Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

А. Н. Фролов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИРАЩЕНИЙ СУММ ВДОЛЬ МОНОТОННЫХ БЛОКОВ

1. Введение

Пусть $(X,Y),(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов. Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0.$$

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического п.н. поведения максимумов

$$M_n = M(n,j,u,v) = \\ = \max_{0\le k\le n-j} (S_{k+[j]} - S_k) I\bigl\{u \le Y_{k+1} \le \dots \le Y_{k+[j]} \le v\bigr\} ,$$

где u, v фиксированы, $-\infty \le u \le v \le +\infty$, $j = j_n$, $1 \le j \le n$, $I\{B\}$ обозначает индикатор события B, а $[x]$ обозначает целую часть числа x. Отметим, что j может быть случайным. Наша задача состоит в том, чтобы отыскать последовательность положительных постоянных $\{b_n\}$ такую, что либо

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.},$$

либо, если это возможно, последнее соотношение выполнено с заменой lim sup на lim. Тогда можно использовать числовую последовательность $\{b_n\}$ для предсказания поведения стохастической последовательности $\{M_n\}$.

Будем интерпретировать случайные величины X_n как выигрыши (возможно отрицательные) игрока в партиях некоторой игры, а Y_n как величины, характеризующие успешность в некотором

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99–01–00732 и гранта ведущих научных школ 00–15–96019.

смысле отдельной партии или серии партий. Например, при $Y_n = I\{X_n > 0\}$ считаем партию успешной, если выигрыш в ней положителен, а серию успешной, если все партии серии успешны. Отметим, что в некоторых случаях можно определить успешность серии, но не отдельной партии. В самом деле, попытаемся назвать партию успешной, если выигрыш в ней больше, чем в предыдущей. Тогда $Y_n = I\{X_n > X_{n-1}\}$, а векторы (X_n, Y_n) перестают быть независимыми. Эту трудность легко обойти. Положим $Y_n = X_n$ и назовем серию партий успешной, если выигрыш в каждой следующей партии серии больше выигрыша в предыдущей.

В предложенной интерпретации M_n – это максимальный выигрыш игрока в успешных сериях длины j. Поэтому исследование асимптотики M_n представляет существенный интерес как с точки зрения теории вероятностей, так и с точки зрения актуарной и финансовой математики.

Предлагаемая схема является, конечно, очень общей и включает в себя целый ряд интересных частных случаев, возникающих при различных дополнительных предположениях о распределении вектора (X, Y), последовательности j, u и v. Рассмотрим некоторые из них.

1) Предположим, что $u = v = 1$, $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = p \in (0, 1]$.

а) Если X – невырожденная случайная величина, а $p = 1$, то M_n – это известная статистика Эрдёша–Реньи, асимптотическое поведение которой исследовано в работах [1–8]. Отметим, что $M_n = S_n$ при $j = n$ и $M_n = \max_{1 \leq k \leq n}\{X_k\}$ при $j = 1$.

б) Пусть $X = 1$ п.н., $p \in (0, 1)$, j – длина наидлиннейшей серии единиц среди $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Тогда $M_n = j$. Этот случай рассматривался в работах [9, 10]. (Обобщения результатов работ [9] и [10] можно найти в статье [11] и в работах из библиографии к ней.)

в) Если X – невырожденная случайная величина, а $p < 1$, то асимптотическое поведение M_n исследовано в [12]. (См. также [13], где рассматривался максимум типа M_n.)

2) Предположим, что $u = -\infty$, $v = +\infty$, Y имеет непрерывное распределение.

а) Пусть $X = 1$ п.н., j – длина наидлиннейшей возрастающей серии (монотонного блока) среди $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Тогда $M_n = j$.

Этот случай изучался в [14]. (Обобщения результатов работы [14] можно найти в статье [11] и в работах из библиографии к ней.)
б) Если X – невырожденная случайная величина, то предельное поведение M_n исследовано в [15, 16].

В этой статье мы рассмотрим случай невырожденного X, непрерывного Y и $-\infty < u < v < +\infty$.

2. Результаты

Пусть $P(Y = y) = 0$ для любого y. Пусть L_n – длина максимального, состоящего из принявших значения в $[u, v]$ случайных величин, монотонного блока среди $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, т.е.

$$L_n = \max\{k |\, \exists i,\ 0 \le i \le n - k,\ u \le Y_{i+1} \le \cdots \le Y_{i+k} \le v\}.$$

При исследовании поведения M_n естественно рассматривать последовательности j такие, что $j \le L_n$. Поэтому мы сначала сформулируем результат об асимптотическом поведении L_n.

Теорема 1. *Если $\{Y_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывным распределением, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{l_n} = 1 \text{ п.н.},$$

где l_n – решение относительно l уравнения $\sqrt{2\pi l} l^l e^{-l} = n$.

Для $u = -\infty$, $v = +\infty$ теорема 1 получена в [14].

Отметим, что $l_n \sim \log n / \log\log n$ при $n \to \infty$.

Пусть $p = P(u \le Y \le v) > 0$. Пусть $\overline{X}$ – случайная величина с функцией распределения $F(x) = P(X < x | u \le Y \le v)$. Предположим, что

$$P(\overline{X} = x) < 1 \quad \forall\, x, \tag{1}$$

$$0 \le E\overline{X} < \infty, \tag{2}$$

$$t_0 = \sup\{t : \varphi(t) = Ee^{t\overline{X}} < \infty\} > 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$\omega = \text{ess sup}\, \overline{X},$$

$$\zeta(z) = \sup\{zt - \log\varphi(t) : t \ge 0,\ \varphi(t) < \infty\},$$

$$\gamma(x) = \sup\{z : \zeta(z) \le x\}.$$

Известно, что $\gamma(x)$ – непрерывная, неубывающая, выпуклая вверх функция на $[0,\infty)$, и $\gamma(x)\to\omega$ при $x\to\infty$.

Положим

$$B_0=\int\limits_0^{t_0} tm'(t)dt, \tag{4}$$

где $m(t)=\varphi'(t)/\varphi(t)$, $0\le t<t_0$. Известно, что $0<B_0\le\infty$ (см., например, [4]).

Перейдем к результатам для M_n. Всюду в дальнейшем мы рассматриваем последовательность j вида

$$j=a_nl_n,$$

где $\{a_n\}$ – последовательность вещественных чисел, $a_n\in(0,1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1)–(3), $i(n)=[a_nl_n]\ge 1$, $i(n)$ *не убывает,* $(1-a_n)\log\log n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{M_n}{b_n}=1 \text{ п.н.}, \tag{5}$$

где $b_n=i(n)\gamma((1-a_n)\log n/i(n))$. *Если дополнительно выполнено условие*

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\gamma(-\log(1-F(z)))}{z}=1\ , \tag{6}$$

или $\omega<\infty$, *то в* (5) *можно заменить* $\limsup$ *на* $\lim$.

Условие (6) выполнено для нормального, геометрического, пуассоновского распределений и распределения Вейбулла (см. [5]).

Отметим, что если $u=-\infty$, $v=+\infty$, то $p=1$. В этом случае теорема 2 получена в [15]. Там же содержатся примеры вычисления b_n для нормального и экспоненциального распределений и для распределения Вейбулла. Эти примеры вместе с теоремами 1 и 2 приводят к некоторым любопытным выводам о поведении приращений сумм вдоль монотонных блоков.

Пример. Пусть X имеет стандартное нормальное распределение, $\Phi(x)=P(X<x)$.

Пусть сначала $u=-\infty$, $v=+\infty$. Нетрудно проверить, что $\gamma(x)=\sqrt{2x}$ и $b_n=\sqrt{2a_n(1-a_n)}\log n(\log\log n)^{-1/2}$. Значит b_n максимально при $a_n=1/2$. Грубо говоря, это означает, что максимальный выигрыш игрока достигается на монотонных блоках, длина которых равна половине максимально возможной для них длины. На первый взгляд кажется, что причина этого в том, что распределение X симметрично и, следовательно, половина блока – отрицательные величины. Однако из теоремы 1 при $u = 0$, $v = +\infty$ следует, что существуют монотонные блоки максимальной длины, состоящие только из положительных величин. Дело здесь в том, что если $u = 0$, $v = +\infty$, то $F(x) = 2\Phi(x) - 1$. Можно показать, что в этом случае $\gamma(x) \sim \sqrt{2x}$ при $x \to \infty$. Это дает нам ту же нормирующую последовательность, что и для $u = -\infty$, $v = +\infty$. К тем же выводам можно было прийти, заметив, что $1 - F(x) \sim 2(x\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}$ при $x \to \infty$. Значит хвост распределения F похож на хвост распределения Вейбулла с параметром формы 2 и параметром масштаба 1/2. Нужный результат об асимптотике $\gamma(x)$ для распределения Вейбулла легко получается из (6) (см. также [15]).

Другие примеры вычисления b_n можно построить с помощью примеров из [15].

Наш следующий результат – это закон Эрдёша–Реньи для приращений сумм вдоль монотонных блоков.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1)–(3), $p < 1$ *и* $(1 - a_n)\log\log n \to B + \log(1/p)$ *при* $n \to \infty$, *где* $B \in (0, B_0)$, B_0 *определено в* (4). *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{l_n} = \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Если $u = -\infty$, $v = +\infty$ (напомним, что в этом случае $p = 1$), то теорема 3 получена в [15].

Наш последний результат представляет собой закон Чёргё–Ревеса для приращений сумм вдоль монотонных блоков.

Теорема 4. *Пусть* $E\overline{X} = 0$, $E\overline{X}^2 = 1$. *Пусть выполнены условия* (1)–(3), $p < 1$ *и* $(1 - a_n)\log l_n \searrow \log(1/p)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.},$$

где $b_n = (2l_n((l_n - i(n))\log l_n - i(n)\log(1/p)))^{1/2}$, $i(n) = [a_n l_n]$.

Отметим, что в теореме 4 $(1 - a_n)\log\log n \to \log(1/p)$ и $b_n \sim \sqrt{2}l_n((\log(1/p))^2(\log l_n)^{-1} + r_n)^{1/2}$ при $n \to \infty$, где $r_n = (1 - a_n)\log l_n - \log(1/p)$.

Из наших результатов следует, что поведение $M(n,j,u,v)$ для $-\infty < u < v < +\infty$, с одной стороны, сохраняет черты поведения $M(n,j,-\infty,+\infty)$, а, с другой стороны, приобретает черты поведения приращений сумм вдоль серий успехов (см. [12]). Так формулы для нормировок в теоремах 2 и 3 похожи для конечных и для бесконечных u и v. Однако для конечных u и v функция $\gamma(x)$ определяется условным распределением X при условии $u \le Y \le v$, а это уже свойство приращений над сериями успехов (см. теоремы 1 и 2 в [12]). В формуле для нормировки в теореме 4 (в отличие от случая $p = 1$) появляется добавочный член, характерный для результатов о приращениях над сериями успехов (см. теорему 3 в [12]). Следует однако помнить, что при переходе от монотонных блоков к сериям успехов l_n нужно заменить на $\log n/\log(1/p)$. Кроме того различаются условия на a_n, для которых выполняются заключения соответствующих теорем.

Теоремы 2–4 показывают, что асимптотика приращений сумм вдоль монотонных блоков подчиняется той же общей закономерности, что и асимптотика приращений сумм. Она зависит от длины приращений и меняется от сильной неинвариантности для малых приращений (закон Эрдёша–Реньи) до сильной инвариантности для больших приращений (закон Чёргё–Ревеса).

Отметим, что M_n в теоремах 2–4 можно заменить на

$$T_n = (S_{n+[j]} - S_n) I\{u \le Y_{n+1} \le \cdots \le Y_{n+[j]} \le v\}.$$

Доказательство теорем 2–4 основано на следующей теореме, представляющей и самостоятельный интерес.

Теорема 5. *Пусть* $(X,Y),(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ *– независимые одинаково распределенные случайные векторы,* $P(Y = y) = 0$ *для любого* y. *Пусть* $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\ldots,\overline{X}_n$ *– независимые случайные величины с функцией распределения* $F(x)$, $\overline{S}_n = \overline{X}_1+\overline{X}_2+\cdots+\overline{X}_n$. *Тогда для любого* $x > 0$,

$$P(S_n I\{u \le Y_1 \le \cdots \le Y_n \le v\} \ge x) = \frac{p^n}{n!} P(\overline{S}_n \ge x), \tag{7}$$

$$P(M_n \ge x) \le \frac{np^j}{j!} P(\overline{S}_j \ge x), \tag{8}$$

$$P(M_n < x) \le \exp\Big\{-\Big[\frac{n}{j}\Big]\frac{p^j}{j!}P(\overline{S}_j \ge x)\Big\}. \tag{9}$$

Теорема 5 позволяет получать оценки функции распределения M_n, верные для любого n. Для этого нужно лишь использовать подходящие вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.

3. Доказательства

Начнем с доказательства теоремы 5.

Доказательство теоремы 5. Имеем

$$
\begin{aligned}
&P(S_n I\{u \le Y_1 \le \dots \le Y_n \le v\} \ge x) = \\
&\frac{1}{n!} P\Big(S_n I\{Y_1 \in [u,v], \dots Y_n \in [u,v]\} \ge x\Big) = \frac{p^n}{n!} P(\overline{S}_n \ge x).
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве мы использовали лемму 1 из [12]. Таким образом, (7) доказано. Соотношения (8) и (9) получаются из (7) так же, как (13) и (14) получаются из (12) в доказательстве леммы 1 в [12]. Детали мы опускаем.

Доказательство теоремы 1. Действуя так же, как в доказательстве теоремы 5, получим

$$P(u \le Y_1 \le \dots \le Y_n \le v) = \frac{p^n}{n!}.$$

Из этого соотношения тем же способом, что и в лемме 1 из [12], получаются неравенства

$$P(L_n \ge m) \le n \frac{p^m}{m!}, \quad P(L_n < m) \le \exp\Big\{-\Big[\frac{n}{m}\Big]\frac{p^m}{m!}\Big\}.$$

Используя формулу Стирлинга, имеем

$$
\begin{aligned}
R(n) = P(L_n \ge (1+\varepsilon)l_n) &\le \frac{n}{[(1+\varepsilon)l_n]!} p^{[(1+\varepsilon)l_n]} \\
&= \exp\Big\{-\varepsilon l_n \log l_n (1+o(1))\Big\}
\end{aligned}
$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что ряд $\sum_j R(2^j)$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{L_{2^j}}{l_{2^j}} \le 1 \quad \text{п.н.}$$

Так как L_n не убывает и $l_{2^{j+1}}/l_{2^j} \to 1$ при $j \to \infty$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{l_n} \le 1 \quad \text{п.н.}$$

Возьмем $\varepsilon \in (0,1)$. Снова используя формулу Стирлинга, получим

$$\begin{aligned} Q(n) = P(L_n < [(1-\varepsilon)l_n]) &\le \exp\Big\{ -\frac{n}{[(1-\varepsilon)l_n]} \frac{p^{[(1-\varepsilon)l_n]}}{[(1-\varepsilon)l_n]!} \Big\} \\ &= \exp\Big\{ -\exp\{\varepsilon l_n \log l_n (1+o(1))\}\Big\}. \end{aligned}$$

Поэтому ряд $\sum_n Q(n)$ сходится. Лемма Бореля–Кантелли влечет

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n}{l_n} \ge 1 \quad \text{п.н.},$$

и теорема 1 доказана.

Доказательство теорем 2–4 использует технику из работы [15]. Поэтому здесь мы приводим схемы доказательств, опуская подробные вычисления.

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $\omega = \infty$.

Положим

$$N_{ij0} = \{n : 2^j \le n < 2^{j+1}, \quad i(n) = i,\ a_n \le \beta\}, \quad 0 < \beta < 1\ ,$$

$$N_{ijr} = \Big\{ n : 2^j \le n < 2^{j+1},\ i(n) = i,\ \frac{r}{\log\log 2^j} \le a_n < \frac{r+1}{\log\log 2^j} \Big\},$$

$$A_{ij0} = \beta, \quad A_{ijr} = \max_{n\in N_{ijr}} a_n,$$

$$a_{ijr} = \min_{n\in N_{ijr}} a_n, \quad n_{ijr} = \min\{n : n \in N_{ijr}\},$$

где $\log\log 2^j > r \ge \beta \log\log 2^j$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (8), свойств функции $\gamma(x)$ и леммы 2.3 из [5] выполняются неравенства

$$\begin{aligned} P_{ijr} &= P\Big(\max_{n\in N_{ijr}} M_n/b_n \ge 1+\varepsilon \Big) \\ &\le \frac{2^{j+1}}{i!} p^i\, P\Big(\overline{S}_i \ge (1+\varepsilon)\, i\, \gamma((1-A_{ijr})\log n_{ijr}/i) \Big) \\ &\le \frac{2^{j+1}}{i!} p^i \exp\{-(1+\varepsilon)(1-A_{ijr})\log n_{ijr}\}\ . \end{aligned}$$

Используя формулу Стирлинга и определения l_n, A_{ijr}, a_{ijr}, N_{ijr} и n_{ijr}, получим

$$P_{ij0} \le 2^{1-\varepsilon j/2}, \quad P_{ijr} \le C_0 \exp\{-k(2^j)\}$$

для всех достаточно больших j, где $k(n) = \log n/\log\log n$, а β выбрано так, чтобы $\beta < \varepsilon/2(1+\varepsilon)$. Отсюда следует, что ряд

$$\sum_j P\Big(\max_{2^j \le n < 2^{j+1}} M_n/b_n \ge 1+\varepsilon\Big)$$

сходится. Применяя лемму Бореля-Кантелли, получим

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{b_n} \le 1 \quad \text{п.н.}$$

Положим $i = i(n)$, $c(n) = (1-a_n)\log n/i$. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (9) имеем

$$\begin{aligned} Q(n) &= P(M_n < (1+\varepsilon)^{-3} b_n) \\ &\le \exp\Big\{-\Big[\frac{n}{i}\Big]\frac{p^i}{i!} P(\overline{S}_i \ge (1+\varepsilon)^{-3} i\gamma(\,c(n)\,))\Big\} \\ &\le \exp\Big\{-\Big[\frac{n}{i}\Big]\frac{p^i}{i!} P(\overline{X} \ge (1+\varepsilon)^{-3}\gamma(\,c(n)\,))^i\Big\}. \end{aligned}$$

С помощью метода, использованного в лемме 2.5 из [9], построим последовательность натуральных чисел $\{n_r\}$ такую, что

$$(P(\overline{X} \ge (1+\varepsilon)^{-3}\gamma(c(n_r))))^{\log n_r/c(n_r)} \ge \exp\{-(1+\varepsilon)^{-1}\log n_r\} \tag{10}$$

и $n_r \ge r$ при всех достаточно больших r. Использование формулы Стирлинга, определения l_n и (10), дает

$$Q(n_r) \le \exp\big\{-Ck(n_r)^{-3/2}\exp\{k(n_r)\}\big\}$$

для некоторого положительного C и всех достаточно больших r. Отсюда следует, что ряд $\sum_r Q(n_r)$ сходится, и по лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{b_n} \ge 1 \quad \text{п.н.} \tag{11}$$

Если выполнено условие (6), то неравенство (10) выполнено с заменой $(1+\varepsilon)^{-3}$ на $(1+\varepsilon)^{-2}$ для $n_r = r$. Это приводит к тому, что ряд $\sum_r Q(r)$ сходится. Следовательно, (11) выполнено с $\liminf$ вместо $\limsup$.

Пусть теперь $\omega < \infty$. Тогда можно считать, что $b_n = i(n)\omega$. Заменяя в определении $Q(n)$ последовательность b_n на $i(n)\omega$ и проводя те же рассуждения, что и выше, можно показать, что ряд $\sum_n Q(n)$ сходится. Поэтому

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{i(n)} \geq \omega \quad \text{п.н.}$$

Но $M_n \leq i(n)\omega$ п.н. в силу определения M_n и ω. Отсюда следует, что в (5) $\limsup$ можно заменить на $\lim$.

Теорема 2 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующий результат из [17].

Теорема 6. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Пусть $\gamma = \gamma(B)$, и пусть $c = c(\gamma)$ – решение уравнения $m(c) = \gamma$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$P(\overline{S}_n \geq n\gamma) \sim \frac{\psi(c)}{\sqrt{n}} \exp\{-nB\}$$

равномерно по $\gamma \in [\varepsilon, \min\{A - \varepsilon, 1/\varepsilon\}]$, где $\psi(c)$ – положительная постоянная. Здесь $A = \lim_{t\uparrow t_0} m(t)$. Если $\overline{X}_1$ имеет нерешетчатое распределение, то $\psi(c) = 1/(c\sigma(c)\sqrt{2\pi})$. Если $\overline{X}_1$ имеет решетчатое распределение с максимальным шагом H, то $\psi(c) = H/(\{1 - e^{-Hc}\}\sigma(c)\sqrt{2\pi})$, где $\sigma(t) = m'(t)$.

Доказательство теоремы 3. Для краткости положим $i = i(n)$, $l = l_n$, $a = a_n$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (8), свойств $\gamma(x)$, теоремы 6 и формулы Стирлинга

$$\begin{aligned} R(n) = P(M_n \geq (1+\varepsilon)\gamma(B)i) &\leq \frac{n}{i!} p^i P(\overline{S}_i \geq (1+\varepsilon)\gamma(B)i) \\ &\leq C \exp\Big\{\Big(l + \frac{1}{2}\Big)\log l - l - \Big(i + \frac{1}{2}\Big)\log i + i - i(1+\delta)B - i\log(1/p)\Big\} \end{aligned}$$

для некоторых положительных C, δ, δ_1 и всех достаточно больших n.

Положим $n_j = \max\{n : i(n) = j\}$. Ряд $\sum_j R(n_j)$ сходится, и по лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{M_{n_j}}{l_{n_j}} \leq \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Так как $l_{n_j}/l_{n_{j+1}} \to 1$ при $n \to \infty$ и $M_n \le M_{n_j}$ для n таких, что $i(n) = j$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{l} \le \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Используя (9), свойства $\gamma(x)$, теорему 6 и формулу Стирлинга, имеем

$$Q(n) = P(M_n < (1-\varepsilon)\gamma(B)l)$$
$$\le \exp\Big\{-\frac{n}{a l\, i!}\, p^i P(\overline{S}_i \ge (1-\varepsilon)\gamma(B)l)\Big\}$$
$$\le \exp\Big\{-C\exp\Big\{\Big(l+\frac{1}{2}\Big)\log l - l - \Big(i+\frac{3}{2}\Big)\log i + i - i(1-\delta)B - i\log(1/p)\Big\}\Big\}$$
$$\le \exp\big\{-C\exp\{\delta_1 a l\}\big\} \le n^{-2}$$

для некоторых положительных C, δ, δ_1 и всех достаточно больших n. Значит ряд $\sum_n Q(n)$ сходится, а лемма Бореля–Кантелли дает

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{l} \ge \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется следующий результат из [7].

Теорема 7. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.

Тогда для любого $\delta > 0$, *любой последовательности* $\{x_n\}$ *такой, что* $x_n = o(\sqrt{n})$, *и всех достаточно больших* n *выполняются неравенства*

$$\exp\{-(1+\delta)x_n^2/2\} \le P(\overline{S}_n \ge x_n\sqrt{n}) \le \exp\{-(1-\delta)x_n^2/2\}.$$

Доказательство теоремы 4. Положим $l = l_n$, $i = i(n)$, $\tau_n = (l - i)\log l - i\log(1/p)$. Имеем $\tau_n \sim l((\log(1/p))^2(\log l)^{-1} + r_n)$ при $n \to \infty$, где $r_n \searrow 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\log l = o(\tau_n)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Используя (8), теорему 7 и формулу Стилинга, получим

$$R(n) = P(M_n \ge (1+2\varepsilon)^{1/2} b_n) \le \frac{n}{i!} p^i P(\overline{S}_i \ge (1+2\varepsilon)^{1/2} b_n)$$
$$\le C\exp\Big\{\Big(l+\frac{1}{2}\Big)\log l - l - \Big(i+\frac{1}{2}\Big)\log i + i - i\log(1/p) - \frac{(1+\varepsilon)b_n^2}{2l}\Big\}$$
$$\le C\exp\{-\varepsilon\tau_n\} = C\exp\{-2\rho_n \log l\},$$

для некоторого положительного C и всех достаточно больших n. Здесь $\rho_n = \varepsilon\tau_n/(2\log l) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Зафиксируем $q > 1$. Обозначим $N_{jk} = \{n : i(n) = j, q^k \le \rho_n < q^{k+1}\}$, $n_{jk} = \max\{n : n \in N_{jk}\}$, $j \ge 2$, $k \ge 0$. Тогда ряд $\sum_{j,k} R(n_{jk})$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{M_{n_{jk}}}{b_{n_{jk}}} \le 1 \quad \text{п.н.}$$

равномерно по k. Так как $b_n \ge b_{n_{jk}}/q$ и $M_n \le M_{n_{jk}}$ для $n \in N_{jk}$, всех достаточно больших j и всех k, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{b_n} \le q \quad \text{п.н.}$$

Так как q можно выбрать сколь угодно близким к 1, то последнее соотношение выполнено с формальной заменой q на 1.

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Учитывая (9), теорему 7 и формулу Стилинга, имеем

$$Q(n) = P(M_n < (1-\varepsilon)b_n) \le \exp\Big\{-\frac{n}{al\,i!}\,p^i P(\overline{S}_i \ge (1-\varepsilon)b_n)\Big\}$$

$$\le \exp\Big\{-C\exp\Big\{\Big(l+\frac{1}{2}\Big)\log l - l - \Big(i+\frac{3}{2}\Big)\log i + i - i\log(1/p) - \frac{(1-2\varepsilon)b_n^2}{2l}\Big\}\Big\}$$

$$\le \exp\{-\delta l^{\varepsilon\tau_n}\} \le n^{-2}$$

для некоторых положительных C, δ и всех достаточно больших n. Следовательно, ряд $\sum_n Q(n)$ сходится, и по лемме Бореля–Кантелли

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{b_n} \ge 1 \quad \text{п.н.}$$

Теорема 4 доказана.

Литература

1. P. Erdős, A. Rényi, *On a new law of large numbers.* — J. Analyse Math. **23** (1970), 103–111.
2. L. A. Shepp, *A limit law concerning moving averages.* – Ann. Math. Statist. **35** (1964), 424–428.
3. S.Csörgő, *Erdős–Rényi laws.* — Ann. Statist. **7** (1979), 772–787.
4. P. Deheuvels, L. Devroye, *Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type.* — Ann. Probab. **15** (1987), 1363–1386.

5. D. M. Mason, *An extended version of the Erdős–Rényi strong law of large numbers.* — Ann. Probab. **17** (1989), 257–265.
6. M. Csörgő, P. Révész, *Strong Approximations in Probability and Statistics.* Academic Press, New York (1981).
7. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for large increments of sums.* — Statist. Probab. Letters **37** (1998), 155–165.
8. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин.* Докл. РАН **372** N 5, (2000), 596–599.
9. P. Erdős, P. Révész, *On the length of the longest head-run.* In: Topics in Information Theory, I. Csiszár, P. Elias, (eds.) Amsterdam: North Holland, — Coll. Math. Soc. J. Bolyai **16** (1975), 218–228.
10. P. Deheuvels, *On the Erdős–Rényi theorem for random fields and sequences and its relationships with the theory of runs and spacings.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb. **70** (1985), 91–115.
11. A. N. Frolov, A. I. Martikainen, *On the length of the longest increasing run in R^d.* — Statist. Probab. Letters. **41** (1999), 153–161.
12. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений сумм вдоль серий успехов.* Зап. научн. семин. ПОМИ **60**, (1999), 263–277.
13. A. N. Frolov, A. Martikainen, J. Steinebach,, *On the maximal gain over head runs.* — Studia Sci. Math. Hung. **34** (1998), 165–181.
14. B. G. Pittel, *Limiting behaviour of a process of runs.* — Ann. Probab. **9** (1981), 119–129.
15. A. N. Frolov, A. Martikainen, J. Steinebach, *On the maximal excursion over increasing runs.* In: Asymptotic methods in probability and mathematical statistics with applications. Birkhauser, Boston 2000, p.??–??.
16. A. N. Frolov, A. I. Martikainen, J. Steinebach, *Strong laws for the maximal gain over increasing runs.* — Statist. Probab. Letters **50** (2000), 305–312.
17. В. В. Петров, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **10**, No. 2 (1965), 310–322.

Frolov A. N. On asymptotic behaviour of increments of sums over increasing runs.

We investigate the almost sure asymptotic behaviour of increments of sums of i.i.d. random variables over increasing runs in associate sequence. The Shepp law, the Erdős–Rényi law and the Csörgő–Révész laws are obtained for increments of sums over increasing runs formed by random variables which take its values in a fixed interval.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 15 декабря 2000 г.