Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

А. И. Генералов, И. М. Зильберборд

БАЗИСНЫЕ ПОДМОДУЛИ МОДУЛЕЙ НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ НЕТЕРОВЫМИ СПРАВА КОЛЬЦАМИ. I

Модуль называется цепным, если структура его подмодулей линейно упорядочена относительно включения. Модуль, являющийся прямой суммой цепных подмодулей, называется полуцепным.

Кольцо R – полуцепное, если R_R и ${}_RR$ – полуцепные модули. Далее всюду R обозначает полуцепное нётерово справа кольцо, под модулем, если это специально не оговорено, понимается R-модуль. Кроме того, предполагаем R (двусторонне) неразложимым и неартиновым кольцом.

Если дополнительно известно, что R – нётерово слева, то любой R-модуль обладает базисным подмодулем (см., например, [1, предложение 1.3]). В настоящей работе понятие базисного подмодуля обобщается для модулей над полуцепными нётеровыми справа кольцами; в §3 доказывается, что любой такой модуль имеет базисный подмодуль. В §5 исследуются неразложимые чисто-инъективные модули; доказывается, что если такой модуль не инъективен, то любой его неразложимый конечно порождённый подмодуль содержится в базисном подмодуле.

Пусть $\mathbb{S} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов, причём все e_iR – неартиновы модули, а все f_jR – артиновы модули. Обозначим $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$, $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$. Тогда $eRe \simeq R/Rf$ – полуцепное hnp-кольцо, $T = fRf$ – полуцепное артиново кольцо [2, теорема 2.11] (см.также [3]). Кроме того, $fRe = 0$ [2, лемма 2.6]. $J = \mathrm{Rad}(R)$ обозначает радикал Джекобсона кольца R, $N = \mathrm{Nil}(R)$ – ниль-радикал R.

Далее везде рассматриваются только правые модули, под чистотой в категории модулей понимается чистота по Кону. $\mathrm{E}_R(M)$ обозначает инъективную оболочку над R модуля M, а $\mathrm{PE}_R(M)$ - чисто-инъективную оболочку M.

§1. Неразложимые конечно порождённые модули

Пусть R – полуцепное нётерово справа неразложимое кольцо. По теореме Дрозда–Уорфилда [4; 5, следствие 3.4] любой неразложимый конечно порождённый модуль над R является фактормодулем неразложимого конечно порождённого проективного модуля и, следовательно, цепным модулем.

Кольцо эндоморфизмов любого цепного конечно порождённого R-модуля локально, поэтому к разложениям модулей над R в прямую сумму неразложимых конечно порождённых модулей применима теорема Крулля–Шмидта.

Определение. *Пусть M – ненулевой конечно порождённый неразложимый R-модуль.*

(1) *M называется модулем первого типа, если M артинов и имеет неартиново проективное накрытие;*
(2) *M называется модулем второго типа, если M неартинов (и, следовательно, имеет неартиново проективное накрытие);*
(3) *M называется модулем третьего типа, если M имеет артиново проективное накрытие.*

Заметим, что если $\mathbb{S}$ – фиксированное выше множество ортогональных идемпотентов, то с точностью до изоморфизма все модули третьего типа – это модули f_jR/f_jJ^l ($j \in \{1,2,\dots,n\}$, $l \in \mathbb{N}$), модули первого типа – это модули e_iR/e_iJ^t ($i \in \{1,2,\dots,m\}$, $t \in \mathbb{N}$), а второго типа – e_iR/e_iN^k ($i \in \{1,2,\dots,m\}$, $k \in \mathbb{N}$). Это следует из работы [2].

Модули $e_1R/e_1N^k, e_2R/e_2N^k, \dots, e_mR/e_mN^k$ (при фиксированном k) – это с точностью до изоморфизма все неразложимые неартиновы проективные R/N^k -модули. Для каждого из них есть мономорфизм в любой другой модуль этого вида. Это, как и следующие результаты этого параграфа, доказано в [6]. Будем говорить (см.[7]), что эти модули лежат на k-ой окружности. У всех модулей с одной окружности наибольшие артиновы подмодули изоморфны между собой.

Отметим некоторые факты, касающиеся гомоморфизмов между неразложимыми конечно порождёнными модулями. Из модуля с k-ой окружности нет ненулевых гомоморфизмов в модули, лежащие на окружностях с большими, чем k, номерами, а все мономорфизмы из него в цепные конечно порождённые модули действуют в модули той же окружности.

Не существует ненулевых гомоморфизмов из модулей первого и второго типов в модули третьего типа, из модулей первого типа в модули второго типа, из модулей третьего типа в модули первого типа.

§2. Условия чистоты в модуле цепного конечно порождённого подмодуля

Следующее утверждение, по-видимому, общеизвестно, однако авторы затрудняются указать соответствующую ссылку.

Предложение 2.1. *Пусть I – двусторонний идеал кольца S, $\overline{S} = S/I$. Если M – чисто-инъективный $\overline{S}$-модуль, то M чисто-инъективен и как S-модуль.*

Доказательство. Пусть A – чистый подмодуль S-модуля B, $\alpha : A \longrightarrow B$ – соответствующее вложение, $f : A \longrightarrow M$ – некоторый S-гомоморфизм. Так как $MI = 0$, то f проходит через фактормодуль A/AI, т.е. существует гомоморфизм $g : A/AI \longrightarrow M$ такой, что $g\pi = f$, где $\pi : A \longrightarrow A/AI$ – канонический эпиморфизм. Так как A чист в B, то $AI = A \cap BI$, следовательно, α индуцирует мономорфизм $\overline{\alpha} : A/AI \longrightarrow B/BI$, при этом $\overline{\alpha}\pi = \pi'\alpha$, где $\pi' : B \longrightarrow B/BI$ – также канонический эпиморфизм. Непосредственно проверяется, что $\overline{\alpha}$ – чистый $\overline{S}$-мономорфизм, и потому существует гомоморфизм $h : B/BI \longrightarrow M$, для которого $h\overline{\alpha} = g$. Поскольку $(h\pi')\alpha = f$, то инъективность M относительно α доказана. •

Следствие 2.1.1. *Пусть C – T-модуль, тогда C – чисто-инъективен как R-модуль. В частности, все модули третьего типа чисто-инъективны.*

Доказательство. Заметим, что $T \simeq R/eR$ (eR – идеал R, так как $fRe = 0$). Любой T-модуль – прямая сумма конечно порождённых модулей [8, теорема 25.4.2], поэтому он чисто-проективен, и над T все чистые расширения расщепляются. Следовательно, все T-модули чисто-инъективны.

Если A – модуль третьего типа, то $Ae = 0$ (в A нет подмодулей первого и второго типов), и A является T-модулем. •

Следствие 2.1.2. *Все модули первого типа чисто-инъективны.*

Доказательство. Любой модуль первого типа является конечно порождённым артиновым модулем над полуцепным (двусторонне) нётеровым кольцом R/N [9, теорема 1.11] и, следовательно, дискретным в R/N-топологии модулем. Поэтому он чисто-инъективен как R/N-модуль [1, теорема 2.3]. $\bullet$

Лемма 2.2. *Пусть M – R-модуль, а A – ненулевой конечно порождённый цепной подмодуль M. A чист в M тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) *в M нет конечно порождённых цепных подмодулей, содержащих A собственным образом;*
(2) *если A содержится в подмодуле M вида $A_1 \oplus A_2$, где A_1 и A_2 – ненулевые конечно порождённые цепные подмодули M, то A выделяется прямым слагаемым в $A_1 \oplus A_2$.*

Доказательство. Предположим, что выполнены условия (1) и (2). Пусть M_1 — конечно порожденный подмодуль в M, содержащий A. Так как M_1/A – прямая сумма цепных модулей, то можно предположить, что сам модуль M_1/A – цепной. Тогда M_1 порождается не более чем двумя локальными элементами, поэтому M_1 — фактор-модуль прямой суммы двух неразложимых проективных модулей. Используя теорему о согласованных разложениях [5, теорема 3.3; 8, теорема 25.3.3], получаем, что $M_1 = A_1 \oplus A_2$, где A_1, A_2 — цепные модули. Следовательно, A выделяется прямым слагаемым в M_1, поэтому A чист в M.

Обратное утверждение очевидно. $\bullet$

Замечание 2.2.1. Пусть $(\alpha, \beta)^{\top} : A \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ – вложение A в прямую сумму цепных конечно порождённых модулей. Если α или β — изоморфизм, то ясно, что A – прямое слагаемое в $A_1 \oplus A_2$. В противном случае ввиду [6, лемма 1] один из гомоморфизмов α, β является мономорфизмом, другой – эпиморфизмом.

Предложение 2.3. *Пусть B – конечно порождённый цепной подмодуль модуля M. Если B максимален среди конечно порождённых цепных подмодулей M, и в M нет подмодулей, изоморфных нетривиальным фактор-модулям модуля B, то B чист в M.*

Доказательство. Проверим условие (2) леммы 2.2: если B не является прямым слагаемым $A_1 \oplus A_2$, то по замечанию 2.2.1 один из гомоморфизмов α, β – эпиморфизм, но не изоморфизм, и один из ненулевых модулей A_1, A_2 должен быть фактор-модулем B, что противоречит условию. $\bullet$

Следствие 2.3.1. *Пусть M – модуль без подмодулей первого типа. Если A – подмодуль M второго типа с окружности с минимальным для подмодулей M номером, а B максимален среди содержащих A конечно порождённых цепных подмодулей M, то B чист в M.*

Доказательство. Легко видеть, что B – модуль с той же, что и A, окружности. Следовательно, его фактор-модули либо артиновы, либо являются модулями с окружностей с меньшими, чем у A, номерами, и по предположению M не содержит таких подмодулей. $\bullet$

Определение. *Для модуля M определим $\mathrm{T}(M)$ как сумму всех подмодулей M первого типа. Иначе говоря,* $\mathrm{T}(M) = \{y \in Me \mid \exists n \in \mathbb{N} : yJ^n = 0\}$.

Предложение 2.4. *Для произвольного R-модуля M $\mathrm{T}(M)$ – чистый подмодуль M.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если X – подмодуль в M такой, что фактор-модуль $\overline{X} = X/\mathrm{T}(M)$ – цепной и конечно порожденный, то $\mathrm{T}(M)$ – прямое слагаемое в X.

Пусть $\pi : P \longrightarrow \overline{X}$ – проективное накрытие, $\varphi : P \longrightarrow X$ – гомоморфизм, для которого $\sigma\varphi = \pi$, где $\sigma : X \longrightarrow \overline{X}$ – канонический гомоморфизм. Ясно, что $X = \mathrm{Im}\,\varphi + \mathrm{T}(M)$. Если эта сумма не прямая, то $\mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{T}(M)$ – цепной подмодуль первого типа. Но тогда и $\mathrm{Im}\,\varphi$ – модуль первого типа, т.е. $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{T}(M)$, поэтому $X = \mathrm{T}(M)$. $\bullet$

Следствие 2.4.1. *Для любого R-модуля M $\mathrm{T}(M)$ является модулем над кольцом $\overline{R} = R/Rf$. Если Q – чистый над $\overline{R}$ подмодуль $\mathrm{T}(M)$, то Q – чистый над R подмодуль M.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{T}(M) \subseteq Me$, то $\mathrm{T}(M)f = 0$. Следовательно, $\mathrm{T}(M)$ – $\overline{R}$-модуль. Если Q – чистый над $\overline{R}$ подмодуль $\mathrm{T}(M)$, то он является чистым над R подмодулем $\mathrm{T}(M)$. Согласно предложению 2.4 Q будет чист и в M. $\bullet$

§3. Доказательство существования базисных подмодулей

Определение. *Подмодуль B R-модуля M называется базисным, если:*

(1) *B – чистый подмодуль M;*
(2) *B – прямая сумма некоторого семейства конечно порождённых модулей;*
(3) *M/B – инъективный модуль без ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых.*

Последнее условие можно описать по-другому.

Предложение 3.1. *Для инъективного модуля E следующие условия равносильны:*

(1) *E не имеет ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых;*
(2) *E не содержит ненулевых конечно порождённых чистых подмодулей.*

Доказательство. Пусть M – ненулевой конечно порождённый чистый подмодуль E, P – его ненулевое неразложимое прямое слагаемое, тогда P – чистый подмодуль E. Докажем, что P – прямое слагаемое E. Так как E инъективен, то $\mathrm{E}_R(P)$ вкладывается в E; кроме того, поскольку P однороден, то $\mathrm{E}_R(P)$ – неразложимый инъективный модуль. Поэтому $\mathrm{E}_R(P)$ – цепной модуль [2, лемма 2.2], в котором P является чистым подмодулем. Если $x \in \mathrm{E}_R(P) \setminus P$, то $P \subseteq xR$. Следовательно, P – чистый подмодуль xR, и P должен быть прямым слагаемым xR. Но xR – цепной модуль, как подмодуль $\mathrm{E}_R(P)$, поэтому $xR = P$. Итак, $P = \mathrm{E}_R(P)$, т.е. P инъективен, и он является прямым слагаемым E.

Осталось заметить, что любое прямое слагаемое всегда является чистым подмодулем. •

Отметим, что если R не наследственно справа, то, как доказывается в следующем предложении, существует ненулевой инъективный конечно порождённый R-модуль. Полуцепные наследственные справа кольца исследовались также в [9].

Предложение 3.2. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *R – наследственное справа кольцо;*

(2) *$T = fRf$ – наследственное справа кольцо, $X = eRf$ – точный T-модуль;*
(3) *все ненулевые конечно порождённые R-модули не инъективны.*

Доказательство. Поскольку все конечно порождённые модули – прямые суммы цепных модулей, то из существования ненулевого конечно порождённого инъективного модуля следует, что существует и цепной конечно порождённый инъективный модуль.

Лемма 3.2.1. *Цепной ненулевой конечно порождённый R-модуль C инъективен тогда и только тогда, когда любой мономорфизм из C в некоторый цепной конечно порождённый модуль является изоморфизмом.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность данного условия. Так как $\mathrm{E}_R(C)$ – неразложимый инъективный модуль, то он является цепным модулем [2, лемма 2.2]. Предположим, что найдётся $y \in \mathrm{E}_R(C) \setminus C$, тогда $C \subset yR$, yR – цепной модуль, и $i : C \hookrightarrow yR$ – мономорфизм, не являющийся эпиморфизмом. •

Как следует из доказанного в [6], все проективные модули третьего типа $P_1, \dots, P_n$ (т.е. все неразложимые проективные T-модули) можно занумеровать таким образом, что при $i < n$ $\mathrm{Rad}(P_i)$ – фактор-модуль модуля P_{i+1}, причём наибольший артинов подмодуль проективных модулей второго типа является фактор-модулем модуля P_1. При этом при $i > 1$ модуль P_i не инъективен, только если он изоморфен $\mathrm{Rad}(P_{i-1})$. Модуль P_1 всегда инъективен как T-модуль.

Докажем теперь равносильность условий (1)–(3).

(1) $\Rightarrow$ (3). Заметим, что при любом $i < n$ $\mathrm{Rad}(P_i)$ – проективный модуль, поэтому $P_{i+1} \simeq \mathrm{Rad}(P_i)$, и P_{i+1} вкладывается в P_i; P_1 вложим в модуль второго типа. Следовательно, все модули третьего типа не инъективны. Остальные неразложимые конечно порождённые модули всегда не инъективны (существуют собственные вложения любого модуля второго типа в себя, а любого модуля первого типа – в некоторый R/N-модуль).

(3) $\Rightarrow$ (2). Так как модули P_{i+1} $(i < n)$ не инъективны, то $\mathrm{Rad}(P_i) \simeq P_{i+1}$, и подмодули всех неразложимых проективных T-модулей проективны. Следовательно, T наследственно справа.

Поскольку P_1 не инъективен, P_1 вкладывается в некоторый модуль B второго типа. Так как B обязательно проективен (см.[6]), то $B \simeq e_iR$ (для некоторого i), а $P_1 = Bf \simeq e_iRf = e_iX$. Отметим, что для любого j $P_1f_j \neq 0$ (так как в P_1 вложены все проективные модули третьего типа, то P_1 имеет подмодуль, изоморфный f_jR), поэтому для любого j $Xf_j \neq 0$. Но тогда X точен как T-модуль (по [2, теорема 2.11] $\mathrm{Ann}_T(X)$ – прямое слагаемое ${}_TT$).

(2) $\Rightarrow$ (1). Так как T наследственно справа, то подмодули всех неразложимых проективных T-модулей (т.е. проективных модулей третьего типа) проективны.

Пусть B - произвольный проективный модуль второго типа. Наибольший артинов подмодуль B – это $Bf \simeq e_iX$ (для любого i). Если он не проективен, то найдутся k и j такие, что $e_iX \simeq f_jR/f_jJ^k$, причём $J^k \neq 0$. Но тогда e_iX (для любого i) аннулируется J^k, поэтому $X_T = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} e_iX$ аннулируется J^k, что противоречит условию. Следовательно, и у проективных модулей второго типа все подмодули проективны. $\bullet$

Теорема 3.3. *Если M – ненулевой не инъективный R-модуль, то M содержит ненулевой чистый конечно порождённый цепной подмодуль.*

Доказательство. Стандартно с помощью леммы Цорна доказывается, что M содержит подмодуль U, максимальный среди инъективных подмодулей M; таким образом, $M = U \oplus L$, где L — ненулевой модуль, не имеющий ненулевых инъективных подмодулей. Поэтому можно предположить, что сам модуль M не содержит ненулевых инъективных подмодулей. Разделим дальнейшее доказательство на три этапа.

1. Если M не содержит подмодулей первого и второго типов, то $Me_i = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$; следовательно, $Me = 0$, и M можно рассматривать как T-модуль. T – артиново полуцепное кольцо, поэтому любой T-модуль является прямой суммой конечно порождённых цепных модулей [8, теорема 25.4.2].

2. Пусть в M есть подмодули первого типа, т.е. $T(M) \neq 0$. Заметим, что $T(M)$ не инъективен как $\overline{R} = R/Rf$-модуль. Действительно, пусть Y – неразложимый инъективный над $\overline{R}$ подмодуль $T(M)$, тогда Y – цепной и, кроме того, не конечно порождённый модуль, так как $\overline{R}$ – полуцепное hnp-кольцо. Следовательно, Y

– инъективный R-модуль [2, лемма 2.2]. Но Y – подмодуль M, поэтому $Y = 0$.

Теперь используем следствие 2.4.1: $\overline{R}$ – полуцепное hnp-кольцо, поэтому $\mathrm{T}(M)$ имеет ненулевой базисный над $\overline{R}$ подмодуль [1, предложение 1.3]. Любое его ненулевое цепное прямое слагаемое Q будет чистым конечно порождённым подмодулем M.
3. Пусть теперь M имеет подмодули второго типа, но в M нет ненулевых подмодулей первого типа. Выберем A – подмодуль M второго типа, лежащий на k-ой окружности, где k минимально для подмодулей M второго типа.

Докажем, что найдётся подмодуль B, максимальный среди содержащих A цепных подмодулей M. Рассмотрим для этого множество всех цепных подмодулей M, содержащих A, частично упорядоченное относительно включения. Заметим, что объединение элементов любой цепи в этом множестве – снова цепной подмодуль (достаточно проверить, что для любых двух циклических подмодулей верно, что один из них содержится в другом; найдётся элемент цепи, содержащий оба этих подмодуля). Осталось применить лемму Цорна.

Так как в M нет инъективных подмодулей, то B – цепной не инъективный модуль, поэтому B конечно порождён [2, лемма 2.2]. По следствию 2.3.1 B – чистый подмодуль M. $\bullet$

Теорема 3.4. *Любой R-модуль M содержит базисный подмодуль.*

Доказательство. Рассмотрим множество X всех чистых чисто-проективных (т.е. являющихся прямыми суммами конечно порождённых модулей [10, следствие 3]) подмодулей M. Упорядочим его следующим образом:

$$(C_1 \leqslant C_2) \Leftrightarrow (C_1 = \bigoplus_{k\in I_1} B_k,\ C_2 = \bigoplus_{k\in I_2} B_k,\ \text{ причём }\ I_1 \subseteq I_2).$$

Если в этом множестве есть цепь $(C_l)_{l\in L}$, и $C_l = \bigoplus\limits_{k\in I_l} B_k$, то множества I_l сами составляют цепь. Определим $K = \bigcup\limits_{l\in L} I_l$, $B = \bigoplus\limits_{k\in K} B_k$.
Проверим, что B чист в M: если есть конечная система линейных уравнений над M с правыми частями из B, то все правые части лежат в одном из модулей C_l – чистом подмодуле M, поэтому если эта система разрешима в M, то она разрешима и в

B. Следовательно, в X любая цепь имеет наибольший элемент, и по лемме Цорна X содержит некоторый максимальный элемент B.

Благодаря следующей лемме, тем самым мы доказали, что в M есть базисный подмодуль.

Лемма 3.4.1. *Подмодуль B модуля M является базисным для M тогда и только тогда, когда B – максимальный чистый чисто-проективный подмодуль M.*

Доказательство. Предположим, что B – базисный подмодуль M. Пусть $C = B \oplus P$ чист в M, где P – ненулевой чисто-проективный модуль. Тогда $P = C/B$ чист в M/B. Но так как M/B – инъективный модуль без ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых, это противоречит предложению 3.1. Следовательно, B максимален.

Докажем обратное утверждение. Допустим, что в M/B есть ненулевой чистый конечно порождённый подмодуль $P = C/B$ (где C – содержащий B подмодуль M). Тогда C чист в M. Кроме того, B является прямым слагаемым C (так как B чист в M, то B чист и в C, а C/B – чисто-проективный модуль). Пусть $C = B \oplus P_1$, тогда $P \simeq P_1$, поэтому P_1 чисто-проективен. В силу максимальности B, $P_1 = 0$, и $P = 0$. Следовательно, у модуля M/B нет ненулевых чистых конечно порождённых подмодулей. По теореме 3.3 M/B инъективен. •

Предложение 3.5. *Предположим, что M – чисто-инъективный модуль. Если B – базисный подмодуль M, то $M = \mathrm{PE}_R(B) \oplus E$, где E – некоторый инъективный подмодуль M, не имеющий ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых.*

Замечание 3.5.1. Аналогичное этому предложению утверждение о том, что любой чисто-инъективный R-модуль является чисто-инъективной оболочкой прямой суммы некоторого семейства неразложимых чисто-инъективных модулей, было доказано в [11, теорема 1.5.8] с использованием теории моделей.

Доказательство предложения 3.5. Так как B – чистый подмодуль чисто-инъективного модуля M, то $\mathrm{PE}_R(B)$ является прямым слагаемым M: пусть $M = \mathrm{PE}_R(B) \oplus E$, где E – некоторый подмодуль M. Тогда $M/B = \mathrm{PE}_R(B)/B \oplus E$ – инъективный модуль без ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых, поэтому и модуль E обладает нужными свойствами. •

Замечание 3.6. Теорему единственности для базисных подмодулей модулей над полуцепными нётеровыми справа кольцами авторы предполагают опубликовать в ближайшее время.

§4. Вложения модулей третьего типа

Для R-модуля M определим $\mathrm{A}(M)$ как сумму всех подмодулей M третьего типа, т.е. $\mathrm{A}(M)= Mf$. Заметим, что $\mathrm{A}(M)$ – T-модуль.

Теорема 4.1. *Предположим, что M – R-модуль, не имеющий прямых слагаемых третьего типа. Тогда:*

(1) $\mathrm{A}(M)$ – *инъективный T-модуль;*
(2) *если A – ненулевое цепное прямое слагаемое $\mathrm{A}(M)$, то в M существует подмодуль B второго типа такой, что $A \simeq \mathrm{A}(B)$.*

Доказательство. Пусть A – ненулевое цепное слагаемое $\mathrm{A}(M)$. Так как T – полуцепное артиново кольцо, то модуль A конечно порождён и является модулем третьего типа. Следовательно, A не чист в M, так как иначе по следствию 2.1.1 A был бы прямым слагаемым M.

Применим теперь лемму 2.2. Рассмотрим случай, когда A содержится собственным образом в некотором цепном конечно порождённом подмодуле B. Так как A – прямое слагаемое $\mathrm{A}(M)$, то B – модуль второго типа, и A выделяется прямым слагаемым в $\mathrm{A}(B)$. Но $\mathrm{A}(B)$ – цепной модуль, поэтому $A = \mathrm{A}(B)$.

Допустим, что A содержится в прямой сумме цепных конечно порождённых ненулевых подмодулей A_1 и A_2, но не является прямым слагаемым $A_1 \oplus A_2$. Пусть $(\alpha, \beta)^\top : A \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ — соответствующее вложение A. Согласно замечанию 2.2.1 можем считать, что β – мономорфизм, а α – эпиморфизм. Тогда A_1 – модуль третьего типа, а A_2 должен быть модулем второго типа (поскольку A — прямое слагаемое в $\mathrm{A}(M)$). Так как A — прямое слагаемое и в $\mathrm{A}(A_1 \oplus A_2) = A_1 \oplus \mathrm{A}(A_2)$, то, используя теорему Крулля–Шмидта, получаем, что $A \simeq \mathrm{A}(A_2)$.

В каждом из рассмотренных случаев было доказано, что существует неартинов подмодуль B такой, что $A \simeq \mathrm{A}(B)$. Но $\mathrm{A}(B)$ –

наибольший артинов подмодуль модуля B, поэтому $\mathrm{A}(B)$ инъективен как T-модуль (ср.доказательство леммы 3.2.1). Итак, доказано, что любое цепное прямое слагаемое $\mathrm{A}(M)$ – инъективный T-модуль. Поэтому $\mathrm{A}(M)$, как прямая сумма инъективных модулей над нётеровым справа кольцом, является инъективным T-модулем. •

Следствие 4.1.1. *Пусть P – любой проективный модуль второго типа, $\overline{P} = \mathrm{A}(P)$. В условиях теоремы любой цепной подмодуль третьего типа в M, инъективный как T-модуль, является фактор-модулем модуля $\overline{P}$.*

Доказательство. Если A инъективен как T-модуль, то A – прямое слагаемое $\mathrm{A}(M)$. По теореме 4.1 A изоморфен наибольшему артиновому подмодулю некоторого модуля второго типа, поэтому A является фактор-модулем $\overline{P}$ (см.[6]). •

Предложение 4.2. *Если M – R-модуль, не имеющий прямых слагаемых третьего типа, причём все подмодули M второго типа являются модулями с одной и той же k-ой окружности (где $k \in \mathbb{N}$), то любой подмодуль M третьего типа содержится в подмодуле второго типа.*

Доказательство. По теореме 4.1 $\mathrm{A}(M)$ инъективен как T-модуль, поэтому любой подмодуль третьего типа в M вкладывается в некоторый неразложимый инъективный над T подмодуль A из $\mathrm{A}(M)$.

Докажем, что все ненулевые подмодули в M, являющиеся фактор-модулями A, изоморфны A. Заметим сначала, что если A_1 – такой подмодуль, то A_1 снова T-инъективен. Действительно, в обозначениях следствия 4.1.1 A_1 является фактор-модулем $\overline{P}$, поэтому A_1 изоморфен наибольшему артинову подмодулю некоторого модуля второго типа (см.[6]), и, следовательно, T-инъективен (ср. доказательство леммы 3.2.1). Но все ненулевые инъективные над T подмодули $\mathrm{A}(M)$ изоморфны между собой, так как у всех модулей с k-ой окружности наибольшие артиновы подмодули изоморфны друг другу. Следовательно, $A \simeq A_1$.

Аналогично доказательству теоремы 4.1 получаем, что A содержится в некотором подмодуле M второго типа. •

Следствие 4.2.1. *Предположим, что выполнены условия предложения 4.2. Пусть B – произвольный модуль с k-ой окружности. Тогда все инъективные над T подмодули M третьего типа изоморфны*

$\mathrm{A}(B)$. *Кроме того, любой подмодуль* M *третьего типа содержится в подмодуле, изоморфном модулю* B.

Доказательство. Пусть A – подмодуль M третьего типа. По предложению 4.2 A вкладывается в некоторый подмодуль C с k-ой окружности. Как отмечалось в §1, в C есть изоморфный B подмодуль B_1. Так как C – цепной модуль, то $A \subset B_1$. Если A – инъективный T-модуль, то A должен совпадать с $\mathrm{A}(B_1)$. •

§5. Неразложимые чисто-инъективные модули

Предложение 5.1. *Пусть* U *– неразложимый чисто-инъективный не инъективный модуль. Тогда либо* U *– конечно порождённый артинов модуль, либо существует неразложимый конечно порождённый неартинов модуль* B *такой, что* $U \simeq \mathrm{PE}_R(B)$. *Если* B *– неразложимый конечно порождённый неартинов модуль, то* $\mathrm{PE}_R(B)$ *– неразложимый не инъективный модуль.*

Доказательство. По теореме 3.3 в U существует ненулевой чистый цепной конечно порождённый подмодуль B. $\mathrm{PE}_R(B)$ – ненулевое прямое слагаемое U, поэтому $U = \mathrm{PE}_R(B)$. Если B артинов, то он чисто-инъективен (см. следствия 2.1.1 и 2.1.2), и в этом случае $B = U$.

Пусть B – произвольный модуль второго типа. Так как $\mathrm{End}_R(B)$ – локальное кольцо, то модуль $U = \mathrm{PE}_R(B)$ неразложим. Если бы U был инъективным модулем, то, как следует из доказательства предложения 3.1, B являлся бы прямым слагаемым U, и $B = U$. Но B, как модуль второго типа, не может быть инъективным модулем (см.доказательство предложения 3.2). •

Замечание 5.1.1. Аналогичные предложению 5.1 результаты были получены в [11] с помощью теории моделей.

Предложение 5.2. *Пусть* $U = \mathrm{PE}_R(B)$, *где* B *– неартинов неразложимый конечно порождённый модуль. Тогда:*

(1) U *не содержит подмодулей первого типа;*
(2) *все подмодули* U *второго типа лежат на одной окружности.*

Доказательство. Если (1) неверно, то поскольку U не имеет ненулевых инъективных подмодулей, в U найдётся ненулевой чистый подмодуль Q первого типа (см. пункт 2 доказательства теоремы 3.3). Но по следствию 2.1.2 Q – чисто-инъективный модуль, поэтому $U = Q$.

Докажем теперь (2). Если B – модуль с k-ой окружности, то $BN^k = 0$, поэтому $\mathrm{PE}_R(B)$ аннулируется N^k (так как $\mathrm{PE}_R(B) = \mathrm{PE}_{R/N^k}(B)$). Следовательно, в U нет подмодулей с окружностей с большими, чем k, номерами. Пусть C – подмодуль с l-ой окружности ($l < k$). Выберем l минимальным для подмодулей U второго типа, найдём максимальный цепной подмодуль B_1 с l-ой окружности. По следствию 2.3.1 B_1 будет чистым подмодулем U. Тогда $U = \mathrm{PE}_R(B_1)$, и $UN^l = 0$, но даже $BN^l \neq 0$. •

Теорема 5.3. *Пусть U – неразложимый чисто-инъективный R-модуль. Тогда любой цепной подмодуль C в U содержится в чистом цепном конечно порождённом подмодуле, являющемся базисным для U.*

Доказательство. По предложению 5.1 можем считать, что $U = \mathrm{PE}_R(B)$, где B – некоторый модуль второго типа. Согласно предложению 5.2 U удовлетворяет условиям предложения 4.2, поэтому сразу предположим, что C – подмодуль второго типа. По следствию 2.3.1 подмодуль B_1, максимальный среди цепных подмодулей U, содержащих C, является чистым подмодулем U. Так как U не содержит ненулевых инъективных подмодулей, то B_1 конечно порождён. Осталось заметить, что поскольку U неразложим, то $\mathrm{PE}_R(B_1) = U$. Поэтому, используя лемму 3.4.1, получаем, что B_1 – базисный подмодуль U. •

Следствие 5.3.1. *Фактор-модуль неразложимого чисто-инъективного модуля по любому его максимальному цепному подмодулю инъективен.*

Доказательство. Как доказано в теореме 5.3, максимальный цепной подмодуль неразложимого чисто-инъективного модуля является его базисным подмодулем. •

Литература

1. А. И. Генералов, *Индуктивно замкнутые собственные классы над ограниченными hnp-кольцами.* — Алгебра и логика **25, No. 4** (1986), 384–404.
2. S. Singh, *Serial right noetherian rings.* — Canadian J. Math. **36**, No. **1** (1984), 22–37.
3. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* Киев, Препринт ИМ-75-1, Ин-т мат. АН УССР, 1975.

4. Ю. А. Дрозд, *Об обобщенно однорядных кольцах.* — Матем.заметки **18, No. 5** (1975), 705–710.
5. R. B. Warfield, *Serial rings and finitely presented modules.* — J. Algebra **37,** No. **2** (1975), 187–222.
6. А. И. Генералов, *Собственные классы коротких точных последовательностей над нетеровыми полуцепными кольцами.* — в кн.: Кольца и модули. Предел.теоремы теор.вер., вып. I. Ленинград, 1986, 87–102.
7. А. И. Генералов, *Размерность Крулля категории модулей над нетеровыми справа полуцепными кольцами.* — Записки научн.семинаров ПОМИ, **236** (1997), 73–86.
8. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* т. 2, М., Мир, 1979, 464 сс.
9. В. В. Кириченко, *О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах.* — Записки научн.семинаров ЛОМИ, **114** (1982), 137–147.
10. R. B. Warfield, *Purity and algebraic compactness for modules.* — Pacific J. Math. **28,** No. **3** (1969), 699–719.
11. Г. Е. Пунинский, *Теоретико-модельные методы в теории колец и модулей (докт. дисс.).* М., 1995, 185 сс.

Generalov A. I., Zilberbord I. M. Basic submodules of modules over right noetherian serial rings. I.

It is proved that any right module over right noetherian serial ring R contains a basic submodule. The structure of submodules of an indecomposable pure-injective R-module is investigated.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 29 июня 2000 г.