Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис

МЕДЛЕННАЯ ВОЛНА В ДВУХСЛОЙНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Выделение в геологическом разрезе коллекторов углеводородов является одной из основных задач сейсмической разведки на нефтяных месторождениях, которая может быть успешно решена только при правильном выборе исходной модели коллектора. Наиболее простой идеализированной моделью последнего, предложенной еще в начале 60-х годов, был жидкий слой между двумя упругими полупространствами [1]. В такой среде при любых соотношениях между упругими модулями сред существует медленная длиннопериодная волна (ДП), медленно затухающая с расстоянием и излучающаяся при конечных длинах коллекторов в окружающее пространство. Позже такая модель оказалась применимой для объяснения природы ДП колебаний, регистрируемых до и во время извержения вулканов [2]. Чаще всего периоды таких сигналов заключены в диапазоне 0.2–2*с*, однако существуют и более длиннопериодные сигналы [3]. Имеется ряд работ, указывающих на возникновение ДП сигналов при гидроразрыве пластов, приводящем к образованию трещин инъекцией жидкости в породу. Теоретически образование ДП сигналов в трещиноватом слое, состоящем из чередующихся твердых и жидких слоев было показано в работе [4]. Медленная волна в пороакустическом слое Био исследована в работе [5].

В настоящей работе рассматривается задача о ДП колебаниях двух слоев (жидкость-жидкость, газ-жидкость), находящихся внутри упругой среды и моделирующих коллектор, в котором часть нефти замещается водой или газом. Граница между слоями является границей водонефтяного или газонефтяного контактов, установление которой является важной задачей промысловой геофизики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 02-01-00260.

Рассмотрим в декартовой системе координат (x, z) модель среды, состоящей из двух полупространств (0) $(z < 0)$ и (3) $(z > h_1 + h_2)$, разделенных слоем (1) $(0 \leqslant z < h_1)$ и слоем (2) $(h_1 \leqslant z \leqslant h_1 + h_2)$ общей мощностью $h = h_1 + h_2$. Каждая из сред характеризуется соответственно продольными $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$ и поперечными $b_i (i = 0, 3)$ скоростями и плотностями $\rho_i (i = 0, 1, 2, 3)$, связанными с постоянными Ламе λ_i, μ_i равенствами:

$$a_i^2 = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}; \quad b_i^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}. \tag{1}$$

Обозначим через φ_0, ψ_0, φ_3, ψ_3 продольный и поперечный потенциалы в полупространствах (0) и (3), а через φ_1, φ_2 потенциалы смещений в жидких слоях (1) и (2). Потенциалы удовлетворяют уравнениям движения

$$\Delta\varphi_\nu = a_\nu^{-2} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial t^2} \ (\nu = 0, 1, 2, 3), \quad \Delta\psi_\nu = b_\nu^{-2} \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial t^2} \ (\nu = 0, 3) \tag{2}$$

и граничным условиям, обеспечивающим непрерывность вертикальных составляющих вектора смещений u_z, вертикальных напряжений t_{zz} и равенство нулю касательных напряжений t_{xz}

$$z = 0 \begin{cases} u_{z0} = u_{z1} \\ t_{zz0} = t_{zz1} \\ t_{xz0} = 0 \end{cases}; \quad z = h_1 \begin{cases} u_{z1} = u_{z2} \\ t_{zz1} = t_{zz2}; \end{cases}; \quad z = h \begin{cases} u_{z2} = u_{z3} \\ t_{zz2} = t_{zz3} \\ t_{xz3} = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Смещения и напряжения связаны с потенциалами следующими равенствами:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}; \\ t_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z}; \\ t_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях, возникающих в рассматриваемой системе, и выделим из них длиннопериодные колебания, спектр которых начинается с нулевой частоты, а скорости с нулевого значения (медленная волна). После применения преобразований Фурье по координате x и Меллина по z получаем выражения для трансформант потенциалов в виде:

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_0 = X_0 \cos kxe^{k[t\eta + z\alpha_0]},\\
&\overline{\psi}_0 = Y_0 \sin kxe^{k[t\eta + z\beta_0]},\\
&\overline{\varphi}_1 = \cos kx\big[\operatorname{sh} kz\alpha_1 X_1^{(1)} + \operatorname{ch} kz\alpha_1 X_1^{(2)}\big]e^{kt\eta},\\
&\overline{\varphi}_2 = \cos kx\big[\operatorname{sh} k(z-h_1)\alpha_2 X_2^{(1)} + \operatorname{ch} k(z-h_1)\alpha_2 X_2^{(2)}\big]e^{kt\eta},\\
&\overline{\varphi}_3 = \cos kxX_3e^{k[t\eta - (z-h)\alpha_3]},\\
&\overline{\psi}_3 = \sin kxY_3e^{k[t\eta - (z-h)\beta_3]},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\eta = iv$, (v – фазовая скорость), $\alpha_i = \sqrt{1-\frac{v^2}{a_i^2}}$ $(i = 0,1,2,3)$, $\beta_i = \sqrt{1-\frac{v^2}{b_i^2}}$ $(i = 0,3)$.

Подставляя (5) в граничные условия (3), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов X_0, Y_0, $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$, X_3, Y_3. Приравнивая определитель системы нулю, получим дисперсионное уравнение, связывающее фазовые скорости v собственных колебаний с безразмерным волновым числом kh (или с частотой $f = \frac{khv}{2\pi h}$). Отличные от нуля члены определителя a_{ik} $(1 \leqslant i,k \leqslant 8)$ равны:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \alpha_0; \quad a_{12} = 1; \quad a_{13} = -\alpha_1; \quad a_{21} = g_0; \quad a_{22} = 2\beta_0;\\
&a_{24} = \rho_{10}\frac{v^2}{b_0^2}; \quad a_{31} = 2\alpha_0; \quad a_{32} = g_0; \quad a_{43} = \alpha_1 \operatorname{ch} x_1;\\
&a_{44} = \alpha_1 \operatorname{sh} x_1; \quad a_{45} = -\alpha_2; \quad a_{53} = -\rho_1 v^2 \operatorname{sh} x_1;\\
&a_{54} = -\rho_1 v^2 \operatorname{ch} x_1; \quad a_{56} = \rho_2 v^2; \quad a_{65} = \alpha_2 \operatorname{ch} x_2;\\
&a_{66} = \alpha_2 \operatorname{sh} x_2; \quad a_{67} = \alpha_3; \quad a_{68} = -1; \quad a_{75} = \rho_{23}\cdot\frac{v^2}{b_3^2}\operatorname{sh} x_2;\\
&a_{76} = \rho_{23}\cdot\frac{v^2}{b_3^2}\operatorname{ch} x_2; \quad a_{77} = g_3; \quad a_{78} = -2\beta_3; \quad a_{87} = -2\alpha_3; \quad a_{88} = g_3
\end{aligned} \tag{6}$$

В (6) введены следующие обозначения:

$$\rho_{10} = \rho_1/\rho_0; \quad \rho_{21} = \rho_2/\rho_1; \quad \rho_{23} = \rho_2/\rho_3; \quad g_0 = 2 - \frac{v^2}{b_0^2};$$

$$g_3 = 2 - \frac{v^2}{b_3^2}; \quad x_1 = kh_1\alpha_1; \quad x_2 = kh_2\alpha_2.$$

В явном виде дисперсионное уравнение можно записать в форме:

$$\begin{aligned}\Delta(kh,v) \equiv \alpha_0 \frac{v^4}{b_0^4}\rho_{10}\Big\{\alpha_2\big(\alpha_1 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \alpha_2 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2\big) R_3 + \\ + \frac{v^4}{b_3^4}\big(\alpha_2\rho_{23} \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \rho_{21}\rho_{23} \operatorname{sh} x_2 \operatorname{ch} x_1\big)\Big\} - \\ - \alpha_1 R_0 \Big\{R_3(\alpha_1\alpha_2 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \alpha_2^2 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2) - \\ - \alpha_3 \frac{v^4}{b_3^4}\big(\alpha_1\rho_{21}\rho_{23} \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2 + \rho_{23} \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2\big)\Big\} = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

где $R_0 = g_0^2 - 4\alpha_0\beta_0$, $R_3 = g_3^2 - 4\alpha_3\beta_3$.

Можно показать, что среди множества нормальных мод, описываемых дисперсионным уравнением (7), существует мода, фазовая скорость v_{ph} которой стремится к нулю при стремлении волнового числа kh к нулю.

Рассмотрим сначала начальную часть дисперсионной кривой этой моды, считая что в (7) выполняются неравенства $v_{ph}/b_0 \ll 1$, $kh \ll 1$. Разлагая левую часть дисперсионного уравнения (7) по этим малым параметрам, получим явное выражение для приближенного значения $\widehat{v}_{ph}$ скорости медленной волны:

$$\widehat{v}_{ph} = \left\{\frac{2(1-\gamma_0^2)(1-\gamma_3^2)(\rho_{21}\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\rho_{10}\rho_{21}(1-\gamma_3^2)b_3^2+\rho_{23}b_0^2(1-\gamma_0^2)}\right\}^{1/2} b_0 b_3 \sqrt{kh}, \tag{8}$$

где $\varepsilon_1 = h_1/h$; $\varepsilon_2 = h_2/h$; $\gamma_0 = b_0/a_0$, $\gamma_3 = b_3/a_3$. Из (8) следует, что фазовая скорость обратно пропорциональна корню квадратному из длины волны. Интересным оказывается тот факт, что скорость $\widehat{v}_{ph}$ в длинноволновом приближении не зависит от скоростей волн в газе и жидкости, составляющих двухслойную пачку, а зависит только от их плотностей и относительных мощностей. На рис. 1 представлены кривые $\widehat{v}_{ph}$ как функции безразмерного волнового числа при различных значениях относительной мощности верхнего слоя ε_1. На практике более удобно использовать зависимость $\widehat{v}_{ph}$ как функции частоты f. Эту зависимость легко получить из формулы (8):

$$\widehat{v}_{ph} = \left(\frac{2(1-\gamma_0^2)(1-\gamma_3^2)(\rho_{21}\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\rho_{10}\rho_{21}(1-\gamma_3^2)b_3^2+\rho_{23}b_0^2(1-\gamma_0^2)}\right)^{1/3} (2\pi f h)^{1/3}(b_0 b_3)^{2/3}. \tag{9}$$

На рис. 2 представлены кривые $\widehat{v}_{ph}$ как функции безразмерной частоты f/f_0 ($f_0 = b_0/h$).

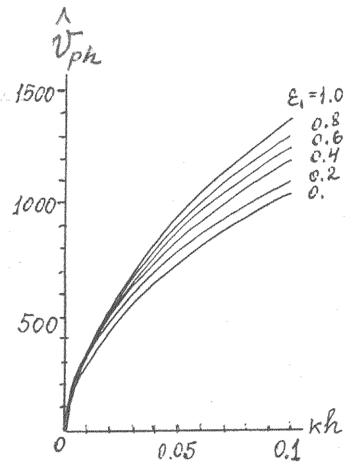

Рис. 1

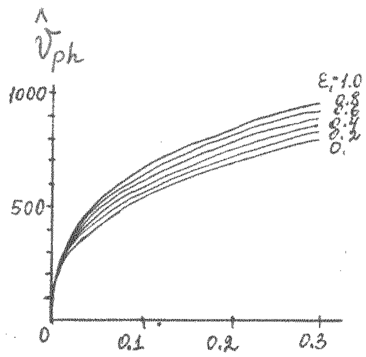

Рис. 2.

Рис. 1. Фазовая скорость медленной волны в длинноволновом приближении в зависимости от безразмерного волнового числа. Параметром кривых является относительная толщина верхнего слоя ($\varepsilon_1 = h_1/h$).

Параметры модели: $a_0 = a_3 = 4000$, $b_0 = b_3 = 2530$м/с, $\rho_0 = \rho_3 = 2.6$г/см^3, $a_1 = 400$м/с, $\rho_1 = 0,52$г/см^3, $a_2 = 1450$м/с, $\rho_2 = 0.9$г/см^3.

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но зависимость от безразмерной частоты ($f_0 = b_0/h$).

Интересно сравнить $\widehat{v}_{ph}$ медленной волны для двухслойной акустической пачки (газ-вода, газ-нефть) с $\widehat{v}_{ph}$ для пачти с той же общей толщиной, но состоящей из чередующихся слоев и образующей в длинноволновом приближении слой анизотропной жидкости [6]. Будем считать, что пористость (отношение мощности одного из слоев пары к суммарной мощности пары) равна соответствующему отношению для рассматриваемой задачи и оба упругих полупространства одинаковы. Скорость медленной волны в этом случае определяется формулой

$$\widehat{v}_{ph} = \left((1-\gamma_0^2)\frac{\rho_0}{\rho_1}\,\frac{v_{\|}}{v_{\perp}}\right)^{1/2}\sqrt{kh}\,b_0, \tag{10}$$

где ρ_0 – плотность упругой среды, ρ_1 – средняя плотность двухслойной жидкости, $v_{\|}$ и $v_{\perp}$ – скорости в жидкости параллельно слоям и поперек них соответственно [6], a_0 и b_0 – скорости продольной и поперечной волн в полупространствах, окружающих анизотропный слой, $\gamma_0 = b_0/a_0$. Расчеты в длиннопериодном приближении ($kh \ll 1$) показали, что скорости медленной волны в двухслойном жидком слое (9) и анизотропном слое (10) оказались практически одинаковыми.

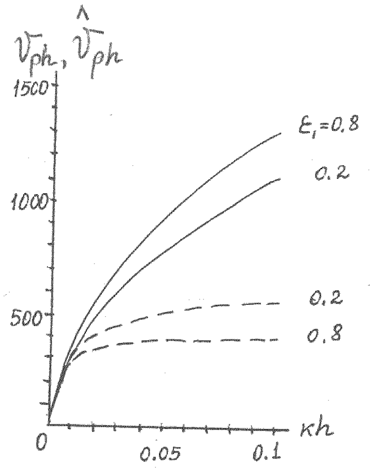

Рис. 3 Сравнение v_{ph} (штриховая линия) и $\widehat{v}_{ph}$ (сплошная линия), рассчитанных по точной и приближенной формулам. Параметры модели см. на рис. 1.

С увеличением волнового числа скорость медленной волны начинает зависеть от скоростей жидкого и газообразного слоя и формулы (8)–(9) становятся неприемлемыми. Фазовые скорости v_{ph}, рассчитанные точным решением дисперсионного уравнения (7) и по приближенной формуле (8), представлены на рис. 3, из которого следует, что область применения приближенной формулы ограничивается условием $kh < 10^{-2}$.

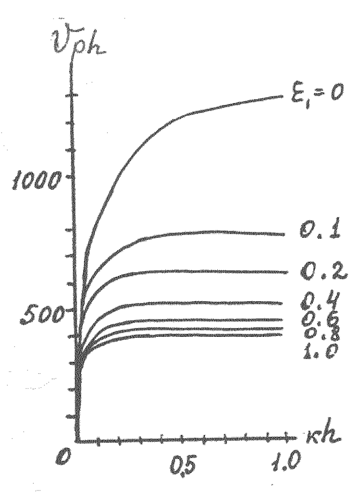

Рис. 4

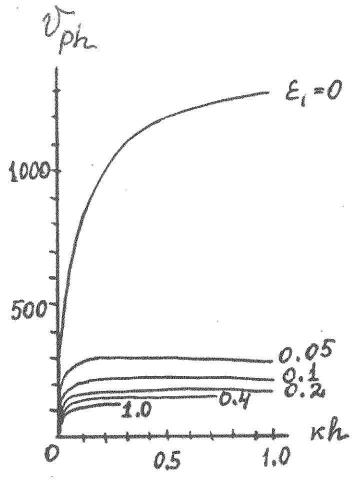

Рис. 5.

Рис. 4. Фазовая скорость медленной волны. Параметром кривых является относительная толщина верхнего слоя.

Параметры модели: $a_0 = a_3 = 4000$, $b_0 = b_3 = 2530$м/с, $\rho_0 = \rho_3 = 2.6$г/см^3, $a_1 = 400$м/с, $\rho_1 = 0,52$г/см^3, $a_2 = 1450$м/с, $\rho_2 = 0.9$г/см^3.

Рис. 5. Фазовая скорость медленной волны.

Параметры газа: $a_1 = 130$м/с, $\rho_1 = 0.2$г/см^3, остальные параметры те же, что на рис. 4.

Кривые v_{ph}, полученные из решения дисперсионного уравнения (7), для двух моделей, различающихся скоростью и плотностью газового слоя, представлены на рис. 4 и 5.

Из них следует, что наличие газового слоя сильно влияет на скорость медленной волны при всех значениях kh. Например, увеличение плотности газа в два раза при прочих равных условиях увеличивает v_{ph} более, чем в два раза. Сравнение кривых v_{ph} показывает, что наличие газового слоя даже малой относительной мощности, оказывает значительное влияние на скорость медленной волны. При этом, чем ниже плотность газа, тем сильнее это влияние. Поскольку плотность газа в трещине, содержащей слой газа и жидкости, может меняться в значительных пределах, то и скорость медленной волны тоже меняется очень сильно. Эти свойства медленной волны, регистрируемой при межскважинном прозвучивании, могут быть использованы для определения процентного содержания газа в нефтяном коллекторе.

Литература

1. П. В. Крауклис, *О некоторых низкочастотных колебаниях жидкого слоя в упругой среде.* — ПММ **26,** No. 6 (1962), 1111–1115.
2. V. Ferrazini, K. Aki, *Slow waves trapped in a fluid-filled infinite crack: implication for volcanic tremors.* — J. Geophys. Res. **92,** No. B9 (1987), 9215–9223.
3. H. Kumagai, B. Chouet, *Acoustic properties of a crack containing magmatic or hydrothermal fluids.* — J. Geophys. Res. **105,** No. B11 (2000), 25,493–25,512.
4. П. В. Крауклис, Г. М. Голошубин. Л. А. Крауклис, *Медленная волна в слое с конечной пористостью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 146–154.
5. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Интерференционная медленная волна в пороакустическом слое Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 137–148.
6. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Медленная волна в анизотропном слое жидкости, моделирующем коллектор.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 132–139.

Krauklis P. V., Krauklis L. A. Slow wave in a two-layer acoustic wave guide, placed in an elastic medium.

Kinematic characteristics of a slow wave, propagating in acoustic medium consisting of a two layer (water-oil, gas-oil), and locating inside elastic medium are considered. It is shown that the slow wave appear for arbitrary parameters of model. Its velocity in the low-frequency approximation depend on the gas and liquid densities and do not depend on the velocities in its. Dispersion curves of phase velocity of wave are constracted for the wide band of frequencies.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 30 ноября 2001 г.