Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

В. В. Борисов

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ СФОКУСИРОВАННЫХ ВОЛНОВЫХ МОД ТИПА БЕССЕЛЯ–ГАУССА

Локализованные решения волнового уравнения (сфокусированные волновые моды) типа Бесселя–Гаусса нулевого порядка первоначально получены в работе [1] как суперпозиция плоских волн. Моды порядка m построены позднее на основе решения начальной задачи формирования волн источником, перемещающимся со скоростью света [2]. Более общие решения рассматриваемого типа и родственные им легко получить исходя из известных волновых функций с помощью преобразования Бейтмана [3]

$$\Psi(\rho_0, \varphi, z_0, \tau_0) \rightarrow \widetilde{\Psi} = \\ = \frac{1}{z_0 - \tau_0} \Psi\left(\frac{\rho_0}{z_0 - \tau_0}, \varphi, \frac{r_0^2 - \tau_0^2 - 1}{2(z_0 - \tau_0)}, \frac{r_0^2 - \tau_0^2 + 1}{2(z_0 - \tau_0)}\right). \qquad (1)$$

Здесь и далее переменные цилиндрической системы координат ρ, φ, z и временная переменная $\tau = ct$ нормированы так, что

$$\rho_0 = \lambda\rho, \quad z_0 = \lambda z, \tau_0 = \lambda\tau, \quad r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2},$$

c – скорость фронта волнового возмущения, $\lambda > 0$ – произвольная постоянная, Ψ и $\widetilde{\Psi}$ – решения волнового уравнения. В результате преобразования частного решения волнового уравнения

$$\Psi_\mu = \exp\left[i\frac{1}{\lambda}\left(k\tau_0 + \sqrt{k^2 - a^2} \cdot z_0\right)\right] \cdot Z_\mu\left(\frac{a}{\lambda}\rho_0\right) \exp(i\mu\varphi), \qquad (2)$$

где $Z_\mu(x)$ – решение уравнения Бесселя, k, a, μ – произвольные комплексные параметры, приходим к волновой функции специального вида, не меняющей свою пространственно-временную

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 99-02-16893.

структуру

$$\widetilde{\Psi}_\mu = \frac{1}{z_0 - \tau_0} \cdot \exp\left[i\frac{1}{\lambda}\left(k + \sqrt{k^2 - a^2}\right)\times\right. \tag{3}$$

$$\left.\times\left(z_0 + \tau_0 + \frac{1}{z_0 - \tau_0}\left(\rho_0^2 + \frac{k - \sqrt{k^2 - a^2}}{k + \sqrt{k^2 - a^2}}\right)\right)\right] Z_\mu\left(\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\rho_0}{z_0 - \tau_0}\right) \exp(i\mu\varphi).$$

Выражение

$$\Phi = z_0 + \tau_0 + \frac{\rho_0^2}{z_0 - \tau_0} \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби и его можно интерпретировать как фазовую функцию сфокусированных (локализованных) мод Бриттенгама типов Гаусса, Бесселя–Гаусса, Эрмита–Гаусса. Решение $\widetilde{\Psi}_\mu$ зависит от параметров k, a, μ, но ясно, что его линейное преобразование

$$\tau_0 = \left(\tau_{0\beta} - \beta z_{0\beta}\right)\big/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad z_0 = \left(z_{0\beta} - \beta z_{0\beta}\right)\big/\sqrt{1 - \beta^2}$$

приводит к новому независимому комплексному параметру β в формуле (3). В частном случае $\mu = m$ и $Z_\mu(z) = J_m(z)$ – функции Бесселя, волновая функция (3) получена с помощью преобразования (1) в [4]. Отметим, что поскольку в работах [1, 2] используются интегральные преобразования, преобразование Бейтмана, по-видимому, единственная возможность получить решение (3) при комплексных значениях параметров и произвольной цилиндрической функции.

Используя известные соотношения, содержащие цилиндрические функции, получим некоторые результаты, касающиеся локализованных решений [1, 2] и родственных им. Так, применяя (1) к разложению плоской волны $\Psi = \exp(ik(\tau + x))$ в терминах частных решений $2D$ волнового уравнения [5]

$$\Psi = \exp\left(i\frac{k}{\lambda}\left(\tau_0 + \rho_0\cos\varphi\right)\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} i^m \exp\left[i\frac{k}{\lambda}\tau_0 + im\varphi\right] \cdot J_m\left(\frac{k}{\lambda}\rho_0\right),$$

приходим к разложению

$$\widetilde{\Psi}_c = \frac{1}{z_0 - \tau_0}\exp\left[i\frac{k}{2\lambda}\left(z_0 + \tau_0 + \frac{1}{z_0 - \tau_0}\left(\rho_0^2 + 2\rho_0\cos\varphi + 1\right)\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \widetilde{\Psi}_{cm}, \tag{6}$$

$$\widetilde{\Psi}_{cm}=\frac{1}{z_0-\tau_0}\exp\left[i\frac{k}{2\lambda}\Big(\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big)\right]J_m\Big(\frac{k}{\lambda}\cdot\frac{\rho_0}{z_0-\tau_0}\Big)\cdot\exp(im\varphi).$$

Здесь левая часть и слагаемые правой части – решения волнового уравнения, $\widetilde{\Psi}_{cm}$ – волновые функции типа Бесселя–Гаусса, следовательно, $\widetilde{\Psi}_c$ – производящая их функция, показатель экспоненты которой – фазовая функция, отличная от (4). Слагаемые (6), записанные в виде

$$\Psi_\mu=\frac{1}{z_0-\tau_0}\exp\left[i\frac{k}{2\lambda}\Big(\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big)\right]Z_\mu\Big(\frac{k}{\lambda}\cdot\frac{\rho_0}{z_0-\tau_0}\Big)\cdot\exp(i\mu\varphi)\quad(7)$$

удовлетворяют волновому уравнению. Их можно получить из выражения (3), полагая $a^2=k^2$.

Преобразуя разложение плоской волны $\Psi=\exp(ik(\tau+z))$ по частным решениям волнового уравнения сферической системы координат [5]

$$\Psi_{cs}=\exp\Big(i\frac{k}{\lambda}(\tau_o+r_0\cos\vartheta)\Big)\Big]=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2k}}\sum_{n=0}^{\infty}i^n(2n+1)\exp\left[i\frac{k}{\lambda}\tau_0\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{r_0}}J_{n+1/2}\Big(\frac{k}{\lambda}r_0\Big)P_n(\cos\vartheta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра, приходим к разложению

$$\widetilde{\Psi}_{cs}=\frac{1}{z_0-\tau_0}\exp\left[i\frac{k}{2\lambda}\Phi\right]=\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2k}}\ \sum_{n=0}^{\infty}i^n(2n+1)\widetilde{\Psi}_{sn},\qquad(9)$$

$$\widetilde{\Psi}_{sn}=\frac{1}{z_0-\tau_0}\left[\exp\Big(i\frac{k}{2\lambda}\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}J_{n+1/2}\Big(\frac{k}{\lambda}R\Big)P_n(\widetilde{x}),\quad(10)$$

Здесь R, $\widetilde{x}$ – результаты преобразования переменных r_0 и $\cos\vartheta$

$$R=\frac{1}{2}\left[\Big(\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big)^2-4\cdot\frac{z_0+\tau_0}{z_0-\tau_0}\right]^{\frac{1}{2}},\qquad \widetilde{x}=\frac{1}{2R}\Big(\Phi-\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big).$$

Производящая функция $\widetilde{\Psi}_{cs}$ – волновая мода типа Гаусса нулевого порядка. Слагаемые $\widetilde{\Psi}_{sn}$ (10), родственные рассмотренным ранее локализованным волнам типа Бесселя–Гаусса, записанные в виде

$$\widetilde{\Psi}_{s\mu}=\frac{1}{z_0-\tau_0}\left[\exp\Big(i\frac{k}{2\lambda}\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}Z_{\mu+1/2}\Big(\frac{k}{\lambda}R\Big)W_\mu(\widetilde{x}),\quad(11)$$

где $Z_{\mu+1/2}(x)$ и $W_\mu(x)$ – произвольные решения уравнений Бесселя и Лежандра, удовлетворяют волновому уравнению.

Основываясь на разложении сферической волновой функции

$$\Psi = \frac{1}{R_\gamma}\cdot\exp\Big(i\frac{k}{\lambda}(\tau_0+R_\gamma)\Big), \quad \text{где} \quad R_\gamma = \big(r_0^2+\alpha_0^2-2r_0\alpha_0\cos\gamma\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_0+\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0), \quad \alpha_0>0 \quad \text{и} \quad \vartheta_0\in[0,\pi],$$

$\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ в терминах частных решений волнового уравнения в сферических координатах [5], после преобразования Бейтмана (1) получаем производящую функцию

$$\widetilde{\Psi}_s = \frac{1}{z_0-\tau_0}\cdot\exp\Big[i\frac{k}{2\lambda}\Big(\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}+\widetilde{R}_\gamma\Big)\Big]\cdot\frac{1}{\widetilde{R}_\gamma},$$

$$\widetilde{R}_\gamma = \big(R^2+\alpha_0^2-2R\alpha_0\cos\widetilde{\gamma}\big)^{\frac{1}{2}},$$

$\cos\widetilde{\gamma} = \widetilde{x}\cos\vartheta_0+\sqrt{1-\widetilde{x}^{\,2}}\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$ и в конечном результате приходим к волновым функциям

$$\widetilde{\Psi}_{s\mu\chi} = \frac{1}{z_0-\tau_0}\cdot\exp\Big[i\frac{k}{2\lambda}\Big(\Phi+\frac{1}{z_0-\tau_0}\Big)\Big]\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{R}}Z_{\chi+1/2}\Big(\frac{k}{\lambda}R\Big)W_\chi^\mu(\widetilde{x})\exp(i\mu\varphi). \tag{12}$$

Выражение (12) легко получить из элементарной волновой функции

$$\widetilde{\Psi}_{s\mu\chi} = Z_{\chi+1/2}\Big(\frac{k}{\lambda}r_0\Big)W_\chi^\mu(x)\exp(i\mu\varphi+ik\tau).$$

Сомножители, определяющие локализацию волнового возмущения в выражениях (7), (11), (12) при определенных значениях параметров, одинаковы и не совпадают с производящей функцией разложения (9).

Литература

1. P. L. Overfelt, *Bessel–Gauss pulses.* — Phys. Rev. **A 44,** No. 6 (1991), 3941–3947.
2. V. V. Borisov, I. I. Simonenko, *Formation of Bessel–Gauss focus wave modes.* — Can. J. Phys. No. 4 (1997), 573–579.
3. H. Bateman, *The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion.* New York: Dover (1955).
4. V. V. Borisov, *Invariable-profile wave functions and Brittingham's focus wave modes.* — Eur. Phys. J. **B 1,** No. 6 (1998), 164–165.

5. W. Magnus, F. Oberhettinger, R. R. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New Yprk (1966).

Borisov V. V. Generating functions of the focus wave modes Bessel–Gauss type.

Applying Bateman's transform to expansions of the plane and spherical waves in terms of the simple solutions to the wave equation we get the localized waves of Bessel–Gauss type. Generating functions of the waves are obtained too.

С.-Петербургский
государственный
университет
e-mail Victor.Borisov@pobox.spbu.ru

Поступило 3 января 2002 г.