Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

М. И. Белишев, В. М. Исаков

К ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ

0. Введение

0.1. О работе. В 1993 году Д. Татару обобщил теорему Хольмгрена–Йона о единственности продолжения решения волнового уравнения через нехарактеристическую поверхность на случай неаналитических коэффициентов [15]. Одно из следствий этого замечательного результата – граничная управляемость динамической системы, описываемой скалярным волновым уравнением: такая система локально приближенно управляема на любом конечном интервале времени. Последнее свойство является центральным для BC-метода – подхода к обратным задачам, основанного на их связях с теорией граничного управления [1].

В 1998 году теорема Хольмгрена–Йона–Татару была обобщена на векторные системы и, в частности, на систему Максвелла [7]. Это обобщение позволило разработать вариант BC-метода, восстанавливающий скорость электромагнитных волн в регулярной зоне – приграничном слое, в котором регулярны полугеодезические координаты [3, 4].

В этой работы мы показываем, что та же теорема единственности [7] позволяет восстанавливать электрическую и магнитную проницаемости во *всей* области по динамическим граничным данным, известным на конечном временном интервале, длина которого определяется геометрией области.

0.2. Система Максвелла. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой[1] связной границей Γ рассматривается динамическая система

Работа поддержана грантом РФФИ No. 02-01-00260 и NSF-грантами LMS 98-03816 и DMS 01-04029.

[1]всюду в работе "гладкий" означает "C^∞-гладкий".

$$\varepsilon e_t = \operatorname{rot} h, \quad \mu h_t = -\operatorname{rot} e \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T); \tag{0.1}$$

$$e\big|_{t=0} = 0, \qquad h\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{0.2}$$

$$e_\theta = f \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0,T], \tag{0.3}$$

в которой ε, μ суть гладкие положительные в $\overline{\Omega}$ функции (проницаемости); e_θ – касательная составляющая e на Γ; f – граничное управление; $e = e^f(x,t)$, $h = h^f(x,t)$ – решение. Отметим известные равенства

$$\operatorname{div} \varepsilon e^f(\,\cdot\,,t) = \operatorname{div} \mu h^f(\,\cdot\,,t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

следующие из (0.1), (0.2).

С системой (0.1)–(0.3) ассоциирован оператор реакции $R^T : f \to -\nu \times h^f\big|_{\Gamma\times[0,T]}$, описывающий соответствие "вход $\to$ выход".

Функция $c := (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$ есть скорость распространения электромагнитных волн. Скорость определяет оптическую метрику

$$ds^2 = \frac{|dx|^2}{c^2}$$

в $\overline{\Omega}$; пусть dist_c есть соответствующее расстояние; определим

$$T_* := \max_{x\in\Omega} \operatorname{dist}_c(x,\Gamma).$$

0.3. Основной результат. Обратная задача состоит в восстановлении ε, μ в Ω по заданному оператору реакции. Основной результат работы таков:

Теорема 1. *При любом $T > T_*$ оператор R^{2T} определяет функции ε, μ в Ω единственным образом.*

Доказательство проводится по следующей схеме:

(i) пользуясь управляемостью системы (0.1)–(0.3), мы продолжаем оператор реакции на все времена по схеме работы [2];

(ii) оператор R^T, известный при всех $T > 0$, определяет т.н. монохроматические граничные данные (отображение "Дирихле $\to$ Нейман") на любой фиксированной частоте; последние определяют ε, μ единственным образом [14].

1. Электрическая подсистема

1.1. Подсистема, пространства, операторы. Исключая магнитную компоненту из (0.1)–(0.3), получаем систему

$$e_{tt} - Le = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T); \tag{1.1}$$

$$e\big|_{t=0} = e_t\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{1.2}$$

$$e_\theta = f \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0,T], \tag{1.3}$$

в которой

$$L := -\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}; \tag{1.4}$$

f – граничное управление. Приведем известные свойства ее решения $e = e^f(x,t)$.

(i) Обозначим

$$\mathcal{M}^T := \big\{f \in C^\infty([\Gamma \times [0,T]; \mathbb{R}^3) \,\big|\, \mathrm{supp}\, f \subset \Gamma \times (0,T]; f \cdot \nu = 0\big\},$$ [2]

где ν – нормаль к Γ. При $f \in \mathcal{M}^T$ система (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение $e^f \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T]; \mathbb{R}^3)$, для которого

$$\mathrm{div}\,\varepsilon e^f(\,\cdot\,,t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.5}$$

По независимости параметров системы от времени имеем:

$$e^{f_t} = e^f_t; \quad e^{f_{tt}} = e^f_{tt} = \langle \text{см.}(1.1)\rangle = Le^f. \tag{1.6}$$

(ii) Используя схему работы [8], основанной на результатах [12], можно показать, что отображение $f \mapsto e^f$ непрерывно из $L_2(\Gamma \times [0,T]; \mathbb{R}^3)$ в $C([0,T]; H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3))$.[3]

(iii) Обозначим

$$\Omega^\xi := \big\{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}_c(x,\Gamma) < \xi\big\}, \quad \xi > 0.$$

Соотношение

$$\mathrm{supp}\, e^f(\,\cdot\,,t) \subset \overline{\Omega}^t, \quad 0 < t \leqslant T \tag{1.7}$$

отвечает конечности скорости распространения электромагнитных волн.

---

[2] $a \cdot b$ и $a \times b$ – стандартные скалярное и векторное произведения в $\mathbb{R}^3$.

[3] $H^\alpha(\dots)$ – соболевские классы; все функциональные пространства в работе вещественны.

Пространство управлений

$$\mathcal{F}^T := \{ f \in L_2(\Gamma \times [0,T]; \mathbb{R}^3) \mid f(\,\cdot\,,t) \cdot \nu = 0 \ \ \text{на} \ \ \Gamma, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \}$$

называется внешним пространством системы (1.1)–(1.3).

Пространство

$$\mathcal{J} := \{ y \in L_{2,\varepsilon}(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} \varepsilon y = 0 \ \ \text{в} \ \ \Omega \}$$

(с мерой $\varepsilon \mathrm{d}x$) называется внутренним.

Отображение “вход $\mapsto$ состояние” $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{J}$, $\operatorname{Dom} W^T = \mathcal{M}^T$,

$$W^T f := e^f(\,\cdot\,, T)$$

называется оператором управления. Этот оператор неограничен,[4] но замыкаем. Замыкаемость легко следует из свойства (ii).

Отображение “вход $\mapsto$ выход” реализуется оператором реакции $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \mathcal{M}^T$,

$$R^T f := I^T \left[\nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} e^f \right] \Big|_{\Gamma \times [0,T]},$$

где $I^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ – интегрирование:

$$(I^T g)(\,\cdot\,, t) := \int\limits_0^t g(\,\cdot\,, s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

1.2. Управляемость. Множество

$$\mathcal{E}^T := \operatorname{Ran} W^T = \{ e^f(\,\cdot\,, T) \mid f \in \mathcal{M}^T \} \subset \mathcal{J}$$

называется достижимым (к моменту $t = T$). По свойству (iii), п. 1.1, при временах $T < T_*$ подобласть Ω^T не покрывает Ω, вследствие чего вложение $\mathcal{E}^T \subset \mathcal{J}$ заведомо не плотно. При $T > T_*$ имеем $\Omega^T = \Omega$ и, как показано в [3], выполнено соотношение

$$\operatorname{clos} \mathcal{E}^T = \mathcal{J}, \quad T > T_*. \tag{1.8}$$

Оно интерпретируется как приближенная граничная управляемость системы (1.1)–(1.3) в Ω. Доказательство соотношения (1.8) основано на теореме единственности продолжения решения уравнений Максвелла через нехарактеристическую поверхность [7].

[4] этот факт обнаружен Д. Татару.

1.3. Двойственная система. Система

$$e_{tt} - Lv = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T); \tag{1.9}$$

$$e\big|_{t=T} = 0, \qquad e_t\big|_{t=T} = y \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{1.10}$$

$$e_\theta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0, T] \tag{1.11}$$

называется двойственной системе (1.1)–(1.3); отметим известные свойства ее решения $v = v^y(x, t)$.

(i) Обозначим

$$\mathcal{D} := \left\{ y \in \mathcal{J} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3) \mid (L^j y)_\theta = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \ j = 0, 1, \dots \right\};$$

при $y \in \mathcal{D}$ задача (1.9)–(1.11) имеет единственное классическое решение $v^y \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$, для которого

$$\operatorname{div} \varepsilon v^y(\,\cdot\,, t) = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.12}$$

(ii) Отображение $y \to v^y$ непрерывно из $\mathcal{J}$ в $C([0, T]; \mathcal{J})$.

(iii) При $f \in \mathcal{M}^T$, $y \in \mathcal{D}$ решения систем (1.1)–(1.3) и (1.9)–(1.11) связаны соотношением двойственности

$$\left(e^f(\,\cdot\,, T), y\right)_{\mathcal{J}} = \left(f, \nu \times \tfrac{1}{\mu} \operatorname{rot} v^y \Big|_{\Gamma \times [0,T]}\right)_{\mathcal{F}^T}. \tag{1.13}$$

Соотношение (1.13) устанавливается интегрированием по частям (см., например, [3]); из него, в частности, следует включение $\operatorname{Dom}(W^T)^* \subset \mathcal{D}$ и представление

$$\left(W^T\right)^* y = \nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} v^y \Big|_{\Gamma \times [0,T]} \tag{1.14}$$

для $y \in \mathcal{D}$.

1.4. Связывающая форма. Билинейная форма $c^T : \mathcal{F}^T \times \mathcal{F}^T \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom} c^T = \mathcal{M}^T \times \mathcal{M}^T$,

$$c^T[f, g] := \left(W^T f, W^T g\right)_{\mathcal{J}} = \left(e^f(\,\cdot\,, T), e^g(\,\cdot\,, T)\right)_{\mathcal{J}} \tag{1.15}$$

называется связывающей. Она неотрицательна и замыкаема (по замыкаемости W^T).

Важный факт состоит в том, что связывающая форма определяется оператором реакции. Для формулировки результата приведем формулу Грина

$$\int_\Omega \mathrm{d}x \varepsilon \left[Ly \cdot w - yLw \right] =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}\Gamma \left[\left(\nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} y \right) \cdot w_\theta - y_\theta \cdot \left(\nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} w \right) \right], \tag{1.16}$$

справедливую для гладких y, w и введем операторы $\Pi^{2T}_{\pm} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^T$,

$$(\Pi^{2T}_{\pm} g)(\,\cdot\,, t) := \frac{1}{2}\big[g(\,\cdot\,, t) \pm g(\,\cdot\,, 2T - t)\big], \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Лемма 1. *Для f, $g \in \mathcal{M}^T$ справедливо представление*

$$c^T[f, g] = \big(\Pi^{2T}_{+} \widetilde{f}, R^T g\big)_{\mathcal{F}^T} + \big(\Pi^{2T}_{-} R^{2T} \widetilde{f}, g\big)_{\mathcal{F}^T}, \tag{1.17}$$

в котором $\widetilde{f} \in \mathcal{M}^{2T}$ – произвольное продолжение управдения f с $\Gamma \times [0, T]$ на $\Gamma \times [0, 2T]$.

Доказательство. Выберем $\widetilde{f} \in \mathcal{M}^{2T} : \widetilde{f}\big|_{\Gamma \times [0,T]} = f$. Для функции Благовещенского

$$b(s, t) := \big(e^{\widetilde{f}}(\,\cdot\,, s), e^g(\,\cdot\,, t)\big)_{\mathcal{J}}, \quad (s, t) \in [0, 2T] \times [0, T]$$

имеем равенства:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) b(s, t) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\varepsilon \Big[e^{\widetilde{f}}(x, s) \cdot e^g_{tt}(x, t) - e^{\widetilde{f}}_{tt}(x, s) \cdot e^g(x, t)\Big] =$$

$$= \langle \text{см.}(1.1)\rangle = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\varepsilon \Big[e^f(x, s) \cdot (Le^g)(x, t) - (Le^{\widetilde{f}})(x, s) \cdot e^g(x, t)\Big] =$$

$$\langle \text{см.}(1.16)\rangle = \int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}\Gamma \Big[e^{\widetilde{f}}_\theta(\gamma, s) \cdot \Big(\nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} e^g\Big)(\gamma, t) -$$

$$- \Big(\nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} e^{\widetilde{f}}\Big)(\gamma, s) \cdot e^g_\theta(\gamma, t)\Big] =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}\Gamma \Big[\widetilde{f}(\gamma, s) \cdot \big(R^T g\big)_t(\gamma, t) - \big(R^{2T} \widetilde{f}\big)_t(\gamma, s) \cdot g(\gamma, t)\Big]. \tag{1.18}$$

Интегрируя в (1.18) по формуле Д'Аламбера с учетом равенств

$$b(s, 0) = b_t(s, 0) = \langle \text{см.}(1.2)\rangle = 0$$

и полагая $s = t = T$, получаем:

$$b(T,T) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T d\eta \int_\eta^{2T-\eta} d\xi \int_\Gamma d\Gamma \Big[\widetilde{f}(\gamma,\xi)\cdot\big(R^T g\big)_t(\gamma,\eta) - \big(R^{2T}\widetilde{f}\big)_t(\gamma,\xi)\cdot g(\gamma,\eta)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma\times[0,T]} d\Gamma d\eta \Big[\widetilde{f}(\gamma, 2T-\eta) + \widetilde{f}(\gamma,\eta)\Big]\cdot(R^T g)(\gamma,\eta) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma\times[0,T]} d\Gamma d\eta \Big[(R^{2T}\widetilde{f})(\gamma,2T-\eta) - (R^{2T}\widetilde{f})(\gamma,\eta)\Big]\cdot g(\gamma,\eta) =$$

$$= \big(\Pi_+^{2T}\widetilde{f}, R^T g\big)_{\mathcal{F}^T} + \big(\Pi_-^{2T}R^{2T}\widetilde{f}, g\big)_{\mathcal{F}^T}. \tag{1.19}$$

По определениям имеем:

$$\begin{aligned} b(T,T) &= \big(e^{\widetilde{f}}(\,\cdot\,,T), e^g(\,\cdot\,,T)\big)_{\mathcal{J}} = \\ &= \big(e^f(\,\cdot\,,T), e^g(\,\cdot\,,T)\big)_{\mathcal{J}} = c^T[f,g]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Сопоставляя (1.19) с (1.20), получаем (1.17). Лемма доказана.

Оператор R^T очевидным образом определяется оператором R^{2T}. Следовательно, в силу (1.17), оператор R^{2T} определяет форму c^T.

Связывающая форма неотрицательна и замыкаема; пусть $\overline{c}^T$ есть ее замыкание. Форма $\overline{c}^T$ определяет (единственный) замкнутый неотрицательный оператор $\widetilde{W}^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, такой, что $\operatorname{Dom}\overline{c}^T = \operatorname{Dom}\widetilde{W}^T \times \operatorname{Dom}\widetilde{W}^T$ и

$$\overline{c}^T[f,g] = \big(\widetilde{W}^T f, \widetilde{W}^T g\big)_{\mathcal{F}^T}$$

(см. [6]). Отметим очевидное следствие леммы 1: оператор $\widetilde{W}^T$ определяется оператором R^{2T}.

Замыкание $\overline{W}^T$ оператора управления и оператор $\widetilde{W}^T$ связаны соотношением (полярным представлением)

$$\overline{W}^T = E^T\widetilde{W}^T, \tag{1.21}$$

в котором E^T есть изометрия из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{J}$, отображающая $\operatorname{Ran}\widetilde{W}^T$ на $\operatorname{Ran}\overline{W}^T \supset \mathcal{E}^T$. Согласно (1.8), при $T > T_*$. Оператор E^T действует *на* $\mathcal{J}$.

2. Оператор L_e^T

2.1. Оператор L_0. На гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условию (1.5) оператор (1.4) имеет известное представление

$$Ly = \frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta y + L_1 y,$$

в котором L_1 есть дифференциальный оператор 1-го порядка.

Другой известный факт состоит в том, что оператор $L_0 : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, $\operatorname{Dom} L_0 = \{y \in \mathcal{J} \cap H^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \mid y_\theta = 0 \text{ на } \Gamma\}$, $L_0 y := Ly$ самосопряжен, отрицательно определен и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$: $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$ [13]. Отметим, что отсутствие нулевого собственного значения, влекущее существование и непрерывность L_0^{-1}, следует из принятого в начале работы предположения о связности границы Γ. Собственные функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$: $L_0\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$; $(\varphi_k, \varphi_l)_{\mathcal{J}} = \delta_{kl}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{J}$.

Для введенного в п. 1,3 множества $\mathcal{D}$ имеем:

$$\mathcal{D} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \operatorname{Dom} L_0^j \subset C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3).$$

2.2. Оператор L_e^T. Во внешнем пространстве системы (1.1)–(1.3) введем гладкий линеал

$$\mathcal{M}_0^T := \left\{ f \in \mathcal{M}^T \;\middle|\; f\big|_{t=T} = 0 \right\}$$

и определим множество

$$\mathcal{E}_0^T := W^T \mathcal{M}_0^T \subset \mathcal{E}^T.$$

При $f \in \mathcal{M}_0^T$ имеем равенства $e_\theta^f(\,\cdot\,,T)\big|_\Gamma = f(\,\cdot\,,T) = 0$, следствием которых является включение $\mathcal{E}_0^T \subset \operatorname{Dom} L_0$.

Введем оператор $L_e^T : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, $\operatorname{Dom} L_e^T = \mathcal{E}_0^T$, $L_e^T y := Ly$ и отметим соотношение $L_e^T \subset L_0$, вытекающее из определений.

Графиком оператора L_e^T является множество

$$\mathcal{G}_e^T := \left\{ \left(W^T f, W^T f_{tt}\right) \mid f \in \mathcal{M}_0^T \right\} \subset \mathcal{J} \times \mathcal{J}. \tag{2.1}$$

В самом деле, график состоит из пар $\left(e^f(\,\cdot\,,T), L_e^T e^f(\,\cdot\,,T)\right)$ с $f \in \mathcal{M}_0^T$, а равенства

$$e^f(\,\cdot\,,T) = W^T f; \quad L_e^T e^f(\,\cdot\,,T) = Le^f(\,\cdot\,,T) = \langle\text{см.}(1.1)\rangle =$$
$$e_{tt}^f = \langle\text{см.}(1.6)\rangle = e^{f_{tt}}(\,\cdot\,,T) = W^T f_{tt}$$

ведут к (2.1).

Следующий результат играет ключевую роль и оставшаяся часть п. 2 посвящена его доказательству.

Теорема 2. *При $T > T_*$ справедливо соотношение*

$$\overline{L}_e^T = L_0 \tag{2.2}$$

($(^{-})$ – замыкание оператора).

2.3. Спектральное представление. Регуляризация. Метод Фурье в задаче (1.9)–(1.10) дает известное представление ее решения в виде разложения по собственному базису оператора L_0:

$$v^y(\,\cdot\,,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-T)}{\sqrt{-\lambda_k}}(y,\varphi_k)_{\mathcal{J}}\,\varphi_k(\,\cdot\,), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.3}$$

Продолжим v^y на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, полагая его равным правой части (2.3) при всех t; отметим включение $v^y \in C(\mathbb{R};\mathcal{J})$.

Выберем и фиксируем функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, такую, что $\eta(-t) = \eta(t)$, $t\in\mathbb{R}$; $\eta \geqslant 0$; $\operatorname{supp}\eta \subset [-1,1]$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(s)\mathrm{d}s = 1$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\eta_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t\in\mathbb{R}.$$

По свойствам η имеем:

$$\big(\eta_\varepsilon * v^y\big)(\,\cdot\,,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\varepsilon(s)v^y(\,\cdot\,,t-s)\mathrm{d}s = \langle \text{см.}(2.3)\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\varepsilon(s)\sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-T-s)\mathrm{d}s\right]\big(y,\varphi_k\big)_{\mathcal{J}}\,\varphi_k(\,\cdot\,) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-T)}{\sqrt{-\lambda_k}}\left[\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\eta_\xi(s)\cos\sqrt{-\lambda_k}\,s\mathrm{d}s\right]\big(y,\varphi_k\big)_{\mathcal{J}}\,\varphi_k(\,\cdot\,) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-T)}{\sqrt{-\lambda_k}}\rho_k^\varepsilon\big(y,\varphi_k\big)_{\mathcal{J}}\,\varphi_k(\,\cdot\,) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-T)}{\sqrt{-\lambda_k}} \big(y_\varepsilon, \varphi_k\big)_{\mathcal{J}}\, \varphi_k(\,\cdot\,) = v^{y_\varepsilon}(\,\cdot\,, t), \tag{2.4}$$

где

$$\rho_k^\varepsilon := \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(s) \cos\sqrt{-\lambda_l}\, s\,\mathrm{d}s; \qquad y^\varepsilon := \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^\varepsilon \big(y, \varphi_k\big)_{\mathcal{J}}\, \varphi_k.$$

Последовательность $\{\rho_k^\varepsilon\}$ обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

(i) $|\rho_k^\varepsilon| \leqslant 1$; $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \rho_k^\varepsilon = 1$ равномерно по $k \in [0, K]$ с любым фиксированным $K > 0$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \big(\sqrt{-\lambda_k}\big)^\alpha |\rho_k^\varepsilon| = 0$ при любом $\alpha \geqslant 0$.

Из них следуют соответствующие свойства y_ε:

(iii) $\|y_\varepsilon\| \leqslant \|y\|$; $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon = y$ в $\mathcal{J}$;

(iv) $y_\varepsilon \in \mathcal{D} \subset C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$.

Из последнего следует $v^{y_\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{J})$; кроме того, как нетрудно видеть, $v^{y_\varepsilon} \to v^y$ при $\varepsilon \to 0$ в $C([0,T]; \mathcal{J})$ с любым $T > 0$. В этом смысле, v^{y_ε} можно рассматривать как регуляризацию исходного решения v^y.

2.4. Лемма о регуляризации. Фиксируем положительное $\varepsilon < T$, выберем $\delta \in (\varepsilon, T)$ и обозначим

$$\mathcal{F}^{T,\delta} := \Big\{f \in \mathcal{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times [\delta, T]\Big\}; \qquad \mathcal{M}^{T,\delta} := \mathcal{M}^T \cap \mathcal{F}^{T,\delta}.$$

Для $f \in \mathcal{F}^{T,\delta}$ корректно определено управление $f_\varepsilon \in \mathcal{F}^T$:

$$f_\varepsilon(\,\cdot\,, t) := \int\limits_0^T \big[\eta_\varepsilon(t-s) - \eta_\varepsilon(2T - t - s)\big] f(\,\cdot\,, s)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Для $f \in \mathcal{M}^{T,\delta}$ легко проверяются соотношения:

$$f_\varepsilon \in \mathcal{M}_0^T; \qquad \big(f_\varepsilon\big)_{tt} = \big(f_{tt}\big)_\varepsilon. \tag{2.5}$$

На гладких y определим оператор $N : \mathcal{J} \to L_2(\Gamma; \mathbb{R}^3)$,

$$Ny := \nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} y\Big|_\Gamma.$$

Лемма 2. *Для* $y \in \mathcal{J}$ *и* $f \in \mathcal{M}^{T,\delta}$ *выполнено равенство*

$$\left(W^T f_\varepsilon, y\right)_{\mathcal{J}} = \left(W^T f, y_\varepsilon\right)_{\mathcal{J}}. \tag{2.6}$$

Доказательство. При $y \in \mathcal{D}$ имеем $v^y \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$. Поскольку $\eta(-t) = \eta(t)$ и $v^y(\,\cdot\,, 2T-t) = -v^y(\,\cdot\,,t)$, имеем:

$$v^{y_\varepsilon}(\,\cdot\,,t) = \langle \text{см.}(2.4)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_\varepsilon(t-s) v^y(\,\cdot\,,s)\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{T} \left[\eta_\varepsilon(t-s) - \eta_\varepsilon(2T-t-s)\right] v^y(\,\cdot\,,s)\mathrm{d}s.$$

Применяя оператор N, получаем:

$$Nv^{y_\varepsilon}(\,\cdot\,,t) = \int\limits_{-\infty}^{T} \left[\eta_\varepsilon(t-s) - \eta_\varepsilon(2T-t-s)\right] Nv^y(\,\cdot\,,s)\mathrm{d}s, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Возьмем $f \in \mathcal{M}^{T,\delta}$; равенства

$$\left(W^T f_\varepsilon, y\right)_{\mathcal{J}} = \langle \text{см.}(2.4)\rangle = \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t f_\varepsilon(\gamma,t)\cdot Nv^y(\gamma,t) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\left\{\int\limits_0^T \left[\eta_\varepsilon(t-s) - \eta_\varepsilon(2T-t-s)\right] f(\gamma,s)\mathrm{d}s\right\}\cdot Nv^y(\gamma,t) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}s f(\gamma,s)\cdot\int\limits_0^T \left[\eta_\varepsilon(t-s) - \eta_\varepsilon(2T-t-s)\right] Nv^y(\gamma,t)\mathrm{d}t =$$

$$= \langle \text{по расположению носителей } \ f, f_\varepsilon \ \text{ и } \ \eta_\varepsilon\rangle =$$

$$= \int\limits_{\Gamma\times[\delta,T]} \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}s\ldots\int\limits_{-\infty}^{T}\ldots\mathrm{d}t = \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}s\ldots\int\limits_{-\infty}^{T}\ldots\mathrm{d}t = \langle\text{см.}(2.7)\rangle =$$

$$= \left(f, Nv^{y_\varepsilon}\right)_{\mathcal{F}^T} = \langle\text{см.}(1.13)\rangle = \left(W^T f, y_\varepsilon\right)_{\mathcal{J}}$$

устанавливают (2.6) для выбранного y. По плотности $\mathcal{D}$ в $\mathcal{J}$ и непрерывности соответствия $y \mapsto y_\varepsilon$ в норме $\mathcal{J}$, этот результат распространяется на все $y \in \mathcal{J}$. Лемма доказана.

2.5. Лемма о $\operatorname{Ran} L_e^T$. Завершение доказательства.

Лемма 3. *При $T > T_*$ линеал $\operatorname{Ran} L_e^T$ плотен в $\mathcal{J}$.*

Доказательство. Выберем ε и δ так, чтобы $0 < \varepsilon < \delta < T - T_*$. По стационарности системы (1.9)–(1.11) (независимости оператора L от времени) имеем:

$$W^T \mathcal{M}^{T,\delta} = W^{T-\delta} \mathcal{M}^{T-\delta} = \mathcal{E}^{T-\delta},$$

откуда, в силу (1.8) и по выбору $T - \delta > T_*$ имеем:

$$\operatorname{clos} W^T \mathcal{M}^{T,\delta} = \mathcal{J}. \tag{2.8}$$

Равенство

$$\operatorname{clos} W^T \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{M}^{T,\delta} = \mathcal{J} \tag{2.9}$$

следует из равенства $\mathcal{M}^{T,\delta} = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{M}^{T,\delta}$ и соотношения (2.8).

Для $y \in \mathcal{J} \ominus \operatorname{clos} \operatorname{Ran} L_e^T$ и произвольного $f \in \mathcal{M}^{T,\delta}$, с учетом (2.5), имеем:

$$\begin{aligned} 0 = \left(L_e^T e^{f_\varepsilon}(\,\cdot\,, T), y\right)_{\mathcal{J}} = \left(L W^T f_\varepsilon, y\right)_{\mathcal{J}} = \langle \text{см.}(1.6) \rangle = \\ = \left(W^T (f_\varepsilon)_{tt}, y\right)_{\mathcal{J}} = \langle \text{см.}(2.5) \rangle = \left(W^T (f_{tt})_\varepsilon, y\right)_{\mathcal{J}} = \\ = \langle \text{см.}(2.6) \rangle = \left(W^T f_{tt}, y_\varepsilon\right)_{\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

Из (2.9) заключаем: $y_\varepsilon = 0$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, по свойству (iii), п. 2.3 получаем $y = 0$. Лемма доказана.

Итак, согласно лемме 3, выполняются соотношения $\operatorname{clos} \operatorname{Ran} L_e^T = \operatorname{Ran} L_0 = \mathcal{J}$. Утверждение теоремы 2 немедленно следует из соотношения $L_e^T \subset L_0$ и ограниченной обратимости оператора L_0.

3. Продолжение данных и восстановление параметров

3.1. Свободная динамика. Рассмотрим систему

$$w_{tt} - Lw = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty); \tag{3.1}$$

$$w\big|_{t=0} = a, \qquad w_t\big|_{t=0} = b \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{3.2}$$

$$w_\theta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0, \infty) \tag{3.3}$$

с a, $b \in \mathcal{J}$; пусть $w^{a,b}$ есть ее решение. В п. 3.1 будет получено представление для следа $N w^{a,b} = \nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} w^{a,b}$ на $\Gamma \times [0, \infty)$.

Эволюция системы (3.1)–(3.3) определяется оператором L_0:

$$w^{a,b}(\,\cdot\,,t)=\left[\cos t(-L_0)^{\frac{1}{2}}\right]a+(-L_0)^{\frac{1}{2}}\left[\sin t(-L_0)^{\frac{1}{2}}\right]b,\quad t\geqslant 0. \qquad (3.4)$$

Введем инверсию $Y^T:\mathcal{F}^T\to\mathcal{F}^T$,

$$(Y^Tf)(\,\cdot\,,t):=f(\,\cdot\,,T-t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

и возьмем в (3.2) a, $b\in\mathcal{D}$, так что решение будет классическим: $w^{a,b}\in C^\infty([0,\infty);\mathcal{D})$. Сопоставляя (3.1)–(3.3) с (1.9)–(1.11), легко получаем:

$$w^{a,b}(\,\cdot\,,t)=-\tfrac{\partial}{\partial t}\left[v^a(\,\cdot\,,T-t)\right]-v^b(\,\cdot\,,T-t)\ \text{ в }\ \Omega,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

откуда

$$Nw^{a,b}(\,\cdot\,,t)=-\tfrac{\partial}{\partial t}Nv^a(\,\cdot\,,T-t)-Nv^b(\,\cdot\,,T-t)\ \text{ на }\ \Gamma,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

и, согласно (1.14),

$$Nw^{a,b}(\,\cdot\,,t)=Y^T\left[\tfrac{\partial}{\partial t}(W^T)^*a-(W^T)^*b\right],\quad 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (3.5)$$

Обозначим $\Sigma_j^T:=\Gamma\times[jT,(j+1)T]$, $j=0,1,\dots$ и введем оператор $\mathcal{T}_j$, переводящий функции на Σ_0^T в функции на Σ_j^T по правилу:

$$(\mathcal{T}_j^Tf)(\,\cdot\,,t):=f(\,\cdot\,,t-jT),\quad jT\leqslant t\leqslant(j+1)T.$$

Соотношение (3.5) и сдвиг по времени приводят к представлению:

$$Nw^{a,b}\Big|_{\Sigma_j^T}=\mathcal{T}_j^TY^T\left[\frac{\partial}{\partial t}(W^T)^*w^{a,b}(\,\cdot\,,jT)-\right.$$
$$\left.-(W^T)^*w_t^{a,b}(\,\cdot\,,jT)\right],\quad j=0,1,\dots. \qquad (3.6)$$

Чтобы записать его в окончательном виде, введем операторы в $\mathcal{J}$:

$$A(t):=\cos t(-L_0)^{\frac{1}{2}};\qquad A_t(t):=-(-L_0)^{\frac{1}{2}}\sin t(-L_0)^{\frac{1}{2}};$$
$$B(t):=(-L_0)^{-\frac{1}{2}}\sin t(-L_0)^{\frac{1}{2}};\qquad B_t(t)=\cos t(-L_0)^{\frac{1}{2}},\quad t\geqslant 0$$

с $\operatorname{Dom}A_t(t)=\operatorname{Dom}(-L_0)^{\frac{1}{2}}$. Представляя

$$w^{a,b}(\,\cdot\,,t)=A(t)a+B(t)b;\quad w_t^{a,b}(\,\cdot\,,t)=A_t(t)a+B_t(t)b$$

(см. (3.4)) и подставляя в (3.6), после простых преобразований получим:

$$Nw^{a,b}\Big|_{\Sigma_j^T} = \mathcal{T}_j^T Y^T \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t}(W^T)^* A(jT) - (W^T)^* A_t(jT) \right] a + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial t}(W^T)^* B(jT) - (W^T)^* B_t(jT) \right] b \right\}, \quad j = 0, 1, \dots . \tag{3.7}$$

3.2. Электрическая подсистема с $T = \infty$. Рассмотрим систему

$$e_{tt} - Le = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty); \tag{3.8}$$

$$e\big|_{t=0} = e_t\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{3.9}$$

$$e_\theta = f \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0, \infty) \tag{3.10}$$

с управлением $f \in \mathcal{M}^\infty$. Отклик системы (3.8)–(3.10) на действие управления описывается оператором

$$R^\infty f := I\Big[\nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} e^f\Big]\Big|_{\Gamma \times [0,\infty)} = INe^f,$$

где I – интегрирование: $(Ig)(\,\cdot\,, t) := \int\limits_0^t g(\,\cdot\,, s)\mathrm{d}s$, $t \geqslant 0$.

Фиксируем конечное $T > 0$ и возьмем f такое, что $\operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0, T)$. При временах $t \geqslant T$ это управление аннулируется и дальнейшая эволюция решения описывается системой (3.1)–(3.3):

$$e^f(\,\cdot\,, t) = w^{a,b}(\,\cdot\,, t - T), \quad t \geqslant T \tag{3.11}$$

с $a = e^f(\,\cdot\,, T) = W^T f$, $b = e^f_t(\,\cdot\,, T) = W^T f_t$. Применяя краевой оператор N в (3.11) и используя (3.7), легко получаем:

$$Ne^f\Big|_{\Sigma_j^T} = \mathcal{T}_j^T Y^T \{P_j^T + Q_j^T\} f, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{3.12}$$

где

$$P_j^T := \frac{\partial}{\partial t}(W^T)^* A\big((j-1)T\big) W^T - (W^T)^* A_t\big((j-1)T\big) W^T;$$

$$Q_j^T := \left[\frac{\partial}{\partial t}(W^T)^* B\big((j-1)T\big) W^T - (W^T)^* B_t\big((j-1)T\big) W^T\right] \frac{\partial}{\partial t}.$$

Наконец, из определения R^∞ и (3.12) получаем нужное представление:

$$R^\infty f = I \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} R^{2T} f & \text{на} \ \ \Sigma_0^T \cup \Sigma_1^T; \\ \mathcal{T}_j^T Y^T \{P_j^T + Q_j^T\} f & \text{на} \ \ \Sigma_j^T, \quad j = 2, 3, \dots . \end{cases} \tag{3.13}$$

Если условие $\operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0, T)$ не выполнено, представим управление в виде $f = \sum\limits_p f_p$ с гладкими f, такими, что $\operatorname{supp} f_p \subset \Gamma \times (t_p, t_p + T)$ с некоторыми положительными t_1, $t_2, \dots$ и обозначим $\check{f}_p(\,\cdot\,, t) := f_p(\,\cdot\,, t + t_p)$, так что $\operatorname{supp} \check{f}_p \subset \Gamma \times (0, T)$. Каждое $R^\infty \check{f}_p$ можно представить в виде (3.13); затем, комбинируя

$$(R^\infty f)(\,\cdot\,, t) = \textstyle\sum_p (R^\infty \check{f}_p)(\,\cdot\,, t - t_p),$$

получим представление вида (3.13), которое выражает R^∞ через R^{2T} и операторы P_j^T, Q_j^T.

3.3. Внешнее представление. Покажем, что при $T > T_*$ правая часть представления (3.13) определяется оператором R^{2T}. Напомним, что изометрия E^T определяется соотношением (1.21).

Оператор $\widetilde{L}_e^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} \widetilde{L}_e^T = (E^T)^* \operatorname{Dom} L_e^T = (E^T)^* \mathcal{E}_0^T$,

$$\widetilde{L}_e^T := (E^T)^* L_e^T E^T$$

определяется своим графиком

$$\widetilde{\mathcal{G}}_e^T = \left\{ \big(\widetilde{W} f, \widetilde{W} f_{tt}\big) \,\big|\, f \in \mathcal{M}_0^T \right\} \subset \mathcal{F}^T \times \mathcal{F}^T \tag{3.14}$$

(ср. с (2.1)).

При $T > T_*$ имеем:

$$\overline{\widetilde{L}}{}_e^T = (E^T)^* \overline{L}_e^T E^T = \langle \text{см.}(2.2) \rangle = (E^T)^* L_0 E^T.$$

Соответственно, для оператор-функций получаем:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A}^T(t) := (E^T)^* A(t) E^T = \cos t \big[-(E^T)^* L_0 E^T\big]^{-\frac{1}{2}} = \cos t \big(-\overline{\widetilde{L}}{}_e^T\big)^{\frac{1}{2}}; \\
&\widetilde{A}_t^T(t) := (E^T)^* A_t(t) E^T = -\big(-\overline{\widetilde{L}}{}_e^T\big)^{\frac{1}{2}} \sin t \big(-\overline{\widetilde{L}}{}_e^T\big)^{\frac{1}{2}}; \\
&\widetilde{B}(t) := (E^T)^* B(t) E^T = \big(-\overline{\widetilde{L}}{}_e^T\big)^{-\frac{1}{2}} \sin t \big(-\overline{\widetilde{L}}{}_e^T\big)^{\frac{1}{2}}; \\
&\widetilde{B}_t(t) := (E^T)^* B_t(t) E^T = \cos t \big(-\overline{\widetilde{L}}{}_e^T\big)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \geqslant 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

и, как следствие

$$\begin{aligned} P_j^T &= \langle \text{см.}(1.21),(3.15)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{W}^T)^*\widetilde{A}\big((j-1)T\big)\widetilde{W}^T -\\ &\quad - (\widetilde{W}^T)^*\widetilde{A}_t\big((j-1)T\big)\widetilde{W}^T =: \widetilde{P}_j^T;\\ Q_j^T &= \langle \text{см.}(1.21),(3.15)\rangle = \Big[\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{W}^T)^*\widetilde{B}\big((j-1)T\big)\widetilde{W}^T -\\ &\quad - (\widetilde{W}^T)^*\widetilde{B}_t\big((j-1)T\big)\widetilde{W}^T\Big]\frac{\partial}{\partial t} =: \widetilde{Q}_j^T. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.13), получаем представление

$$R^\infty f = I\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}R^{2T}f & \text{на } \ \Sigma_0^T\cup\Sigma_1^T;\\ T_j^T Y^T\big\{\widetilde{P}_j^T+\widetilde{Q}_j^T\big\}f & \text{на } \ \Sigma_j^T, \quad j=2,3,\dots, \end{cases} \tag{3.17}$$

которое мы называем *внешним*: все входящие в него операторы действуют во внешнем пространстве системы (3.8)–(3.10).

Теорема 3. *При любом $T > T_*$ оператор R^{2T} определяет оператор R^∞.*

Доказательство. Оператор R^{2T} определяет форму c^T (см. (1.17)); форма c^T определяет оператор $\widetilde{W}^T$. Оператор $\widetilde{W}^T$ определяет оператор $\widetilde{L}_e^T$ (через график (3.14)) и его замыкание $\overline{\widetilde{L}}_e^T$. При $T > T_*$ оператор $\overline{\widetilde{L}}_e^T$ определяет оператор-функции (3.15), а с ними и операторы $\widetilde{P}_j^T$, $\widetilde{Q}_j^T$ (см. (3.16)). Последние определяют правую часть представления (3.17). Теорема доказана.

Задача продолжения $R^{2T}\mapsto R^\infty$ восходит к классической проблеме продолжения эрмитово-положительных функций и ядер [10] (см. также [5]), причем в нашем случае роль условия позитивности играет неотрицательность формы c^T. Представление (3.17) обобщает представление оператора реакции из работы [2]. Другой вариант продолжения в скалярном случае, использующий BC-метод, предложен в [11]. Примеры применения продолжений в обратных задачах можно найти в [9].

3.4. Определение параметров. Рассмотрим стационарную систему Максвелла на фиксированной частоте $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} &-i\omega\varepsilon e = \operatorname{rot} h; \quad i\omega\mu h = \operatorname{rot} e \quad \text{в} \quad \Omega; \\ &\operatorname{div} \varepsilon e = 0, \qquad \operatorname{div} \mu h = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \\ &e_\theta = g \quad \text{на} \quad \Gamma; \end{aligned}$$

пусть $e = e^g(x,\omega)$, $h = h^g(x,\omega)$ есть ее решение. Как показано в работе [14], оператор

$$\Lambda_\omega : g \to \nu \times h^g$$

единственным образом определяет проницаемости ε и μ в Ω.

Выберем и фиксируем функцию $\eta \in C_0^\infty(0,\infty)$; выберем $g \in C^\infty(\Gamma;\mathbb{R}^3)$, $\nu \cdot g = 0$. Рассмотрим систему (3.8)–(3.10) с управлением $f = g(\gamma)\eta(t)$ и доопределим ее решение при отрицательных временах, полагая $f\big|_{t<0} = 0$, $e^f\big|_{t<0} = 0$. Проводя преобразование Фурье

$$(Fu)(\,\cdot\,,\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(\,\cdot\,,t)\mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

и выбирая ω так, чтобы $(F\eta)(\omega) \neq 0$, можно получить представление

$$\Lambda_\omega g = (F\eta)^{-1} F R^\infty(g\eta),$$

определяющее Λ_ω через R^∞. Теорема 3 вместе с упомянутым выше результатом [14] приводят к утверждению теоремы 1.

Литература

1. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics.* — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
2. M. I. Belishev, *On relations between spectral and dynamical inverse data.* PDMI Preprint-17/2000.
3. М. И. Белишев, А. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и Анализ **12**, No. 2 (2000), 131–182.
4. М. И. Белишев, В. М. Исаков, Л. Н. Пестов, В. А. Шарафутдинов, *К реконструкции метрики по внешним электромагнитным измерениям.* — Докл. РАН **372**, No. 3 (2000), 298–300.
5. Ю. М. Березанский, *Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов.* Наукова думка, Киев (1965).
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд. ЛГУ, Ленинград (1980).

7. M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura, and D. Tataru, *Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell's and elasticity systems.* Nonlinear PDE, College de France Seminar J.-L. Lions, Elsevier–Ganthier Villlar "Series in Appl. Mathematics", Vol. 7 (2002).
8. А. К. Гласман, *О регулярности решения динамической системы Максвелла.* ПОМИ Препринт-7/2001.
9. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York (1998).
10. М. Г. Крейн, *О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций.* — ДАН СССР **26**, No. 1 (1940), 17–21.
11. Ya. Kurylev and M. Lassas, *Dynamic Inverse problem on a Riemannian manifold for a hyperbolic equation with dissipation and dispersion.* Proc. Edind. Math. Soc. (to appear).
12. I. Lasiecka, J.-L. Lions, and R. Triggiani, *Nonhomogeneous boundary-value problems for second order hyperbolic operators.* — J. Math. Pures Appl. **65** (1986), 149–192.
13. R. Leis, *Initial Boundary-Value Problems in Mathematical Physics.* Wiley (1986).
14. P. Ola, L. Paivarinta, and E. Somersalo, *An inverse boundary-value problem in electrodynamics.* — Duke Math. J. **70**, No. 3 (1993), 611–653.
15. D. Tataru, *Unique continuation for solutions of PDE's: between Hörmander's and Holmgren theorem.* — Comm. PDE **20** (1995), 855–894.

Belishev M. I., Isakov V. M. On uniqueness of recovering the parameters of the Maxwell system via dynamical boundary data.

The paper deals with the problem of determination of the parameters (functions) ε, μ of the Naxwell dynamical system

$$\begin{aligned} &\varepsilon E_t = \operatorname{rot} H, \quad \mu H_t = -\operatorname{rot} E \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T);\\ &E\big|_{t=0} = 0, \quad H\big|_{t=0} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega;\\ &E_{\tan} = f \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times [0,T] \end{aligned}$$

(tan is the tangent component; $E = E^f(x,t)$, $H = H^f(x,t)$ is the solution) through the response operator $R^T : f \to \nu \times H^f\big|_{\partial\Omega\times[0,T]}$ (ν is the normal).

The parameters determine the velocity $c = (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$, the c-metric $\mathrm{d}s^2 = c^{-2}|\mathrm{d}x|^2$, and the time $T_* = \max\limits_{\Omega} \operatorname{dist}_c(\,\cdot\,, \partial\Omega)$. We show that, for any fixed $T > T_*$, the operator R^{2T} determines ε, μ in Ω uniquely.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Wichita State University
Dept. of Math. and Statistics

Поступило 10 ноября 2001 г.