Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛЕЖАНДРА

1. Введение. В настоящей заметке мы построим когерентные состояния для осцилляторободобной системы, которую мы назовем осциллятором Лежандра, поскольку для этой системы полиномы Лежандра, играют те же роль, что и полиномы Эрмита в случае стандартного бозонного осциллятора.

Известно, что в случае гармонического осциллятора три известных определения когерентных состояний (как собственных состояний оператора уничтожения, как состояний порождаемых оператором сдвига из вакуума и как состояний минимизирующих соотношение неопределенности) эквивалентны и порождают один и тот же набор состояний. Однако в общем случае это уже не так. Ниже мы построим когерентные состояния, связанные с полиномами Лежандра, основываясь на анализе [1] связи ортогональных многочленов с алгебрами обобщенных осцилляторов [3, 2]. Именно, мы построим для осциллятора Лежандра аналоги когерентных состояний Барута–Жирарделло [5] и Клаудера–Газо [6]. Описание когерентных состояний типа Переломова [7–9], требующих несколько более подробного рассмотрения, будет приведено в другой работе.

2. Осциллятор Лежандра. Для удобства читателя приведем некоторые, используемые в дальнейшем, сведения о полиномах Лежандра $P_n(x)$, которые являются решениями дифференциальных уравнений

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y(x) = P_n(x) \tag{1}$$

Это исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ грант No. 00-01-00500.

и удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}. \tag{2}$$

Они также являются решениями следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered}(2n+1)xP_n(X) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x);\\ P_0(x) = 1; \quad (P_{-1}(x) = 0), \quad n \in \mathbb{N}_0\end{gathered} \tag{3}$$

Полиномы Лежандра определяются соотношением ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned}P_n(x) &={}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}-n, n+1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1-x}{2}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{[[\frac{n}{2}]]}\frac{(-1)^m}{2^n}\binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}x^{n-2m} =\\ &= \sum_{m=0}^{[[\frac{n}{2}]]}\frac{(-1)^m(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}\,x^{n-2m},\end{aligned} \tag{4}$$

где символ $[[n]]$ обозначает целую часть n. Ниже мы будем использовать следующую производящую функцию

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{n!}\,P_n(x)z^n = (1-xz)^{-\gamma}\,{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}(1+\gamma)\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{(x^2-1)z^2}{(1-xz)^2}\right);\\ \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1.\end{gathered} \tag{5}$$

Наряду с полиномами Лежандра мы будем рассматривать функции Лежандра

$$\psi_n(x) = \sqrt{2n+1}\,P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

которые образуют ортонормированный базис $\{|n\rangle \equiv \psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} := L^2([-1,1], \frac{1}{2}\,dx) \tag{7}$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$x\psi_n(x) = b_{n-1}\psi_{n-1}(x) + b_n\psi_{n+1}(x), \quad \psi_{-1}(x) = 0, \quad \psi_0(x) = 1, \tag{8}$$

с коэффициентами

$$b_n = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}}, \quad n \geqslant 0. \tag{9}$$

В данном исследовании полиномы Лежандра $P_n(x)$ и функции Лежандра $\psi_n(x)$ играют туже роль, что и полиномы и функции Эрмита в стандартной квантовой механике.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор обобщенной координаты X, соответствующей полиномам Лежандра $P_n(x)$, как оператор умножения на аргумент:

$$X|n\rangle = x|n\rangle \tag{10}$$

или, учитывая соотношение (8),

$$X\psi_n(x) = b_n\psi_{n+1}(x) + b_{n-1}\psi_{n-1}(x), \tag{11}$$

где коэффициенты b_n определяются формулой (9). Так как $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b_k} = \infty$, то (см. [10, 11, 2]) оператор X является самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть P оператор обобщенного импульса предложенный в [1]. Его действие на элементы базиса в $\mathcal{H}$ имеет вид

$$P|n\rangle = i(b_n|n+1\rangle - b_{n-1}|n-1\rangle). \tag{12}$$

Вычисляя на элементах базиса коммутатор операторов X и P, получаем

$$[X,P]|n\rangle = 2i(b_n^2 - b_{n-1}^2)|n\rangle = \frac{2i}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,|n\rangle. \tag{13}$$

Определим операторы рождения и уничтожения формулами

$$a^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP), \quad a^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP). \tag{14}$$

На элементы базиса в $\mathcal{H}$ эти операторы действуют по правилу

$$a^{(+)}|n\rangle = \sqrt{2}\,b_n|n+1\rangle, \quad a^{(-)}|n\rangle = \sqrt{2}\,b_{n-1}|n-1\rangle \tag{15}$$

и удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[a^{(-)}, a^{(+)}] = \frac{1}{i}[X,P]. \tag{16}$$

Введем оператор номера состояния N и гамильтониан H, положив

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad H = X^2 + P^2 = a^{(+)}a^{(-)} + a^{(-)}a^{(+)}. \tag{17}$$

Собственные значения оператора H равны

$$\lambda_0 = 2b_0^2, \quad \lambda_n = 2(b_{n-1}^2 + b_n^2). \tag{18}$$

Построенную систему естественно назвать осциллятором Лежандра.

2. Когерентные состояния Барута–Жирарделло для осциллятора Лежандра. Определим в пространстве $\mathcal{H}$ когерентные состояния для осциллятора Лежандра как собственные векторы оператора уничтожения $a^{(-)}$

$$a^{(-)}|z\rangle = z|z\rangle. \tag{19}$$

Имеем

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\sqrt{2}\,b_{n-1})!}\,|n\rangle. \tag{20}$$

Нормирующий множитель равен

$$\mathcal{N}^2 = \langle z|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!} \equiv \exp_{[2b_{n-1}^2]}(|z|^2). \tag{21}$$

Так как[1]

$$(2b_{n-1}^2)! = \frac{2^n(n!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{(n!)(1)_n}{2^n(\frac{1}{2})_n(\frac{3}{2})_n}, \tag{22}$$

то радиус сходимости ряда (21) равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$$\mathcal{N}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n}{n!(1)_n}(2|z|^2)^n = {}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right|2|z|^2\right). \tag{23}$$

[1] здесь $(a)_n$ – символ Похгаммера (сдвинутый факториал) определяемый соотношением

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Подставляя (23) в (20) и используя соотношение $|n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{2n+1}\, P_n(x)$, получаем

$$
\begin{aligned}
|z\rangle &= \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(2n+1)}{n!} P_n(x) z^n = \\
&= \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_n (2z)^n}{n!} P_n(x).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Используя (5) при $\gamma = \frac{3}{2}$ и $z \to 2z$ имеем

$$
|z\rangle = \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} {}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{(x^2-1)4z^2}{(1-2xz)^2} \right) (1-2xz)^{-\frac{3}{2}}. \tag{25}
$$

Следующая задача состоит в построении меры

$$
d\mu(|z|^2) = W(|z|^2)\mathrm{d}^2 z, \quad \text{такой что} \quad \iint\limits_{\mathbb{C}} W(|z|^2)|z\rangle\langle z|\mathrm{d}^2 z = 1,
$$

где $d^2 z = d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)$. Известно, (см., например, [12]), что задача сводится к решению следующей классической проблемы моментов

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2b_{n-1}^{\;2})!} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^n W(t)\mathrm{d}\, t \right] |n\rangle\langle n| = 1, \quad (t = |z|^2) \tag{26}
$$

или

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} t^n W(t)\mathrm{d}\, t = \frac{1}{\pi}(2b_{n-1}^{\;2})!. \tag{27}
$$

Подставляя (22) в (27) имеем (при $\tau = 2t$)

$$
\frac{1}{2}\int_0^1 \tau^n W\left(\frac{1}{2}\tau\right)\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{\pi}\frac{(n!)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n}.
$$

Итак, следует решить проблему моментов Стильтьеса

$$
\frac{1}{2}\int_0^1 \tau^n W\left(\frac{1}{2}\tau\right)\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{\pi}\frac{(\Gamma(n+1))^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \tag{28}
$$

или, с учетом $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi$,

$$\int\limits_0^1 \tau^n W\left(\frac{1}{2}\tau\right)\mathrm{d}\,\tau=\frac{(\Gamma(n+1))^2}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},\quad n\geqslant 0. \tag{29}$$

Сделав в интеграле (см. (7.127) в [13])

$$J=\int\limits_{-1}^1 (1+x)^\sigma P_\nu(x)\mathrm{d}\,x=\frac{2^{1+\sigma}(\Gamma(1+\sigma))^2}{\Gamma(2+\sigma+\nu)\Gamma(1+\sigma-\nu)},\quad \operatorname{Re}\sigma>-1, \tag{30}$$

замену $x=2\tau-1$, получим

$$J=\int\limits_0^1 2^{\sigma+1}\tau^\sigma P_\nu(2\tau-1)\mathrm{d}\,\tau.$$

Это позволяет переписать (30) в виде

$$\int\limits_0^1 \tau^\sigma P_\nu(2\tau-1)\mathrm{d}\,\tau=\frac{(\Gamma(\sigma+1))^2}{\Gamma(\sigma+\nu+2)\Gamma(1+\sigma-\nu)}. \tag{31}$$

Выбирая $\sigma=n$ и $\nu=\frac{1}{2}$, получаем

$$\int\limits_0^1 \tau^n P_{\frac{1}{2}}(2\tau-1)\mathrm{d}\,\tau=\frac{(\Gamma(n+1))^2}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}. \tag{32}$$

Обозначим

$$\tau^{-\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}}(2\tau-1)=\int\limits_\tau^1 q(t)\mathrm{d}\,t. \tag{33}$$

Дифференцируя, находим функцию $q(\tau)$ при $0<\tau<1$

$$q(\tau)=-\left(\tau^{-\frac{1}{2}}P_{-\frac{1}{2}}(2\tau-1)\right)'\Big|_\tau^1. \tag{34}$$

Для исследования особенности, возникающей при $\tau\to 0^+$, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \tau^{n+\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\tau^1 q(t)\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,\tau.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^1 \tau^{n+\frac{1}{2}} \left(\int_\tau^1 q(t) \mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, \tau = \frac{\tau^{n+\frac{3}{2}}}{n+\frac{3}{2}} \int_\tau^1 q(t) \mathrm{d}\, t \Big|_0^1 + \int_0^1 q(\tau) \frac{\tau^{n+\frac{3}{2}}}{n+\frac{3}{2}} \mathrm{d}\, \tau. \quad (35)$$

Заметим, что

$$\int_\tau^1 q(t) \mathrm{d}\, t \underset{\tau \to 1}{\longrightarrow} 0 \quad \text{и} \quad \tau^{3/2} \int_\tau^1 q(t) \mathrm{d}\, t \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

откуда следует, что внеинтегральный член в (35) равен нулю. Из (32) и (33) следует, что интеграл в левой части равенства (35) равен

$$\int_0^1 \tau^{n+\frac{1}{2}} \left(\int_\tau^1 q(t) \mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, \tau = \frac{(\Gamma(n+1))^2}{\left(n+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

так что при $n \geqslant 0$ имеем

$$\int_0^1 q(\tau) \tau^{n+\frac{3}{2}} \mathrm{d}\, \tau = \frac{(\Gamma(n+1))^2}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}. \quad (36)$$

Тем самым проблема моментов решена

$$W\left(\frac{1}{2}\tau\right) = \tau^{\frac{3}{2}} q(\tau) = -\tau^{\frac{3}{2}} \left(\tau^{-\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}}(2\tau-1)\right)' \Big|_\tau^1$$

или

$$W(t) = -\frac{(2t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left((2t)^{-\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}}(t-1)\right)' \Big|_\tau^1, \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Используя формулу (8.832(1)) из [13], получаем

$$W(t) = \frac{(4t-5) P_{\frac{1}{2}}(t-1) - 3 P_{\frac{3}{2}}(t-1)}{2(t-2)}, \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Окончательно, имеем при $0 < |z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathrm{d}\, \mu(|z|^2) = \frac{(4|z|^2-5) P_{\frac{1}{2}}(|z|^2-1) - 3 P_{\frac{3}{2}}(|z|^2-1)}{2(|z|^2-2)} \,\mathrm{d}\,(\mathrm{Re}\, z) \mathrm{d}\,(\mathrm{Im}\, z). \quad (39)$$

Вычислим перекрытие двух когерентных состояний

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z_1|^2 \right) {}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z_2|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}_1^{\,n} z_2^n}{(2b_{n-1}^2)!} \overset{(22)}{=}$$

$$= \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z_1|^2 \right) {}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z_2|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\overline{z}_1^{\,n} z_2)^n (\frac{1}{2})_n (\frac{3}{2})_n}{(n!)(1)_n} \overset{(23)}{=} \tag{40}$$

$$= \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z_1|^2 \right) {}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} |2|z_2|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} {}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} |2\overline{z}_1 z_2 \right).$$

Произвольному нормированному состоянию

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mid \psi_n\rangle \in \mathcal{H}, \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 = 1 \right)$$

сопоставим аналитическую на $\mathbb{C}_{1/\sqrt{2}}$ функцию

$$f(z) = \mathcal{N}(z)\langle z \mid f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{f_n}{n!} (2z)^n, \tag{41}$$

так что при разложении по когерентным состояниям имеем

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \int\limits_{\mathbb{C}_1/\sqrt{2}} \langle z \mid f\rangle |z\rangle \mathrm{d}\,\mu(|z|^2) \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}_1\sqrt{2}} \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} f(z)|z\rangle \mathrm{d}\,\mu(|z|^2) \end{aligned} \tag{42}$$

и

$$\langle f|f\rangle = \int\limits_{\mathbb{C}_1/\sqrt{2}} \left[{}_2\mathbf{F}_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2|z|^2 \right) \right]^{-1} |f(z)|^2 \mathrm{d}\,\mu(|z|^2) < \infty. \tag{43}$$

4. Когерентные состояния Газо–Клаудера для осциллятора Лежандра. Темпорально стабильные когерентные состояния Газо–Клаудера [6] удобно применять в случае, когда гамильтониан H нелинеен и его члены не являются генераторами группы симметрии. Когерентные состояния Газо–Клаудера определяются формулой

$$|J,\gamma\rangle := \mathcal{N}(J)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\rho_n}}\,e^{-i\gamma\lambda_n}\,|\psi_n\rangle, \tag{44}$$

где $\rho_n = \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$, $n\geqslant 1$; $\rho_0 = 1$, нормировочный коэффициент равен

$$\mathcal{N}(J)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^n}{\rho_n}. \tag{45}$$

Параметры J и γ (обобщающие модуль и, расширенный до бесконечного накрытия отрезка $[0,2\pi]$, аргумент стандартного параметра $z = |z|e^{i\gamma}$ когерентных состояний и моделирующие классические переменные действие-угол) принимают значения $J\geqslant 0$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

В рассматриваемом нами случае осциллятора Лежандра гамильтониан H – положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с простым дискретным, упорядоченным по убыванию, спектром $\{\lambda_n = 2b_{n-1}^2\}_{n=1}^{\infty}$, где b_n из (9), так что

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_n = (2b_{n-1}^2)! = \frac{(n!)(1)_n}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n}, \quad n\geqslant 1, \tag{46}$$

$$\mathcal{N}(J)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} J^n\frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)(1)_n} = {}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right|2J\right). \tag{47}$$

Радиус сходимости ряда в (47) равен $R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\rho_n} = \frac{1}{2}$. Учитывая (46), (47), получаем

$$|J,\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right|2J\right)}}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n!}\,J^{n/2}2^{n/2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n}\,e^{-i\sqrt{2}\,b_{n-1}\gamma}P_n(x), \tag{48}$$

или, так как $\left(\frac{3}{2}\right)_n = (2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n$, то

$$|J,\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\1\end{matrix}\middle|2J\right)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}(2J)^{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)_n e^{-i\sqrt{2}\,b_{n-1}\gamma}P_n(x). \tag{49}$$

Для доказательства справедливости разложения единицы рассмотрим

$$\int |J,\gamma\rangle\langle J,\gamma|\,\mathrm{d}\,\mu(J,\gamma) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{d}\,\gamma\left[\int_0^\infty k(J)|J,\gamma\rangle\langle J,\gamma|\,\mathrm{d}\,J\right], \tag{50}$$

где

$$k(J) := \begin{cases}\mathcal{N}(J)^2\rho(J) & 0\leqslant J\leqslant\frac{1}{2},\\ 0 & J>\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{51}$$

Вычисляя сперва интеграл по γ получаем

$$\int |J,\gamma\rangle\langle J,\gamma|\,\mathrm{d}\,\mu(J,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\int_0^{\frac{1}{2}}|n\rangle\langle n|\,\mathrm{d}\,J. \tag{52}$$

Итак, разложение единицы

$$\int |J,\gamma\rangle\langle J,\gamma|\,\mathrm{d}\,\mu(J,\gamma) = \mathbb{I} \tag{53}$$

выполняется, если весовая функция $\rho(J)$ дает решение проблемы моментов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} J^n\rho(J)\,\mathrm{d}\,J = \rho_n = \frac{n!(1)_n}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n},\quad n\geqslant 0. \tag{54}$$

С учетом соотношений (27) и (38) получаем решение этой проблемы моментов в виде $(0<J<\frac{1}{2},\ \gamma\in\mathbb{R})$

$$\rho(J) = \frac{\pi}{4(J-2)}\left[(4J-5)P_{\frac{1}{2}}(J-1) - 3P_{\frac{3}{2}}(J-1)\right]. \tag{55}$$

Темпоральная стабильность очевидна, так как

$$e^{-iHt}|J,\gamma\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^{n/2}}{\sqrt{\rho_n}}e^{-i\gamma\lambda_n}e^{-it\lambda_n}|\psi_n\rangle = |J,\gamma+t\rangle. \tag{56}$$

Имеем также

$$\langle J,\gamma|H|J,\gamma\rangle = \mathcal{N}^{-2}(J)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2b_{n-1}^2}{(2b_{n-1}^2)!}\,J^n = J. \tag{57}$$

Перекрытие состояний дается соотношением

$$\langle J',\gamma'|J,\gamma\rangle = \frac{1}{N(J)N(J')}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(JJ')^{n/2}}{\rho_n}\,\exp[-i\lambda_n(\gamma-\gamma')], \tag{58}$$

которое, в частном случае $\gamma=\gamma'$, легко суммируется

$$\langle J',\gamma|J,\gamma\rangle = \frac{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\1\end{matrix}\right|2\sqrt{JJ'}\right)}{\sqrt{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\1\end{matrix}\right|2J\right)\,{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\1\end{matrix}\right|2J'\right)}}. \tag{59}$$

Имея в виду возможные физические приложения, вычислим, для примера, несколько величин, имеющих физический смысл. Так, для среднего числа возбуждений имеем

$$\begin{aligned}\langle n\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{J^n}{\mathcal{N}^2(J)\rho_n} = \mathcal{N}^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2J)^n n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n}{n!(1)_n} = \\ &= \frac{2J}{N^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2J)^n\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)_n\left(\frac{5}{2}\right)_n}{n!(2)_n} = \frac{3J}{2}\,\frac{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{5}{2}\\2\end{matrix}\right|2J\right)}{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\1\end{matrix}\right|2J\right)}.\end{aligned} \tag{60}$$

Используя формулы (7.3.2(50)) и (7.3.2(217)) из [14], получаем выражение для $\langle n\rangle$ через эллиптические интегралы

$$\langle n\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{J}{1-2J}\,\frac{2\mathbf{K}(\sqrt{2J})-(1+2J)\mathbf{D}(\sqrt{2J})}{\mathbf{E}(\sqrt{2J})}, \tag{61}$$

где

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t$$

– полный эллиптический интеграл 2-го рода, (62)

$$\mathbf{D}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}\,\mathrm{d}\,t = D\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

– полный эллиптический интеграл, (63)

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}\,t = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \tag{64}$$

– полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Аналогичное вычисление дает

$$\begin{aligned}\langle n^2\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{J^n}{N(J)^2 \rho_n} = N^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2J)^n \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!(1)_{n-1}} = \\ &= \frac{3}{2}\,\frac{J}{N^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2J)^n}{n!} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\frac{5}{2}\right)_n}{(1)_n} = \frac{3}{2} J\, \frac{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\\ 1\end{matrix}\right| 2J\right)}{{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right| 2J\right)},\end{aligned} \tag{65}$$

или при помощи эллиптических интегралов

$$\langle n^2\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{J}{(1-2J)^2}\,\frac{(3+10J)\mathbf{K}(\sqrt{2J}) - 2J(7+2J)\mathbf{D}(\sqrt{2J})}{\mathbf{E}(\sqrt{2J})}. \tag{66}$$

Тогда дисперсия равна

$$\Delta n = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}\,J}}{{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\,|2J\right)} \times \tag{67}$$

$$\times \left[{}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\\ 1\end{matrix}\right| 2J\right)\, {}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right| 2J\right) - \frac{3}{2} J \left({}_2\mathbf{F}_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\\ 2\end{matrix}\right| 2J\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

и для параметра Манделя $Q = \frac{(\Delta n)^2}{\langle n\rangle} - 1$ получаем соотношение

$$Q = \frac{{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\\ 1\end{matrix}\,|2J\right)}{{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\\ 2\end{matrix}\,|2J\right)} - \frac{3}{2}J\frac{{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\\ 2\end{matrix}\,|2J\right)}{{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\,|2J\right)}. - 1 \qquad (68)$$

5. Заключение. В настоящей заметке мы определили новый тип осциллятора для которого полиномы Лежандра, играют ту же роль, что и полиномы Эрмита в случае стандартного бозонного осциллятора. Для этой системы мы, решая соответствующие классические проблемы моментов, построили два семейства когерентных состояний – как собственных состояний оператора уничтожения и темпорально стабильные когерентные состояния Клаудера–Газо. В нашей следующей работе, находящейся в стадии оформления, мы построим для осциллятора Лежандра когерентные состояния типа Переломова, как еще один конкретный пример общего изучения связей между ортогональными многочленами и когерентными состояниями. Аналогичные осцилляторободобные системы можно определить и для других ортогональных многочленов [1] (включая q-деформированные) и построить соответствующие системы когерентных состояний (сравнительно общая конструкция будет описана в нашей следующей работе).

Литература

1. V. V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras.* Integ. Transf. Special Funct., **12**, No. 2 (2001), 115–138.
2. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, and P. P. Kulish, *Construction of the spectral measure for the deformed oscillator position operator in the case of undetermined Hamburger moment problem.* Rev. Math. Phys., **12**, No. 5 (2000), 691–710.
3. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *Деформированные осцилляторы и их приложения.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **189** (1991), 37–74.
4. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Realization of the annihilation operator for generalized oscillator-like system by a differential operator.* Preprint SPBU-IP-00-25.
5. A. O. Barut, L. Girardello, *New "Coherent States" associated with non-compact groups.* Commun. Math. Phys., **21**, No. 1 (1972), 41–55.
6. J. P. Gazean and J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum.* J. Phys. A.: Math. & Gen., **32**, No. 1 (1999), 123–132.
7. A. M. Perelomov, *Coherent states for arbitrary Lie groups.* Commun. Math. Phys., **26** (1972), 222–236.

8. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и некоторые их приложения.* Успехи Физич. Наук, **123**, Но. 1 (1977), 23–58.
9. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* Наука, ФМ, Москва (1987).
10. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* Наука, ФМ, Москва (1961).
11. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд. ЛГУ, Ленинград 1980.
12. J.-M. Sixdenierrs, K. A. Penson, and A. I. Solomon, *Mittag-Leffler coherent states.* J. Phys. A.: Math. & Gen., **32**, No. 43 (1999), 7543–7563.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* 5-е Изд., Наука, Москва (1971).
14. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* Наука, Москва (1981).

Borzov V. V. and Damaskinsky E. V. Coherent states for the Legendre oscillator.

The two families of coherent states (coherent states, as eigenvectors of the annihilation operator and the Klauder–Gazeau temporally stable coherent states) are defined for the Legendre oscillator, also defined in this note.

Санкт-Петербургский университет
Телекоммуникаций
E-mail: vadim@VB6384.spb.edu

Поступило 7 марта 2002 г.

Военный Инженерно-Технический
Университет
E-mail: evd@ED6911.spb.edu