Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

А. С. Благовещенский, А. А. Новицкая

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

1. В настоящей работе рассматривается поведение решения задачи Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = \Delta u, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \phi, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi \tag{2}$$

с начальными данными $\phi(x)$, $\psi(x)$. Здесь $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. В случае, когда $\phi(x)$, $\psi(x)$ – гладкие, быстро убывающие на бесконечности функции, справедливо равенство:

$$\exists \lim_{t\to\infty} 4\pi t u(x,t)\big|_{x=(p+t)\omega} =: f(p,\omega), \tag{3}$$

где

$$f(p,\omega) = \int \delta(p-(x,\omega))\psi(x)dx + \frac{\partial}{\partial p}\int \delta(p-(x,\omega))\phi(x)dx \tag{4}$$

см. [1–4], $f(p,\omega)$-является гладкой быстро убывающей по переменной p функцией от $(p,\omega) \in \mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$, где $\mathbb{S}^2$-двумерная единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. Равенство (3) означает, что при больших t $u(x,t)$ допускает представление:

$$u = \frac{1}{4\pi t} f(|x|-t,\omega) + o\left(\frac{1}{t}\right), \tag{5}$$

где $\omega = \frac{x}{|x|}$. В настоящей работе устанавливается справедливость формулы (3) в случае, когда ϕ и ψ – произвольные обобщенные функции с ограниченным носителем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00485).

2. Приведем решение задачи Коши для волнового уравнения в случае, когда начальные данные – обобщенные функции. В этой ситуации

$$U_{tt} = \Delta U, \quad U\big|_{t=0} = \Phi, \quad U_t\big|_{t=0} = \Psi \tag{6}$$

решение U есть обобщенная функция, см. [5], определяемая, как функционал над пространством K, где K – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций. Если $v \in K$, то

$$(U, v) = (\Psi, w(x,t)) + \left(\Phi, \frac{\partial}{\partial t}\, w(x,t)\right), \tag{7}$$

где

$$w(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(t^2 - |x-\xi|^2) v(\xi) d\xi \tag{8}$$

– решение задачи

$$\Delta w = w_{tt}, \quad w\big|_{t=0} = 0, \quad w_t\big|_{t=0} = v. \tag{9}$$

Легко проверить, что если Φ и Ψ – классические функции, то решение (7)–(8) совпадает с классическим решением волнового уравнения (формулой Пуассона).

3. Определим, что понимается под асимптотикой вида (5) в ситуации, когда решение U задачи (6) есть обобщенная функция. Пусть $f(p,\omega)$ – произвольная гладкая финитная функция на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} (f \in K_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}})$, $f \equiv 0$ при $|p| > A$. Введем семейство функций:

$$v(x,t) = \frac{1}{|x|^2}\, f\left(|x| - t, \frac{x}{|x|}\right). \tag{10}$$

Очевидно, что при достаточно больших t, таких, что точка $x = 0$ не принадлежит $\operatorname{supp} v(x,t)$, $v(x,t)$ – бесконечно дифференцируема и финитна. Будем говорить о слабой асимптотике функции U, если существует конечный предел:

$$\lim_{t\to\infty} t(U, v(x,t)) \tag{11}$$

при любых $v(x,t)$ вида (10). Этот предел есть, очевидно, обобщенная функция над пространством $K_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}}$. Определение (11) естественно, так как в случае, когда справедлива классическая асимптотика вида (5), при больших t:

$$U = \frac{1}{4\pi t}\, F\left(|x| - t, \frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\lim_{t\to\infty} t(U, v(x,t)) = \lim_{t\to\infty} t\int U(x,t)v(x,t)dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\lim_{t\to\infty}\int F\left(|x|-t, \frac{x}{|x|}\right) v(x,t)dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\lim_{t\to\infty}\int F\left(|x|-t, \frac{x}{|x|}\right)\frac{1}{|x|^2} f\left(|x|-t, \frac{x}{|x|}\right) dx.$$

Перейдем в последнем интеграле к сферическим координатам r, ω:

$$\lim_{t\to\infty} t(U, v(x,t)) = \frac{1}{4\pi}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{S^2} d\omega \int\limits_0^\infty dr F(r-t,\omega)f(r-t,\omega).$$

Заменив переменные $r - t = p$, и учтя финитность $f(p,\omega)$, можно переписать последнее выражение в виде:

$$\lim_{t\to\infty} t(U, v(x,t)) = \frac{1}{4\pi}\iint d\omega dp F(p,\omega)f(p,\omega).$$

Интегрирование в последней формуле ведется по многообразию $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$.

4. Докажем существование предела (11). В силу формул (7)–(8):

$$t(U,v) = \frac{t}{2\pi}\left(\Psi(x), \int\delta(t^2-|x-\xi|^2)v(\xi,t)d\xi\right) +$$

$$+\frac{t}{2\pi}\left(\Phi(x), \frac{\partial}{\partial t}\int\delta(t^2-|x-\xi|^2)v(\xi,t')d\xi\right)\Big|_{t'=t},$$

используя (10) получаем:

$$t(U,v) = \frac{t}{2\pi}\left(\Psi(x), \int\delta(t^2-|x-\xi|^2)\frac{1}{|\xi|^2} f\left(|\xi|-t, \frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi\right) +$$

$$+\frac{t}{2\pi}\left(\Phi(x), \frac{\partial}{\partial t}\int\delta(t^2-|x-\xi|^2)\frac{1}{|\xi|^2} f\left(|\xi|-t', \frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi\right)\Big|_{t'=t}.$$

Отдельно вычислим интеграл:

$$\frac{t}{2\pi}H = \frac{t}{2\pi}\int\delta(t^2-|x-\xi|^2)\frac{1}{|\xi|^2} f\left(|\xi|-t, \frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi,$$

перейдем в нем к сферическим координатам: $|\xi| = \rho$, $\frac{\xi}{|\xi|} = \omega$, тогда

$$\frac{t}{2\pi} H = \frac{t}{2\pi} \iint \delta(t^2 - |x - \rho\omega|^2) f(\rho - t, \omega) d\rho d\omega.$$

И еще одна замена переменных: $\rho - t = p$, в результате получаем:

$$\frac{t}{2\pi} H = \frac{t}{2\pi} \iint \delta(t^2 - |x - (p+t)\omega|^2) f(p, \omega) dp d\omega =$$

$$= \frac{t}{2\pi} \iint \delta(2t((x,\omega) - p) - |x - p\omega|^2) f(p,\omega) dp\, d\omega.$$

Рассмотрим носитель δ-функции-трехмерную поверхность в пространстве переменных $\omega \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}$. Эта поверхность есть гиперболический цилиндр. Его уравнение в ортонормированном базисе e_0, e_x, e_1, e_2, где e_0 – направление вдоль оси p, $e_x = \frac{x}{|x|}$, e_1, e_2 выбраны произвольно, есть

$$2t(rs - p) - (p^2 + r^2 - 2prs) = -(rs - p - t)^2 + t^2 - r^2 + r^2 s^2 = 0$$

здесь $r = |x|$, $s = (\omega, e_x)$. Это уравнение можно переписать в виде:

$$(rs - p - t)^2 - r^2 s^2 = t^2 - r^2. \tag{12}$$

Рассмотрим сечение гиперболического цилиндра двумерной плоскостью $(\omega_1 = \omega_2 = 0)$. Кривая (12) есть гипербола $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$ на плоскости переменных (s, p) (при $|\omega| = 1$, $s \in [-1, 1]$). Гипербола имеет асимптоты $p = -t$ и $p = 2rs - t$. При $t > A$ нижняя пола гиперболы Γ_- расположена ниже первой асимптоты $p = -t$ и не пересекается с $\operatorname{supp} f$. При $r > t$ наименьшее значение для точек принадлежащих пересечению верхней полы гиперболы Γ_+ с полосой $|s| \leqslant 1$ есть $p = r - 2t$, и при $r > 2t + A$, $\operatorname{supp} f \cap \Gamma = \varnothing$. Отсюда следует, что функция H финитна при каждом фиксированном $t > A$

$$\frac{t}{2\pi} H = \frac{t}{2\pi} \int \delta \left(p - \left((x,\omega) - t + \sqrt{t^2 - |x|^2 + (x,\omega)^2} \right) \right) \times$$

$$\times \left(p - \left((x,\omega) - t - \sqrt{t^2 - |x|^2 + (x,\omega)^2} \right) \right) f(p,\omega) dp\, d\omega.$$

Так как

$$(\delta((p-a)(p-b)), f(p)) = f(a) \frac{1}{|a-b|}, \quad \left(f\big|_{p=b} = 0 \right),$$

то

$$\frac{t}{2\pi}H = \frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int d\omega f\left((x,\omega)-t+\sqrt{t^2-|x|^2+(x,\omega)^2},\omega\right)\frac{t}{2\sqrt{t^2-|x|^2+(x,\omega)^2}}.$$

Если $\operatorname{supp}\Psi(x)$ и $\operatorname{supp}\Phi(x)$ ограничены ($\Phi(x)\equiv\Psi(x)\equiv 0$, при $|x|>A$), то нас большие $|x|$ не интересуют. В силу того, что $f\in C^\infty$ легко показать, что:

$$\int f\left((x,\omega)-t+\sqrt{t^2-|x|^2+(x,\omega)^2},\omega\right)\frac{td\omega}{2\sqrt{t^2-|x|^2+(x,\omega)^2}}\to$$

$$\to\frac{1}{2}\int f((x,\omega),\omega)d\omega$$

при $|x|\leqslant A$, $t\to\infty$ равномерно со всеми производными. Тем самым доказано, что при начальных условиях:

$$U\Big|_{t=0}=\Phi(x),$$
$$U_t\Big|_{t=0}=\Psi(x),$$

где $\Phi(x)$, $\Psi(x)\in K'$ и финитны, существует предел:

$$\lim_{t\to\infty} t(U,v(x,t)).$$

Литература

1. F. C. Fiedlander, *On the radiation field of pluse solution of the wave equation. II.* Proc. Royal Soc. Ser. A. Math., Phys. Sci., **279**, No. 1378 (1964), 386–394.
2. P. D. Lax and R. F. Philips, *Scattering theory.* Berlin-Gottin-gen-Heidelberg, Springer-Verlag (1967), p.321.
3. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения.* Исследования V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Наука (1971), 29–35.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Физматгиз (1959).
5. H. E. Moses and R. T. Prosser, *Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of the new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations.* SIAM J. Appl. Math., **50**, No. 5 (1990), 1325–1340.

Blagoveschenskii A. S., Novitskaya A. A. On behavior of the solution of a generalized Cauchy problem for the wave equation at infinity.

We prove an asymptotic formula for a Cauchy problem for the wave equation for a point (x, t) moving to infinity in a characteristic direction. Initial data are generalized functions with a compact support.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 20 декабря 2001 г.