \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} - [u_y]'_z - [u_y]', \\ \left.\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} - [u_x]'_z - [u_z]'_x, \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - [u_x]'_y - [u_y]'_x\right)^{\mathsf{T}}, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{A}^{-1} + \widetilde{\mathbf{L}}_x + \widetilde{\mathbf{L}}_y + \widetilde{\mathbf{L}}_z\right)^{-1}; \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} [u_x]'_i &= l_{i11} u_x + l_{i12} u_y + l_{i13} u_z, \\ [u_y]'_i &= l_{i21} u_x + l_{i22} u_y + l_{i23} u_z, \quad (i = x, y, z) \\ [u_z]'_i &= l_{i31} u_x + l_{i32} u_y + l_{i33} u_z. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Равенства (3.14)–(3.16) аналогичны соотношениям (3.9), (3.8) и (3.10). В случае симметричных и положительно определенных матриц $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$ и $\mathbf{L}_z$ матрица $\mathbf{D}$ также является симметричной и положительно определенной. Если матрицы $\mathbf{L}'_x$, $\mathbf{L}'_y$ и $\mathbf{L}'_z$ оказываются нулевыми, то уравнение (3.14) подобно уравнению закона

Гука для упругой среды с общей анизотропией. При этом же предположении рассмотрение сред с определенным видом анизотропии и с определенным числом систем трещин дает возможность легко установить тип анизотропии в эффективной модели. Проведенные исследования также позволяют обосновать результаты работ [14, 15], в которых строились и исследовались эффективные модели ортотропной и моноклинной упругих сред с двумя системами трещин без обоснования.

Интересным является частный случай, когда все три системы трещин являются одинаковыми, разрывы смещений пропорциональны только нормальным напряжениям и исходная среда – изотропная. В этом случае для коэффициентов l_{xik}, l_{yik} и l_{zik} выполняются равенства

$$l_{x16} = l_{x25} = l_{x34} = l_{y16} = l_{y25} = l_{y34} = l_{z16} = l_{z25} = l_{z34} = k, \quad (3.17)$$

а остальные коэффициенты l_{xik}, l_{yik} и l_{zik} обращаются в нули. На основании положительной определенности матрицы (3.6) следует неравенство

$$k > 0. \quad (3.18)$$

Для изотропной упругой среды матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ представляются соотношениями

$$\mathbf{A} = \left(\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu, & \lambda, & \lambda \\ \lambda, & \lambda + 2\mu, & \lambda \\ \lambda, & \lambda, & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}, \mu, \mu, \mu \right),$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{1}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu), & -\lambda, & -\lambda \\ -\lambda, & 2(\lambda + \mu), & -\lambda \\ -\lambda, & -\lambda, & 2(\lambda + \mu) \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.19)$$

Закон Гука для эффективной модели в этом случае определяется матрицей

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{-1} = \bigl(\mathbf{A}', (\mu^{-1} + 2k)(1,1,1)\bigr),$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} + k, & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \\ -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} + k, & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \\ -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} + k \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

На основании равенств (3.20) приходим к равенству

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{bmatrix} \widetilde{\lambda} + 2\widetilde{\mu}, & \widetilde{\mu}, & \widetilde{\mu} \\ \widetilde{\mu}, & \widetilde{\lambda} + 2\widetilde{\mu}, & \widetilde{\mu} \\ \widetilde{\mu}, & \widetilde{\mu}, & \widetilde{\lambda} + 2\widetilde{\mu} \end{bmatrix}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\mu} \right), \tag{3.21}$$

в котором

$$\begin{gathered} \widetilde{\lambda} = \frac{1}{(1+2\mu k)[1+k(3\lambda+2\mu)]}, \quad \widetilde{\mu} = \frac{\mu}{1+2\mu k}, \\ \widetilde{\lambda} + 2\widetilde{\mu} = \frac{(\lambda+2\mu) + 2\mu k(3\lambda+2\mu)}{(1+2\mu k)[1+k(3\lambda+2\mu)]}. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Таким образом, в этом случае эффективная модель оказывается изотропной упругой средой с параметрами (3.22). Отметим, что на основании соотношений (3.17) и условия (3.18) выполняются неравенства

$$\widetilde{\lambda} < \lambda, \quad \widetilde{\mu} < \mu, \quad \widetilde{\lambda} + 2\widetilde{\mu} < \lambda + 2\mu, \tag{3.23}$$

из которых следует, что скорости распространения продольных и поперечных волн в среде с тремя системами трещин меньше соответствующих скоростей в такой же упругой среде без трещин.

§4. Энергетические исследования

Энергетические исследования подробно проведем для среды с одной системой трещин, перпендикулярных оси z. Аналогичными способами проводятся энергетические исследования в случае одной системы трещин, перпендикулярных оси x или y. Все эти результаты легко могут быть обобщены на случаи двух или трех систем трещин.

Помножим обе части первого, второго и третьего уравнений (1.29) соответственно на $\rho\partial u_x/\partial t$, $\rho\partial u_y/\partial t$, $\rho\partial u_z/\partial t$ и после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(t_{xx}\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(t_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(t_{xz}\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)=\\
=&\frac{\rho}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial u_x}{\partial t}[\widetilde{t}_{xz}]+t_{xx}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\partial x}+t_{xy}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\partial y}+t_{xz}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\partial z},\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(t_{xy}\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(t_{yy}\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(t_{yz}\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)=\\
=&\frac{\rho}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial u_y}{\partial t}[\widetilde{t}_{yz}]+t_{xy}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\partial x}+t_{yy}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\partial z}+t_{yz}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\partial z},\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(t_{xz}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(t_{yz}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(t_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)=\\
=&\frac{\rho}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial u_z}{\partial t}[\widetilde{t}_{zz}]+t_{xz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial x}+t_{yz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial y}+t_{zz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial z}.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

В результате почленного сложения уравнений (4.1) приходим к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial W_k}{\partial t}+\frac{\partial W_p}{\partial t},\tag{4.2}$$

в котором

$$\begin{aligned}
p_x&=t_{xx}\frac{\partial u_x}{\partial t}+t_{xy}\frac{\partial u_y}{\partial t}+t_{xz}\frac{\partial u_z}{\partial t},\\
p_y&=t_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial t}+t_{yy}\frac{\partial u_y}{\partial t}+t_{yz}\frac{\partial u_z}{\partial t},\\
p_z&=t_{xz}\frac{\partial u_x}{\partial t}+t_{yz}\frac{\partial u_y}{\partial t}+t_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial t}
\end{aligned}\tag{4.3}$$

– потоки энергий вдоль осей x, y, z,

$$W_k=\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right]\tag{4.4}$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t}=t_{xx}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\partial x}+t_{xy}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+t_{xz}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)+$$

$$
\begin{aligned}
&+ t_{yy}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\partial y} + t_{yz}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + \\
&+ t_{zz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t}[\widetilde{t}_{xz}] + \frac{\partial u_y}{\partial t}[\widetilde{t}_{yz}] + \frac{\partial u_z}{\partial t}[\widetilde{t}_{zz}].
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Остановимся на исследовании выражения (4.5) и подставим в него скалярные равенства, соответствующие матричному соотношению (3.9). После этой подстановки скорость изменения плотности потенциальной энергии полезно представить равенством

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = \frac{\partial W_{p1}}{\partial t} + \frac{\partial W_{p2}}{\partial t}, \tag{4.6}$$

в котором

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W_{p1}}{\partial t} &= t'_{xx}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\partial x} + t'_{xy}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + t'_{xz}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \\
&+ t'_{yy}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\partial y} + t'_{yz}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + t'_{zz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial z},
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&(t'_{xx}, t'_{yy}, t'_{zz}, t'_{yz}, t'_{xz}, t'_{xy})^{\mathsf{T}} = \\
&= \mathbf{D}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Второе слагаемое в сумме (4.6) будет рассмотрено ниже. Из матричного соотношения (4.8) с учетом формулы (3.8) следует равенство

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^{\mathsf{T}} = \\
&= (\mathbf{A}^{-1} + \widetilde{\mathbf{L}})(t'_{xx}, t'_{yy}, t'_{zz}, t'_{yz}, t'_{xz}, t'_{xy})^{\mathsf{T}}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

В результате подстановки скалярных соотношений, следующих из матричного равенства (4.9), получаем соотношения

$$\frac{\partial W_{p1}}{\partial t} = \frac{\partial W_{p11}}{\partial t} + \frac{\partial W_{p12}}{\partial t}, \tag{4.10}$$

$$
\begin{aligned}
W_{p11} &= \frac{1}{2}\widetilde{a}_{11}{t'}^2_{xx} + \widetilde{a}_{12}t_{xx}t_{yy} + \widetilde{a}_{13}t_{xx}t_{zz} + \widetilde{a}_{14}t_{xx}t_{yz} + \\
&+ \widetilde{a}_{15}t_{xx}t_{xz} + \widetilde{a}_{16}t_{xx}t_{xy} + \frac{1}{2}\widetilde{a}_{22}{t'}^2_{yy} + \widetilde{a}_{23}t_{yy}t_{zz} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
+\widetilde{a}_{24}t_{yy}t_{yz}+\widetilde{a}_{25}t_{yy}t_{xz}+\widetilde{a}_{26}t_{yy}t_{xy}+\frac{1}{2}\widetilde{a}_{33}t_{zz}^2+\\
+\widetilde{a}_{34}t_{zz}t_{yz}+\widetilde{a}_{35}t_{zz}t_{xz}+\widetilde{a}_{36}t_{zz}t_{xy}+\frac{1}{2}\widetilde{a}_{44}t_{yz}^2+\\
+\widetilde{a}_{45}t_{yz}t_{xz}+\widetilde{a}_{46}t_{yz}t_{xy}+\frac{1}{2}\widetilde{a}_{55}t_{xz}^2+\widetilde{a}_{56}t_{xz}t_{xy}+\frac{1}{2}\widetilde{a}_{66}t_{xy}^2,
\end{gathered}
\tag{4.11}
$$

$$
\begin{gathered}
W_{p12}=\frac{1}{2}l_{34}{t'}_{zz}^2+l_{35}{t'}_{zz}t'_{yz}+l_{36}{t'}_{zz}t'_{xz}+\\
+\frac{1}{2}l_{25}{t'}_{yz}^2+l_{26}{t'}_{yz}t'_{xz}+\frac{l_{16}}{2}{t'}_{xz}^2,
\end{gathered}
\tag{4.12}
$$

в которых $\widetilde{a}_{ik}$ – элементы обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. При написании формул (4.12) предполагается, что матрица (3.6) является симметричной и положительно определенной. При этих предположениях обе квадратичные формы (4.11) и (4.12) являются положительно определенными. Формула (4.11) описывает плотность потенциальной энергии упругой среды, а форма (4.12) учитывает дополнительную плотность потенциальной энергии, связанную с наличием в среде разрывов смещений, пропорциональных напряжениям. Выражения для этой формы было получено в работе [11].

Второе слагаемое в равенстве (4.6) представляется соотношением

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W_{p2}}{\partial t}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}[\widetilde{t}_{xz}]+\frac{\partial u_y}{\partial t}[\widetilde{t}_{yz}]+\frac{\partial u_z}{\partial t}[\widetilde{t}_{zz}]-\\
&-\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\partial x}\Big(d_{13}[u_z]'+d_{14}[u_y]'+d_{15}[u_x]'\Big)-\\
&-\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\partial y}\Big(d_{23}[u_z]'+d_{24}[u_y]'+d_{25}[u_x]'\Big)-\\
&-\frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial z}\Big(d_{33}[u_z]'+d_{34}[u_y]'+d_{35}[u_x]'\Big)-\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\Big(d_{43}[u_z]'+d_{44}[u_y]'+d_{45}[u_x]'\Big)-\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\Big(d_{53}[u_z]'+d_{54}[u_y]'+d_{55}[u_x]'\Big)-\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\Big(d_{63}[u_z]'+d_{64}[u_y]'+d_{65}[u_x]'\Big).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Объединяя члены, содержащие скачки смещенний $[u_z]$, $[u_y]$ и $[u_x]$, и используя матричное равенство (3.9), заменим соотношение

(4.13) формулой

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_{p2}}{\partial t} &= \frac{\partial u_x}{\partial t}[\,\widetilde{t}_{xz}\,] + \frac{\partial u_y}{\partial t}[\,\widetilde{t}_{yz}\,] + \frac{\partial u_z}{\partial t}[\,\widetilde{t}_{zz}\,] - \\ &- [u_z]'\left(\frac{\partial t_{zz}}{\partial t} + d_{33}\frac{\partial [u_z]'}{\partial t} + d_{34}\frac{\partial [u_y]'}{\partial t} + d_{35}\frac{\partial [u_x]'}{\partial t}\right) - \\ &- [u_y]'\left(\frac{\partial t_{yz}}{\partial t} + d_{43}\frac{\partial [u_z]'}{\partial t} + d_{44}\frac{\partial [u_y]'}{\partial t} + d_{45}\frac{\partial [u_x]'}{\partial t}\right) - \\ &- [u_x]'\left(\frac{\partial t_{xz}}{\partial t} + d_{53}\frac{\partial [u_z]'}{\partial t} + d_{54}\frac{\partial [u_y]'}{\partial t} + d_{55}\frac{\partial [u_x]'}{\partial t}\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

В полученную формулу (4.14) подставим выражения (1.31) и (3.10) для величин $[u_x]'$, $[u_y]'$, $[u_z]'$, $[\,\widetilde{t}_{xz}\,]$, $[\,\widetilde{t}_{yz}\,]$, $[\,\widetilde{t}_{zz}\,]$ и представим производную $\partial W_{p2}/\partial t$ в виде суммы

$$\frac{\partial W_{p2}}{\partial t} = \frac{\partial W_{p21}}{\partial t} + \frac{\partial W_{p22}}{\partial t}, \tag{4.15}$$

в которой

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_{p21}}{\partial t} &= \frac{\partial u_x}{\partial t}\big(l_{61}u_x + l_{62}u_y + l_{63}u_z\big) + \frac{\partial u_y}{\partial t}\big(l_{51}u_x + l_{52}u_y + l_{53}u_z\big) + \\ &+ \frac{\partial u_z}{\partial t}\big(l_{41}u_x + l_{42}u_y + l_{43}u_z\big),\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_{p22}}{\partial t} &= \frac{\partial u_x}{\partial t}\big(l_{64}t_{zz} + l_{65}t_{yz} + l_{66}t_{xz}\big) + \frac{\partial u_y}{\partial t}\big(l_{54}t_{zz} + l_{55}t_{yz} + l_{56}t_{xz}\big) + \\ &\frac{\partial u_z}{\partial t}\big(l_{44}t_{zz} + l_{45}t_{yz} + l_{46}t_{xz}\big) - \frac{\partial t_{zz}}{\partial t}\big(l_{31}u_x + l_{32}u_y + l_{33}u_z\big) - \\ &\frac{\partial t_{yz}}{\partial t}\big(l_{21}u_x + l_{22}u_y + l_{23}u_z\big) - \frac{\partial t_{xz}}{\partial t}\big(l_{11}u_x + l_{12}u_y + l_{13}u_z\big) - \\ &- \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big\{d_{33}[u_z]'^2 + 2d_{34}[u_y]'\,[u_z]' + 2d_{35}[u_x]'\,[u_z]' + d_{44}[u_y]'^2 + \\ &+ 2d_{45}[u_x]'\,[u_y]' + d_{55}[u_x]'^2\Big\}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Величина $\partial W_{p21}/\partial t$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} l_{61} & l_{62} & l_{63} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

характеризующей зависимость скачков напряжений от смещений. В случае, когда матрица (4.18) – симметричная и положительно определенная, для этой части плотности потенциальной энергии W_{p21} справедливо соотношение

$$W_{p21} = \frac{l_{61}}{2}u_x^2 + l_{62}u_xu_y + l_{63}u_xu_z + \frac{l_{52}}{2}u_y^2 + l_{53}u_yu_z + \frac{l_{43}}{2}u_z^2. \quad (4.19)$$

Тождественные преобразования формулы (4.17) приводят к равенству

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_{p22}}{\partial t} &= \Big[(l_{33}+l_{44})t_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial t} + (l_{32}+l_{54})t_{zz}\frac{\partial u_y}{\partial t} + (l_{31}+l_{64})t_{zz}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \\ &+ (l_{23}+l_{45})t_{yz}\frac{\partial u_z}{\partial t} + (l_{22}+l_{55})t_{yz}\frac{\partial u_y}{\partial t} + (l_{21}+l_{65})t_{yz}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \\ &+ (l_{13}+l_{46})t_{xz}\frac{\partial u_z}{\partial t} + (l_{12}+l_{56})t_{xz}\frac{\partial u_y}{\partial t} + (l_{11}+l_{66})t_{xz}\frac{\partial u_x}{\partial t}\Big] - \\ &- \frac{\partial}{\partial t}\Big[t_{zz}\big(l_{31}u_x + l_{32}u_y + l_{33}u_z\big) + t_{yz}\big(l_{21}u_x + l_{22}u_y + l_{23}u_z\big) + \\ &+ t_{xz}\big(l_{11}u_x + l_{12}u_y + l_{13}u_z\big) + \frac{d_{33}}{2}\big([u_z]'\big)^2 + \frac{d_{44}}{2}\big([u_y]'\big)^2 + \\ &+ \frac{d_{55}}{2}\big([u_x]'\big)^2 + d_{34}[u_y]'[u_z]' + d_{35}[u_x]'[u_z]' + d_{45}[u_x]'[u_y]'\Big].\end{aligned} \quad (4.20)$$

Если предположить выполнение соотношения

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} l_{66} & l_{56} & l_{46} \\ l_{65} & l_{55} & l_{45} \\ l_{64} & l_{54} & l_{44} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

между матрицами, определяющими величину $\partial W_{p2}/\partial t$, и использовать равенства (3.9), (3.10) и (4.8), то первое слагаемое в формуле (4.20) обратится в нуль и придем к окончательному выражению

$$\begin{aligned}W_{p22} &= \frac{d_{33}}{2}\big([u_z]'\big)^2 + \frac{d_{44}}{2}\big([u_y]'\big)^2 + \frac{d_{55}}{2}\big([u_x]'\big)^2 + \\ &+ d_{34}[u_y]'[u_z]' + d_{45}[u_x]'[u_y]' + d_{35}[u_x]'[u_z]' - \\ &- [u_z]'t'_{zz} - [u_y]'t'_{yz} - [u_x]'t'_{xz}\end{aligned} \quad (4.22)$$

для величины W_{p22}.

Таким образом, потенциальная энергия эффективной модели состоит из упругой энергии (4.11) и трех дополнительных слагаемых (4.12), (4.19) и (4.22), определяемых матрицей (3.6), матрицей (4.18) и матрицами, входящими в соотношение (4.21). В случае симметрии матриц (3.6) и (4.8), выполнения условия (4.21), а также при энергетической изолированности среды

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0 \tag{4.23}$$

при $z = 0$, $z = H$ и при x, $y \to \pm\infty$ суммарная энергия среды, согласно уравнению (4.2), не зависит от времени и имеет место равенство

$$\iiint\limits_V (W_p + W_k) dV = \text{const}, \tag{4.24}$$

в которой интегрирование проводится по всему объему среды V. Отметим, что указанные условия постоянства энергии сводятся к тому, что в элементы, входящие в матрицы (3.6) и (4.8), являются симметричными относительно второй диагонали матрицы $\mathbf{L}$, а остальные элементы оказываются антисимметричными относительно той же диагонали. При нарушении этих условий в модели возникает поглощение или самовозбуждение. В случае, когда скачки смещений зависят от средних смещений, а скачки напряжений определяются напряжениями, возникающие поглощение и самовозбуждение гасят друг друга только при выполнении условия (4.21).

Литература

1. Л. А. Молотков, *О эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных систем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
2. Л. А. Молотков, *О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 219–243.
3. L. J. Pyrak-Nolte, L. R. Myer, N. G. W. Cook, *Transmission of seismic waves across single natural fractures.* — J. Geophys. Res. **95,** No. B6 (1990), 8617–8638.
4. J. A. Hudson, *Overall properties of heterogeneous materials.* — Geophys. J. Int. **107** (1991), 505–511.
5. S. R. Tod, J. A. Hudson, *Continuity conditions of a fault consisting of obliquely aligned cracks.* — Geophys. J. Int. **144** (2001), 679–684.
6. M. Schoenberg, *Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip.* — Geophys. Prosp. **31** (1983), 265–292.

7. M. Schoenberg, *Elastic wave behavior arcoss linear slip interfaces.* — J. Acoust. Soc. Am. **68**, No. 5 (1980), 1516–1521.
8. C-J. Hsu, M. Schoenberg, *Elastic waves through a simulated fractured medium.* — Geophysics **58**, No. 7 (1983), 964–977.
9. M. Schoenberg, J. Douma, *Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks.* — Geophys. Prospecting **36** (1988), 571–590.
10. M. Schoenberg, F. Muir, *A calculus for finely layered anisotropic media.* — Geophysics **54**, No. 6 (1980), 581–589.
11. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели трещиноватой среды с трещинами, описываемыми поверхностями разрывов смещений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 118–137.
12. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* СПб, 2001, 348 с.
13. A. Bakulin, V. Grechka, I. Tsvankin, *Estimation of fracture parametric from reflection seismic data – Part I: HTI model due to a single fracture set.* — Geophysics **65**, No. 6 (2000), 1788–1802.
14. A. Bakulin, V. Grechka, I. Tsvankin, *Estimation of fracture parametric from reflection seismic data – Part II: Fractured models with orthorhombic symmetry.* — Geophysics **65**, No. 6 (2000), 1803–1817.
15. A. Bakulin, V. Grechka, I. Tsvankin, *Estimation of fracture parametric from reflection seismic data – Part III: Fractured models with monoclinic symmetry.* — Geophysics **65**, No. 6 (2000), 1818–1830.

Molotkov L. A. On wave propagation in the elastic medium intersected by systems of parallel fractures.

The elastic anisotropic medium intersected by systems of parallel fractures is investigated. Every fracture is considered as a plane boundary with jumps of displacements and stresses and these jumps are linear functions of displacements and stresses averaged on the boundary. For this medium the effective model is constructed by means of the method of matrix averaging. The equations of this model describe wave propagation in the given medium and are more complicate than the equations of the elasticity theory. In particular cases the obtained equations are converted to the equations of elastic media. On the basis of the equations of the effective model, the expressions for densities of the kinetic and potential energies are derived, and the conditions of absoption in the medium are established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 января 2002 г.