Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

М. А. Лялинов, С. В. Полянская

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ТОНКИХ КИРАЛЬНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

1. Введение

Согласно традиционной электромагнитной теории электрическая поляризация и намагничивание рассматривались как два отдельных явления. Однако, существуют среды, в которых электрическая поляризация может изменять намагничивание, и наоборот. Такие среды называются биизотропными. Частным случаем биизотропных сред является киральная среда, для которой выполняются материальные сотношения [4, гл. 2]

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + i\xi_c\vec{B}, \quad \vec{H} = i\xi_c\vec{E} + \vec{B}/\mu, \tag{1}$$

где ξ_c – киральный параметр, μ и ϵ – магнитная и диэлектрическая проницаемости. В оптических диапозонах частот эффект киральности (невзаимности) известен довольно давно. Однако, глубокое изучение свойств киральной среды в радиоволновом диапозоне ведется дишь последние два десятилетия, когда появились искусственные киральные материалы [7, 8].Такие материалы нашли широкое применение во многих областях: при создании новых технических устройств, в качестве преобразователей поляризации, а также для создания неотражающих поверхностей. Поэтому резко возрос интерес к изучению дифракции электромагнитных волн в киральной среде. При исследовании электродинамических свойств киральных сред обнаружены различные возможности их использования. Важным шагом является нахождение граничных условий на поверхности тонкого кирального слоя. Известна формула Грина для киральной среды [8], но она намного сложнее формулы Грина для свободного простанства. Поэтому хотелось бы получить граничные условия на поверхно-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, гранты 01-01-00218 и 99-02-16844.

сти киральной среды, позволяющие исключить рассмотрение поля в ней. Применение обобщенных импедансных граничных условий кратко рассматривается в статье [9]. Недавно были получены достаточно простые граничные условия для теоретического моделирования тонкого бесконечного кирального слоя [1], которые мы и будем использовать.

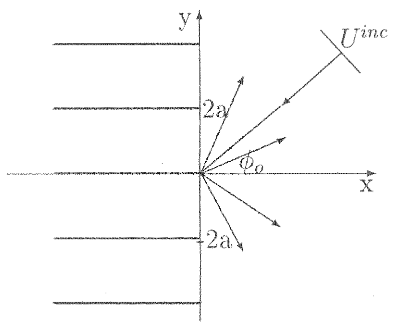

Рис. 1.

В настоящей статье рассматривается дифракция нормально падающей плоской волны на полубесконечную решетку, состоящую из тонких киральных полуплоскостей. Соотношения между компонентами электромагнитного поля выражаются соотношениями (1). Здесь и далее имеется ввиду случай гармонической зависимости полей от времени вида $e^{-i\omega t}$. Компоненты электромагнитного поля выражаются через компоненты H_z и E_z, котоые удовлетворяют уравнению Гельмгольца в свободном пространстве, граничным условиям, условию Мейкснера на ребре, условию излучения на бесконечности и условию квазипериодичности (условию Флоке). Используя простейшее преобразование подобия, задачу можно свести к двум скалярным задачам, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца и граничным условиям, в которые входят компоненты поля и их нормальные производные. С помощью представления решения в виде разложения по плоским волнам задачу можно свести к скалярной задаче Римана–Гильберта, решение которой находится явно. Исследование поведения дифрагированного поля при разных углах падения плоской волны и при разных параметрах решетки дает достаточно полную картину поведения электромагнитных дифракционных волн при отражении от решетки.

2. Постановка задачи

Пусть на решетку, образованную киральными полуплоскостями $y = (2m+1)a$, $x < 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, падает плоская волна, распространяющаяся в полуплоскости $x > 0$. Требуется найти поле в этой полуплоскости, т.е. поле зеркально отраженной волны и поля всех дифракционных волн, возникающие в результате дифракции падающей волны на решетке. Для этого достаточно найти E_z и H_z компоненты электромагнитного поля, а остальные выражаются через них посредством уравнений Максвелла. Пусть падающая плоская волна имеет вид

$$\begin{pmatrix} \eta_0 H_z^{\rm inc} \\ E_z^{\rm inc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_z \\ e_z \end{pmatrix} \exp\{-ik_0(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)\}, \tag{2}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – волновое число и $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ – импеданс свободного пространства, (H_z, E_z) – z-компоненты электромагнитного поля. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant \phi_0 \leqslant \pi/2$. Компоненты дифракционного поля должны удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta(\eta_0 H_z) + k_0^2(\eta_0 H_z) = 0, \\ \Delta E_z + k_0^2 E_z = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Всюду, кроме элементов решетки, полное поле непрерывно, а на полупрямых, моделирующих тонкие киральные слои, выполнено граничное условие:

$$\begin{pmatrix} \partial_y(H_z\eta_0) \\ \partial_y(E_z) \end{pmatrix}_{|y=\pm 0+2dm} = B\begin{pmatrix} [H_z\eta_0] \\ [E_z] \end{pmatrix}, \quad x < 0, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \tag{4}$$

где $[f] = f(x, +0) - f(x, -0)$, а B – матрица

$$B = \frac{1}{2d}\frac{k_0 k^3 \eta\eta_0}{k_+^2 k_-^2}\begin{pmatrix} \eta_0^{-2} & i\xi_c\eta_0^{-1} \\ -i\xi_c\eta_0^{-1} & \eta_c^{-2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где ξ_c – киральный параметр, $2d$ – толщина кирального слоя, $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, $\eta_c = \eta/\sqrt{(1+\eta^2\xi_c^2)}$, $k_\pm = \pm\omega\mu\xi_c + \sqrt{k^2 + (\omega\mu\xi_c)^2}$. Поскольку рассматриваемая структура переходит сама в себя при сдвиге вдоль оси OY, можно ограничиться рассмотрением поля в пределах полосы

$$-a < y < a, \tag{6}$$

на границах которой при $y = -a$ и $y = a$ выполняются условия Флоке

$$\begin{gathered} H_z\eta_0(x,a) = \varkappa H_z\eta_0(x,-a), \quad E_z(x,a) = \varkappa E_z(x,-a), \\ \frac{\partial H_z\eta_0}{\partial y}(x,a) = \varkappa\frac{\partial H_z\eta_0}{\partial y}(x,-a), \quad \frac{\partial E_z}{\partial y}(x,a) = \varkappa\frac{\partial E_z}{\partial y}(x,-a), \end{gathered} \tag{7}$$

где $\varkappa = \exp(2iak_0\sin\phi_0)$. Компоненты поля, кроме того, должны удовлетворять условию Мейкснера на ребрах решетки и условию излучения на бесконечности. Последнее условие заключается в том, что рассеянное поле при $|x| \to \infty$ должно содержать только уходящие волны. В граничном условии (4) компоненты H_z и E_z оказываются связанными посредством матрицы B. Для разделения задачи на две скалярные введем две новые неизвестные функции U_1 и U_2

$$\begin{pmatrix} H_z\eta_0 \\ E_z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

причем матрица преобразования Q является унитарной матрицей (2×2) для вещественных значений параметров и выбрана так, чтобы диагонализовать матрицу перехода B

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^*, \tag{9}$$

где λ_1 и λ_2 – собственные числа матицы B, котоые имеют явные выажения

$$\lambda_j = \frac{1}{d}\,\frac{k_0^2k^3\eta_0\eta}{2k_+^2k_-^2}\,[\eta_0^{-2} + \eta_c^{-2} - (-1)^j\delta], \quad j = 1,2,$$

$$\delta = \sqrt{(\eta_0^{-2} - \eta_c^{-2})^2 + 4\xi_c^2\eta_0^{-2}}.$$

Матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{2i\xi_c/\eta_0}{\sqrt{(\eta_c^{-2}-\eta_0^{-2}+\delta)^2+4\eta_0^{-2}\xi_c^2}} & \dfrac{2i\xi_c/\eta_0}{\sqrt{(\eta_c^{-2}-\eta_0^{-2}-\delta)^2+4\eta_0^{-2}\xi_c^2}} \\ \dfrac{\eta_c^{-2}-\eta_0^{-2}+\delta}{\sqrt{(\eta_c^{-2}-\eta_0^{-2}+\delta)^2+4\eta_0^{-2}\xi_c^2}} & \dfrac{\eta_c^{-2}-\eta_0^{-2}-\delta}{\sqrt{(\eta_c^{-2}-\eta_0^{-2}\delta)^2+4\eta_0^{-2}\xi_c^2}} \end{pmatrix}.$$

Важно отметить, что для того, чтобы поставленная задача имела единственное решение, должно выполняться условие $\mathfrak{J}(\lambda_i) \leqslant 0$ [4]. Однако, как показывают вычисления, при малых значениях параметра киральности это условие всегда выполнено. После введения новых переменных представление (2) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} U_1^{\rm inc} \\ U_2^{\rm inc} \end{pmatrix} = Q^* \begin{pmatrix} h_z \\ e_z \end{pmatrix} e^{-ik_0(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)}.$$

Для упрощения выражений в последующих формулах будем записывать U_i^{inc} как

$$U_i^{\rm inc} = v_i e^{-ik_0(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)}, \tag{10}$$

где

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = Q^* \begin{pmatrix} h_z \\ e_z \end{pmatrix}.$$

Граничные условия для неизвестных U_i будут иметь вид

$$\left.\frac{\partial U_i(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm 0} = \lambda_i [U_i(x,y)]\big|_{y=0}, \quad x > 0. \tag{11}$$

Условие Флоке (7) перепишутся в виде

$$\begin{cases} U_i(x,a) = \varkappa U_i(x,-a) \\ \frac{\partial U_i(x,a)}{\partial y} = \varkappa \frac{\partial U_i(x,-a)}{\partial y} \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

Поскольку поле при $x > 0$ непрерывно, то имеем

$$[U_i]_{y=0} = 0, \quad x > 0. \tag{13}$$

Учитывая, что частная производная $\frac{\partial U_i}{\partial y}$ при $x > 0$ непрерывна, а при $x < 0$ из граничного условия (11) имеем $\left[\frac{\partial U_i}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$, получаем еще одно условие:

$$\left[\frac{\partial U_i(x,y)}{\partial y}\right]_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$

Итак, мы имеем 2 отдельные задачи для двух скалярных функций U_i, $i = 1, 2$. В дальнейшем индекс 'i' будем опускать, если это не приводит к неоднозначности.

3. Решение задачи

3.1. Сведение к задаче Римана–Гильберта

Наша цель состоит в отыскании неизвестной скалярной функции U, удовлетворяющей условиям (11)–(14). Предположим, что полное поле представимо в виде разложения по плоским волнам

$$U(x,y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\beta(\alpha)}(A(\alpha)e^{i\beta(\alpha)y} + B(\alpha)e^{-i\beta(\alpha)y})d\alpha + U^{inc}(x,y), \;\; 0 < y < a,$$

$$U(x,y) = \tag{15}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\beta(\alpha)}(C(\alpha)e^{i\beta(\alpha)y} + D(\alpha)e^{-i\beta(\alpha)y})d\alpha + U^{inc}(x,y), \;\; -a < y < 0,$$

где $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$ – неизвестные спектальные функции. Волновое число k_0 есть комплексная величина с малой положительной мнимой частью, $k_0 = k_0' + ik_0''$, $k_0'' > 0$. Функция $\beta(\alpha)$ определена равенством $\beta(\alpha) = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2}$ и для ее однозначности в плоскости с разрезами (рис. 2) возьмем ту ее ветвь, для которой $\beta(0) = k_0$.

Принимая во внимание условие Мейкснера для полного поля, поребуем, чтобы спектральные функции имели асимптотику

$$A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha) \sim O(\alpha^{-\delta}), \quad \alpha \to \infty, \quad \delta > 0,$$

если k_0 вещественно. Интегральное представление решения (15) удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Подставляя его в граничные условия (11)–(14), получим уравнения для нахождения спектральных функций. Из условия (14) имеем

$$A(\alpha) - B(\alpha) = C(\alpha) - D(\alpha). \tag{16}$$

Подставляя интегральное представление в условия Флоке (12), получим

$$\begin{aligned} A(\alpha)e^{i\beta(\alpha)a} + B(\alpha)e^{-i\beta(\alpha)a} &= \varkappa(C(\alpha)e^{-i\beta(\alpha)a} + D(\alpha)e^{i\beta(\alpha)a}), \\ A(\alpha)e^{i\beta(\alpha)a} - B(\alpha)e^{-i\beta(\alpha)a} &= \varkappa(C(\alpha)e^{-i\beta(\alpha)a} - D(\alpha)e^{i\beta(\alpha)a}). \end{aligned} \tag{17}$$

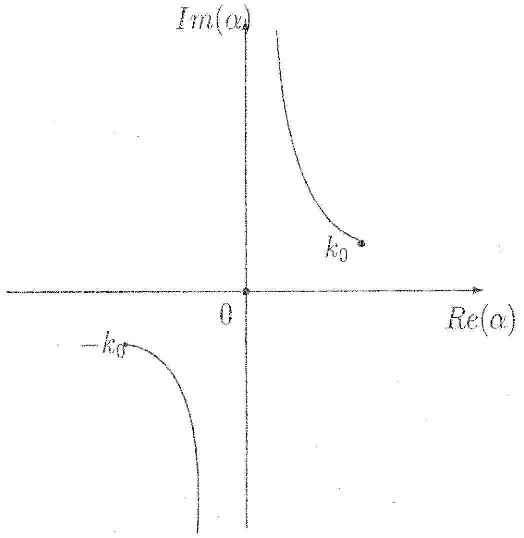

Рис. 2. Разрезы для функции $\beta(\alpha)$.

Из условия непрерывности поля (13) для $x > 0$ следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\beta(\alpha)}(A(\alpha) + B(\alpha) - C(\alpha) - D(\alpha))d\alpha = 0. \tag{18}$$

Из граничного условия (11) для $x < 0$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\beta(\alpha)}(i\beta(\alpha)(A(\alpha) - B(\alpha)) - \lambda(A(\alpha) + B(\alpha) - C(\alpha) - D(\alpha))d\alpha = F^{\text{inc}}(x), \tag{19}$$

где $F^{\text{inc}}(x) = \lambda[U^{\text{inc}}]_{y=0} - \left.\frac{\partial U^{\text{inc}}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = ik_0 v \sin\phi_0 e^{-ik_0\cos\phi_0}$. Пользуясь формулами (16) и (17), выразим спектральные функции $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$ через $A(\alpha)$

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= A(\alpha)\left(\frac{1 - e^{2i\beta(\alpha)a}/\varkappa}{1 - e^{-2i\beta(\alpha)a}/\varkappa}\right), \\ C(\alpha) &= A(\alpha)e^{2i\beta(\alpha)a}/\varkappa, \\ D(\alpha) &= A(\alpha)\left(\frac{e^{-2i\beta(\alpha)a}/\varkappa - 1/\varkappa^2}{1 - e^{-2i\beta(\alpha)a}/\varkappa}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Для нахождения функции $A(\alpha)$ подставим выражения (20) в уравнения (18) и (19). После упрощения полученных выражений получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\beta(\alpha)} A(\alpha)P(\alpha)d\alpha = 0, \quad x > 0, \tag{21}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\beta(\alpha)} A(\alpha)Q(\alpha)d\alpha = ik_0 v \sin\phi_0 e^{-ik_0\cos\phi_0} \quad x < 0, \tag{22}$$

где

$$Q(\alpha) = \beta(\alpha)P(\alpha)\left(\frac{\sin(2\beta(\alpha)a)}{2\cos(2\beta(\alpha)a) - 2\cos(2\beta_0 a)} - \frac{\lambda}{\beta(\alpha)}\right),$$

$$P(\alpha) = 2(1 - e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a}), \quad \beta_0 = k_0\sin(\phi_0),$$

Мы получили систему парных интегральных уравнений. Введем функции Φ^+ и Φ^- следующим образом:

$$\frac{A(\alpha)}{\beta(\alpha)} P(\alpha) = \Phi^+(\alpha), \frac{A(\alpha)}{\beta(\alpha)} Q(\alpha) = \frac{\Phi^-(\alpha)c_0}{\Phi^-(\alpha_0)(\alpha-\alpha_0)}, \tag{23}$$

где $\alpha_0 = -k\cos\phi_0$. Замкнув контур в нижней полуплоскости, подсчитаем интеграл (22) по теореме о вычетах, учитывая, что подынтегральная функция имеет в нижней полуплоскости α один полюс в точке α_0. Получим

$$(-2\pi i)\frac{\Phi^-(\alpha)c_0 e^{-ik_0x\cos\phi_0}}{\Phi^-(\alpha_0)}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} = ik_0 v\sin\phi_0 e^{-ik_0x\cos\phi_0},$$

откуда

$$c_0 = \frac{-k_0 v\sin\phi_0}{2\pi}.$$

Из уравнений (23) имеем краевое условие для кусочно-аналитической функции

$$\Phi^+(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}\frac{c_0}{(\alpha-\alpha_0)}\frac{\Phi^-(\alpha)}{\Phi^-(\alpha_0)}, \quad -\infty < \alpha < \infty. \tag{24}$$

В результате необходимо найти две ограниченные аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции $\Phi^\pm$, предельные значения которых на вещественной оси удовлетворяют краевому условию (24).

3.2. Решение задачи Римана–Гильберта

Функция $\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$ является мероморфной и четной по α,

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} = -\frac{2i}{\beta(\alpha)}\,K(\alpha,\lambda),$$

где

$$K(\alpha,\lambda) = \frac{(-i/2)}{\left(\frac{\lambda}{\beta(\lambda)} - \frac{\sin(2\beta(\alpha)a)}{2(\cos(2\beta(\alpha)a)-\cos(2\beta_0 a))}\right)}. \tag{25}$$

Можно легко показать, что $K(\alpha,\lambda) \underset{\alpha\to\pm\infty}{\to} 1$. Представим $K(\alpha,\lambda)$ в виде произведения

$$K(\alpha,\lambda) = K^{+}(\alpha,\lambda)K^{-}(\alpha,\lambda),$$

где $K^{\pm}$ – функции,регулярные в верхней и нижней полуплоскости соответственно, находятся по формулам

$$K^{\pm}(\alpha,\lambda) = \exp\left\{\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\log K(\alpha',\lambda)}{(\alpha'-\alpha)}\,d\alpha'\right\}.$$

Используя такое представление, (24) можно переписать в виде

$$\Phi^{+}(\alpha) = \frac{(-2i)}{\beta(\alpha)}K^{+}(\alpha,\lambda)K^{-}(\alpha,\lambda)\frac{c_0}{(\alpha-\alpha_0)}\,\frac{\Phi^{-}(\alpha)}{\Phi^{-}(\alpha_0)}, \quad -\infty<\alpha<\infty. \tag{26}$$

Поскольку $Q(\alpha)\sim\mathcal{O}(\alpha)$, $\alpha\to\infty$, то для функций $\Phi^{\pm}$ имеем оценки

$$\Phi^{+}(\alpha)\sim\mathcal{O}(\alpha^{-1-\delta}) \quad \text{и} \quad \Phi^{-}(\alpha)\sim\mathcal{O}(\alpha^{1-\delta}), \quad \alpha\to\infty.$$

Используя стандартную процедуру решения задачи Римана–Гильберта, из формулы (26) получаем выражение для $\Phi^{\pm}$

$$\Phi^{+}(\alpha) = \frac{-2ic_0}{\sqrt{k_0-\alpha_0}}\,\frac{K^{-}(\alpha_0,\lambda)K^{+}(\alpha,\lambda)}{(\alpha-\alpha_0)\sqrt{k_0+\alpha}},$$

$$\frac{\Phi^{-}(\alpha)}{\Phi^{-}(\alpha_0)} = \frac{K^{-}(\alpha_0,\lambda)\sqrt{k_0-\alpha}}{K^{-}(\alpha,\lambda)\sqrt{k_0-\alpha_0}},$$

откуда

$$A(\alpha) = (-2ic_0)\frac{\sqrt{k_0-\alpha}}{P(\alpha)}\,\frac{K^{-}(\alpha_0,\lambda)K^{+}(\alpha,\lambda)}{(\alpha-\alpha_0)\sqrt{k_0-\alpha_0}}.$$

Вычислив значения спектральных функций, выпишем решение задачи (15)

$$U(x,y) = \frac{vik_0 \sin\phi_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x} K^+(\alpha,\lambda) K^-(\alpha_0,\lambda)}{\sqrt{k_0+\alpha}\sqrt{k_0-\alpha_0}\,(\alpha-\alpha_0)} \times \tag{27}$$

$$\times \left[\frac{e^{i\beta y}}{1-e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a}} + \frac{e^{-i\beta y}}{1-e^{-2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a}} \right] d\alpha + U^{inc}(x,y), \quad 0<y<a,$$

и

$$U(x,y) = \frac{vik_0 \sin\phi_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x} K^+(\alpha,\lambda) K^-(\alpha_0,\lambda)}{\sqrt{k_0+\alpha}\sqrt{k_0-\alpha_0}\,(\alpha-\alpha_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a} e^{i\beta y}}{1-e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a}} + \frac{e^{-2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a} e^{-i\beta y}}{1-e^{-2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a}} \right] d\alpha +$$

$$+U^{inc}(x,y), \quad -a<y<0.$$

Полученное решение единственно в искомом классе функций.

3.3. Исследование полученного решения

Рассмотрим полупространство $x>0$ и представим решение в виде разложения по плоским волнам, уходящим от решетки. Подынтегральная функция при $0<y<a$ имеет в верхней полуплоскости лишь полюса и нули. Второй интеграл при $-a<y<0$ рассматривается аналогично. Поэтому можно воспользоваться теоремой о вычетах и найти новое представление решения нашей задачи. Для нахождения полюсов подынтегрального выражения преобразуем функцию $K(\alpha,\lambda)$

$$K(\alpha,\lambda) = \Omega(\alpha) K_1(\alpha,\lambda),$$

где

$$K_1(\alpha,\lambda) = \frac{-\sin(2\beta(\alpha))}{\frac{\lambda}{\beta(\alpha)} 2(\cos(2\beta(\alpha)a) - \cos(2\beta_0 a)) - \sin(2\beta(\alpha)a)},$$

$$\Omega(a) = \frac{[1-e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a}][1-e^{2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a}]}{[1-e^{4i\beta(\alpha)a}]}.$$

Рассмотрим отдельно нули и полюса функции $\Omega(\alpha)$. Нули этой функции находятся в точках $\pm\frac{\pi}{a}b_n$, $b_n=\sqrt{q^2-(\eta+n)^2}$, где $q=\frac{k_0 a}{\pi}$ – частотный параметр решетки, $\eta = q\sin\phi_0$, $n\in\mathbb{Z}$, а полюса

– в точках $\pm\frac{\pi}{a}\gamma_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $\gamma_n = \sqrt{q^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2}$. Дифракционные волны характеризуются углами ϕ_n, которые вводятся с помощью соотношения

$$q(\sin\phi_n - \sin\phi_0) = n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{28}$$

тогда $b_n = q\cos\phi_n$. Функция $\Omega(\alpha)$ была исследована в [2], и ее факторизация известна

$$\Omega(\alpha) = \Omega^+(\alpha)\Omega^-(\alpha),$$

$$\Omega^-(\alpha) = \Omega^+(-\alpha) = \sqrt{q\Omega(0)}\,\frac{1 - \frac{\alpha'}{b_0}}{\sqrt{q - \alpha'}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1 - \frac{\alpha'}{b_n}\right)\left(1 - \frac{\alpha'}{b_{-n}}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha'}{\gamma_n}\right)}, \tag{29}$$

где безразмерная переменная $\alpha' = \frac{\alpha a}{\pi}$. Используя такое представление, запишем функции $K^\pm$ в виде

$$K^+(\alpha, \lambda) = \Omega^+(\alpha)K_1^+(\alpha, \lambda) = \frac{\Omega(\alpha)}{\Omega^-(\alpha)}\,K_1^+(\alpha, \lambda),$$

$$K^-(\alpha, \lambda) = \Omega^-(\alpha)K_1^-(\alpha, \lambda),$$

где функции $K_1^\pm$, регулярные в верхней и нижней полуплоскости соответственно, находятся аналогично функциям $K^\pm$ по формулам

$$K_1^\pm(\alpha, \lambda) = \exp\left\{\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\log K_1(\alpha', \lambda)}{(\alpha' - \alpha)}\,d\alpha'\right\}.$$

После некоторых упрощений формулы (27) для $0 < y < a$ имеем

$$U(x, y) =$$
$$= \frac{vik_0\sin\phi_0}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\alpha x}}{\sqrt{k_0 + \alpha}}\,\frac{K^-(\alpha_0, \lambda)}{\sqrt{k_0 - \alpha_0}\,(\alpha - \alpha_0)}\,\frac{K_1^+(\alpha, \lambda)}{[1 - e^{4i\beta(\alpha)a}]}\,\frac{1}{\Omega_-(\alpha)}\times$$
$$\times\,[(1 - e^{-2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a})e^{i\beta y} - e^{-2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a})(1 - e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a})e^{-i\beta y}]d\alpha +$$
$$+\,U^{\text{inc}}(x, y). \tag{30}$$

и аналогично для $-a < y < 0$

$$U(x, y) =$$

$$= \frac{vik_0 \sin\phi_0}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{\sqrt{k_0+\alpha}} \frac{K^-(\alpha_0,\lambda)}{\sqrt{k_0-\alpha_0}\,(\alpha-\alpha_0)} \frac{K_1^+(\alpha,\lambda)}{[1-e^{4i\beta(\alpha)a}]} \frac{1}{\Omega_-(\alpha)}\times$$

$$\times[e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a}(1-e^{2i(\beta(\alpha)+\beta_0)a})e^{i\beta y}-$$

$$-e^{-4i(\beta(\alpha)+\beta_0)a}(1-e^{2i(\beta(\alpha)-\beta_0)a})e^{-i\beta y}]d\alpha + U^{\mathrm{inc}}(x,y).$$

Воспользуемся выражением для $\Omega^\pm$ (29) и рассмотрим сначала случай $0 < y < a$. Очевидно, что полюсами подынтегрального выражения в (30) являются лишь нули функции $\Omega^-(\alpha)$, поскольку функция $\frac{K_1^+(\alpha,\lambda)}{[1-e^{4i\beta(\alpha)a}]}$ полюсов в верхней полуплоскости не имеет. Поэтому полюсами подынтегральной функции при $x > 0$ будут $\alpha_n = \frac{\pi}{a}\, b_n$, $n = \pm1, \pm2, \dots,$ и $\frac{\pi}{a}\, b_0$. Интеграл (30) можно выразить в виде ряда вычетов в этих полюсах. Случай $-a < y < 0$ сводится к случаю $0 < y < a$. При $x > 0$ получаем

$$U(x,y) = v\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n e^{ik_0\cos\phi_n x - ik_0 \sin\phi_n y} + U^{\mathrm{inc}}, \qquad (31)$$

где

$$\delta_0 = \frac{(1-\cos\phi_0)}{(1+\cos\phi_0)}\, e^{4ib_0\ln(2)}\times$$

$$\times[K_1^-(\alpha_0,\lambda)]^2 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{b_0}{b_m}\right)\left(1+\frac{b_0}{b_{-m}}\right)\left(1-\frac{b_0}{\gamma_m}\right)}{\left(1-\frac{b_0}{b_m}\right)\left(1-\frac{b_0}{b_{-m}}\right)\left(1+\frac{b_0}{\gamma_m}\right)},$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{(1-\cos\phi_n)(1-\cos\phi_0)}{(1+\cos\phi_n)(1+\cos\phi_0)}}\, 2e^{2i(b_0+b_n)\ln(2)}\times$$

$$\times\frac{K_1^-(\alpha_0,\lambda)K_1^+\left(\frac{\pi}{a}\, b_n,\lambda\right)}{\left(1-\frac{b_n}{b_0}\right)\left(1+\frac{b_0}{b_n}\right)} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq\pm n}}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{b_0}{b_m}\right)\left(1+\frac{b_0}{b_{-m}}\right)\left(1-\frac{b_n}{\gamma_m}\right)}{\left(1-\frac{b_n}{b_m}\right)\left(1-\frac{b_n}{b_{-m}}\right)\left(1+\frac{b_0}{\gamma_m}\right)},$$

$$n = \pm1, \pm2, \dots,$$

Полученные коэффициенты δ_n являются комплексными амплитудами дифракционных волн и называются дифракционными коэффициентами. Дифракционный коэффициент δ_0 соответствует основной волне, направление распространения которой при $x > 0$

совпадает с направлением распространения зеркально отраженной волны. Коэффициенты δ_n, $n \neq 0$ соответствуют плоским волнам, распространяющимся под углами ϕ_n к решетке, если эти углы вещественны. Направление распространения таких волн зависит от угла падения ϕ_0, номера n и частотного параметра решетки q. Если угол ϕ_n – комплексная величина, то соответствующая волна является неоднородной плоской волной, экспоненциально убывающей при $x \to \infty$. Формулы (31) показывают, что в случае распространения падающей волны вдоль оси OX все коэффициенты δ_n обащаются в нуль. Это означает, что волна без какого-либо возмущения приходит в решетку, не испытывая отражения от плоскости $x = 0$, и никаких дифракционных волн нет.

Перейдем теперь от переменных U_i непосредственно к компонентам поля H_z и E_z

$$\begin{pmatrix} \eta_0 H_z \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}U_1 + q_{12}U_2 \\ q_{21}U_1 + q_{22}U_2 \end{pmatrix},$$

где (q_{ij}) – элементы матрицы Q, а U_i находятся по формуле (31). Основной трудностью в вычислении компонент поля является нахождение функций $K_1^{\pm}$, поскольку они представлены слабо сходящимися интегралами. Однако, используя процедуру, предложенную в [5], можно функции $K_1^{\pm}$ представить быстро сходящимися интегралами, и с высокой степенью точности подсчитать их значения.

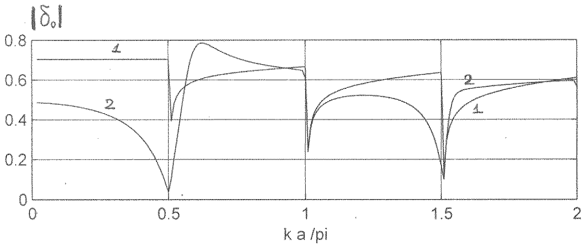

Рис. 3.

На рис. 3 представлена зависимость абсолютных значений коэффициента δ_0 от частотного параметра решетки q при угле падения плоской волны 80 градусов. Для сравнения со случаем

$\lambda_i = 0$, соответствующим дифракции на идеально проводящей решетке, показаны два графика: сплошной линией 1 представлен график для случая решетки, составленной из киральных полуплоскостей, 2-ой линией – для идеального случая. С увеличением угла падения наблюдается увеличение амплитуды основной волны. И хотя эффект киральности затрагивается во многих работах [6], решение данной задачи до сих пор не было исследовано. Пусть собственные числа матрицы B $\lambda_i \to 0$. При этом условии $K_1^{\pm} \to 1$, и наше решение (31) совпадает с ранее полученным решением задачи дифракции на решетке, составленной из тонких идеальных полуплоскостей. Однако, наличие тонких киральных слоев в решетке усложняет задачу, и ее решение существенным образом отличается от рассмотренных ранее [2, 3].

Литература

1. M. A. Lyalinov and A. H. Serbest, *Transition boundary conditions for the simulation of a thin chiral slab.* Electron. Letters, **34(12)** (1998), 1211–1213.
2. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации.* Изд-во “Сов.Радио”, Москва (1966).
3. В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов и В. Г. Сологуб, *Дифракция волн на решетках.* Изд-во Харьковского Ун-та, Харьков (1973).
4. V. S. Buldyrev and M. A. Lyalinov, *Mathematical methods in modern electromagnetic diffraction theory.* Sci. House, Tokyo (2001).
5. K. Kobayashi, *Diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular conducting rod.* Chuo University, Vol. 25 (1982), pp.263–282.
6. I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen, *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media.* Artech House, Boston (1994).
7. P. Pelet and N. Engheta, *The theory chirowaveguides.* IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol. 38, No. 1 (1990), pp. r0–r8.
8. S. Bassiri, N. Engheta, and C. H. Papas, *Dyadic Green's function and dipole radiation in chiral media.* Alta Frequenza (1986), pp. 83–88.
9. R. G. Rojas and L. M. Chou, *Generalized impedance/resistive boundary conditions for a planar slab.* Proceedings of the 1991 URSI Radio Science Meeting, p. 358, London, Ontario, Canada, June 1991.

Lyalinov M. A., Polyanskaya S. V. The diffraction of a plane wave by a grating consisting of thin chiral slabs.

The diffraction of a normally incident plane wave by a grating consisting of thin semi infinite chiral slabs is considered. The chiral slabs are simulated by the appropriate transition boundary conditions. The problem is simplified by decoupling E_z and H_z components via a similarity transformation. Then the problem is reduced to the scalar Riemann–Hilbert problems and solved in an explicit form. The expansion of the diffracted field in terms of the plane waves is obtained and the numerical results are discussed.

С.-Петербургский государственный университет

Северо-Западная Кадровая Академия

Поступило 10 декабря 2001 г.